Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

von

Dr. Martin Ohm,

Prof. ord. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Allgem. Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. zu München, der Academia Pontificia de' nuovi Lincei zu Rom, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied, Ritter des Rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife.

Zweiter Theil.

Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend.

Dritte ganz umgearbeitete, bedeutend vermehrte und mit einer Figurentafel versehene Ausgabe.

Nürnberg, 1855.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Lehrbuch

der

niedern Analysis,

von

Dr. Martin Ohm,

Prof. ord. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Allgem. Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. zu München, der Academia Pontificia de' nuovi Lincei zu Rom, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife.

Zweiter Theil.

Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend.

Dritte ganz umgearbeitete, bedeutend vermehrte und mit einer Figurentafel versehene Ausgabe.

Nürnberg, 1855.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Vorrede.

Unmittelbar nach Erfindung der Infinitesimal-Rechnung, gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts, bemächtigten sich die damaligen Heroen der mathematischen Wissenschaft mit gerechtem Eifer dieser so außerordentlich werthvollen Entdeckung, weil durch sie plötzlich die Möglichkeit erschlossen war, die Stetigkeit, in den krummen Linien und Flächen nicht allein, sondern auch in dem ganzen Walten der Natur, überall durch Rechnung zu verfolgen. Durch sie allein wurde eine Mechanik des Himmels möglich; auf ihr allein konnten alle die wichtigen mathematisch-physikalischen Arbeiten der Neuzeit, — welche nicht, wie die früheren blos die Erscheinungen, sondern welche vorzugsweise die Ursachen dieser Erscheinungen d. h. die sogenannten Kräfte betrachten und aus ihnen die Erscheinungen selbst als nothwendige Folgen ableiten, — feste Wurzel fassen; ein unberechenbarer Fortschritt in dem Streben nach tieferer Erkenntniß der Natur.

Gleichzeitig aber erkannte man bald und immer eindringlicher, daß zwischen dieser neuen Rechnung und den vorher getriebenen Elementen, eine große und weite Kluft vorhanden sei, welche jedoch bei Gelegenheit des Fortschreitens in der neuen Rechnung, oft mittelst derselben, von den großen Mathematikern bald mit mehr, bald mit minderem Bewußtsein nach und nach verengert wurde, bis endlich der, die ganze Wissenschaft,

so weit es zu seiner Zeit möglich war, stets mit klarem Bewußtsein umfassende und in großartigem Neuschaffen unsterbliche Euler in seiner Introductio in analysin infinitorum die gedachte Kluft systematisch auszufüllen begann und in der That den größeren Theil derselben ausfüllte.

So viel aber Euler auch geleistet hatte, und so wichtig seine Arbeiten besonders auch dadurch sind, daß er seinen Nachfolgern die Bahnen eröffnete, auf denen sie weiter fortschreiten konnten, so blieb doch den Letzteren noch Vieles zu thun übrig, und wieviel? — wird man am besten ermessen können, wenn man die vorliegende „Analysis des Endlichen" mit dem obigen wichtigen Werke Euler's vergleicht. Euler hatte z. B. bereits die unendlich vielen Werthe der Logarithmen gefunden; er hatte bereits auf die Unvollständigkeit solcher Gleichungen, wie z. B.

$$\log(a^2) = 2\log a, \quad \log(a^2) = 2\log(-a),$$

aufmerksam gemacht, und daß man z. B. aus den vorstehenden Gleichungen nicht folgern könne, daß

$$2\log a = 2\log(-a), \quad \text{also} \quad \log(-a) = \log a$$

sei; er hat aber so wenig wie seine Nachfolger bemerkt, daß auch schon die Gleichungen

$$a^x \cdot a^z = a^{x+z} \quad \text{und} \quad a^x : a^z = a^{x-z},$$

die so unendlich oft in Anwendung gebracht werden, ebenso unvollständige sind, und bei allgemeinen Rechnungen, ja selbst schon, wenn gebrochene Exponenten vorkommen, einer Correktion bedürfen, wenn man nicht durch sie in ähnliche irrige Resultate, wie das von Euler gerügte, verfallen will. Aehnliches, in materieller Beziehung angesehen, wird man noch mehreres finden. — In formeller Beziehung blieb aber am meisten zu wünschen übrig. Wenn z. B. Euler die Exponential-Funktion e^z so häufig durch die Potenz $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ ersetzt, in welcher m

unendlich groß gedacht werden muß, um eine Form zu haben, auf welcher er den binomischen Lehrsatz und überhaupt die in der gemeinen Buchstaben-Rechenkunst eingeübten Formeln und Eigenschaften der Potenzen zur weiteren Umformung und zu neuen Entwickelungen in Anwendung bringen konnte, — so muß man das sich Bahn brechende Genie bewundern, zugleich aber auch sich gestehen, daß die dadurch gewonnenen Resultate höchstens nur für reelle Werthe von z, nothwendige Gültigkeit haben können. — Aehnliche Bemerkungen lassen sich noch viele machen. — Euler hat z. B. an einem anderen Orte den binomischen Lehrsatz für den Fall erwiesen, daß der Exponent jede beliebige reelle Zahl ist; es entsteht daher mit Recht die Frage, ob derselbe auch für einen imaginären Exponenten mit Sicherheit angewandt werden könne? — Euler hat an mehreren Stellen die Möglichkeit der Zerlegung einer reellen ganzen Funktion in lauter reelle Doppel-Faktoren stillschweigend vorausgesetzt, in dem oben gedachten Werke aber für eine solche ganze Funktion vom vierten Grade wirklich durchgeführt; seine Nachfolger, darunter Gauß, Cauchy, v. Staudt, 2c. 2c. haben diese Möglichkeit allgemein und für alle Fälle erwiesen. Wir haben in der gegenwärtigen Auflage (im §. 229.) den schönen Beweis des Professor Ullherr zu Nürnberg, mitgetheilt, an Stelle des, in der zweiten Auflage befindlichen, den Cauchy zuerst gegeben hat; wir halten den ersteren für den elementarsten und anschaulichsten.

Eine große Bereicherung hat die Analysis des Endlichen durch die, von Hindenburg zu Leipzig, gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts erfundene „combinatorische Analysis“ erfahren. Wenn sie in Frankreich fast gar nicht, und in Deutschland nur wenig Eingang gefunden hat, so müssen wir dies mehr anderen Ursachen als ihrem Inhalte zuschreiben. Besonders wichtig ist die von Rothe zu Erlangen erfundene „Theorie der

combinatorischen Aggregate" (von ihrem Erfinder „combinatorische Integrale" genannt); durch sie machen sich z. B. viele Entwickelungen, welche in den Schriften des Euler, des Lagrange, des Laplace und Anderer, ziemlich verwickelt erscheinen, oft wie von selbst. Wir haben daher auch in dieser dritten Auflage des vorliegenden Bandes, aus der combinatorischen Analysis das Wichtigste abermals aufnehmen zu müssen geglaubt.

Das interessanteste Werk über Analysis des Endlichen (nach Euler) ist der im Jahre 1821 zu Paris erschienene Cours d'analyse von Cauchy; es ist besonders interessant wegen der Offenheit und des Scharfsinnes, mit welchem das bis dahin von den Analysten beobachtete Verfahren vielfältig und meist mit Recht, gerügt wird; Cauchy ist aber darin weniger glücklich gewesen, solche neue Ansichten aufzustellen, welche sich mit Consequenz durchführen ließen; auch ist der, auf dem Titel versprochene, zweite Theil dieses Werkes, so viel wir wissen, nie erschienen. Selbst in materieller Beziehung lassen Cauchy's Arbeiten, denen man übrigens nie Geist absprechen kann, manches zu wünschen übrig. So z. B. giebt er unter Anderem eine Formel, welche alle Werthe von $Arc\, tg.\, \theta$ ausdrücken soll; sie enthält aber nur eine Hälfte derselben und giebt statt der anderen Hälfte, ganz fremde Werthe. — Cauchy hat sich durch seinen Geist auch in Deutschland viele Anhänger verschafft und so sieht man seitdem selbst seine materiellen Irrthümer auch in besseren deutschen Schriften verbreitet. In der gegenwärtigen neuen Auflage des vorliegenden Werkes sind wir bemüht gewesen, dieser Verbreitung von materiellen Irrthümern ebenfalls entgegen zu arbeiten, wie solchen Ansichten, welche wir für formelle Irrthümer halten müssen. Dahin gehört namentlich die übergroße Aengstlichkeit, mit welcher die neuern Analysten sich scheuen, mit unendlichen Reihen zu rechnen, wenn sie nicht vorher als konvergente nachgewiesen werden; es giebt eine Menge Fälle, wo mit allge-

meinen unendlichen Reihen gerechnet werden muß und wo, eben weil sie allgemein sind, die Frage nach ihrer Convergenz einen Widerspruch in adjecto einschließen würde. Man muß also strenge nachweisen, wie lange mit allgemeinen unendlichen Reihen mit Sicherheit gerechnet werden kann und — wo solches aufhört; — jede übertriebene, unnütze und zwecklose Aengstlichkeit dagegen fahren lassen.

Die wichtigsten Begriffe der gesammten Analysis sind die des „Rechnens" und der „Gleichung." Wir haben alles „Rechnen" dahin definirt, daß es sei: die fortgesetzte Umformung von Formen, die etwas ausdrücken und die deshalb Ausdrücke genannt werden, in neue Formen, mit dem Bewußtsein, daß das Ausgedrückte stets unverändert ein und dasselbe bleibe. — Je zwei solche Formen sind einander gleich und hierin liegt der Begriff der „Gleichung." — Daraus folgt aber von selbst, daß, wenn die eine Seite der Gleichung mehrförmig (mehrdeutig) ist, dann die andere Seite genau eben so viele, und jene genau ersetzende Formen haben müsse, und daß namentlich diejenigen Gleichungen, welche zum allgemeinen Rechnen verwandt werden, unbedingt diese Eigenschaft haben müssen. In besonderen Untersuchungen können natürlich, jedem besonderen Falle angemessene Ausnahmen gemacht werden, aber eben dazu ist es wieder unbedingt nothwendig, daß der Rechner von jeder seiner anzuwendenden Gleichungen mit vollem Bewußtsein erkenne, ob solche eine allgemeingültige ist, oder unter welcher Voraussetzung sie gilt, d. h. mit welcher Vorsicht und mit welcher Einschränkung sie zum Rechnen verwandt werden darf.

Auf diesen wichtigen Umstand ist bisher in den Lehrbüchern der mathematischen Analysis gar nicht oder doch fast gar nicht Rücksicht genommen worden und wir glauben durch unsere durchgängige Berücksichtigung desselben, dieser Wissenschaft einen wesentlichen Dienst geleistet zu haben.

So z. B. haben wir nachgewiesen, daß die Formeln

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x; \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x;$$

$$log\, a + log\, b = log(ab); \qquad log\, a - log\, b = log\, \frac{a}{b};$$

$$log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot log\, a; \quad \text{u. dgl. mehr,}$$

allgemeingültige sind, — daß dasselbe aber z. B. mit den Formeln

$$a^x \cdot a^z = a^{x+z}; \qquad \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$$

$$(a^x)^z = a^{xz}; \qquad log(a^x) = x \cdot log\, a$$

u. dgl. mehr, nicht der Fall ist, und daß alle diese letzteren, so wie namentlich auch die Formeln, nach denen gewöhnlich mit *Arcus* *) gerechnet wird, einer Correktion bedürfen, wenn sie bei allgemeinen Rechnungen mit Sicherheit gebraucht werden sollen.

Was jede Seite einer Gleichung ausdrückt, könnte hier ganz unberücksichtigt bleiben; drückt die eine Seite, wie man früher allgemein geglaubt hat, eine oder mehrere Größen aus, so muß die andere Seite der Gleichung genau dieselbe Größe oder genau dieselben Größen ausdrücken; — drückt aber die eine Seite (wie wir dies sowohl in dem vorhergehenden als auch im vorliegenden Theile dieses Werkes überall auf das Anschaulichste nachgewiesen haben) eine Folge von Gedankenverbindungen aus, welche an ein bestimmtes Ziel führen, so muß die andere Seite der Gleichung, obgleich sie eine andere Folge von Gedankenverbindungen ausdrückt, genau an dasselbe Ziel führen, — und wenn der erstere Ausdruck mehrere solcher Gedanken-Reihen vorstellt, welche zu eben so vielen verschiedenen Zielen führen, so muß der andere, ihm gleiche Ausdruck eben so viele neue Gedanken-

---

*) Anfänger werden aber wohl thun, wenn sie bei dem ersten Studiren dieses Bandes, die weitläufigeren Untersuchungen über die *Arcus* überschlagen, und erst beim zweiten Durchlesen darauf eingehen.

Reihen enthalten, welche genau zu denselben Zielen führen, — wenn die Gleichung als eine allgemein brauchbare anerkannt werden soll. Diese Verschiedenheit der Grundansicht hat dagegen auf das praktische Rechnen keinen weiteren Einfluß. Will man aber die theoretischen Widersprüche vermeiden, welche sich in so großer Anzahl bei dem Fortschreiten des Lernenden ihm in den Weg legen, so muß man vom Anfange an die Ansicht fahren lassen, daß man mit Größen „rechnen" könne. Sie führt nothwendig zu der unglücklichen Annahme der Existenz der negativen Größen und zu den noch unglücklichern imaginären Größen und erstickt jede freiere, geistigere Behandlung der Sache in ihrem Keime. Der gesammte Kalkul hat aber eine ganz andere Aufgabe zu lösen, als mit der Größe (quantitas; benannte Zahl) zu rechnen. Er hat die Aufgabe „das Verhalten der 7 Operationen (Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiziren, Logarithmiren) zu einander, die Gegensätze und Beziehungen derselben, im Allgemeinen und mit allen aus der Natur dieser Operationen sich von selbst und nothwendig ergebenden Modifikationen, festzustellen" und nur alle Endresultate zur „Vergleichung der Größen" zu verwenden. Dies letztere ist der Zweck, — der erstere das Mittel dazu. Die zu Ende des ersten Theiles d. W. befindliche „Allgemeine Größenlehre" enthält vollständig alles, was von den „Größen" und von der Art, wie das Mittel zu Erreichung des Zweckes verwandt wird, zu wissen nöthig ist.

Die (im Kalkul vorkommenden) Operationen selber (als bloße Verstandes-Thätigkeiten) werden von der unbenannten Zahl abstrahirt, welche letztere abermals ein abstrakter Begriff ist. — Diesem nach ist alles, was im Kalkul vorkommt, entweder eine unbenannte ganze Zahl, oder eine gedachte (angezeigte) Zusammensetzung aus zwei oder mehr solchen (unbenannten ganzen) Zahlen durch eine oder mehrere der Operationen (Verstandes-

Thätigkeiten); nie aber eine Größe. — Die Zusammensetzung durch Division $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$, 2c. 2c. als benannte Zahl genommen, hat zwar, vermöge einer Erweiterung des Begriffs (außer der ganzen Zahl) Realität in der Anwendung auf Größen; und eben so könnte man der Zusammensetzung -2 oder $-\frac{2}{3}$ als benannte Zahl eine Bedeutung anweisen; aber als benannte Zahl genommen sind sie nicht Gegenstand des Kalkuls, sondern nur als unbenannte Zahl, d. h. als bloße Zusammensetzungen durch die Operationen.

Wird diese Ansicht, so wie sie jetzt in der vorliegenden dritten Auflage der beiden ersten Theile d. W. mit der größten Konsequenz durchgeführt sich findet, aufrecht gehalten, so wird man stets festen Grund und Boden unter seinen Füßen finden und nie über irgend einen der vorkommenden Begriffe im Unklaren sein.

Wieviel dadurch der Lehrer für den Unterricht gewinnt, brauchen wir nicht aus einander zu setzen.

Vergleicht man endlich die vorliegende dritte Auflage mit der zweiten, so wird man sie auch in materieller Beziehung noch um Vieles bereichert finden. Während die zweite Auflage von der numerischen Auflösung der höheren Gleichungen gar nichts enthält, findet man in dieser neuen Auflage die wichtigsten Methoden Newton's, Gräffe's, Horner's zugleich mit den wichtigsten Verbesserungen und Sätzen Fourier's, Sturm's, Cauchy's, Rolle's u. s. w. Eben so ist neu der Uebergang von den allgemeinen (analytischen) Sinus, Kosinus 2c. 2c. zu den besondern (geometrischen) Sinus 2c. 2c.; so wie auch die Gelegenheit benutzt worden ist, der Art und Weise, in welcher schon zu Anfange dieses Jahrhunderts einige französische Mathematiker (in den erstern Bänden des Journal d. math. von Gergonne), in späterer Zeit aber Gauß die imaginäre Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ geometrisch versinnlicht haben, Erwähnung zu thun,

als eines Mittels, welches die geometrische Veranschaulichung mehrerer zusammengesetzterer und deshalb analytisch schwer übersichtlicher Sätze, ermöglicht und das Verständniß derselben wesentlich erleichtert, wenn es auch keinem verständigen Analysten beifallen kann, zu behaupten, daß durch dieses Mittel die „Existenz“ imaginärer „**Größen**“ außer Zweifel gesetzt sei.

Die zwei letzten Kapitel sind ebenfalls ganz neu hinzugefügt; das vorletzte enthält die Zerlegung von *Sin* x, *Cos* x, $\frac{1}{2}(e^x \pm e^{-x})$ in Produkte aus unendlich vielen Faktoren und einige Folgerungen daraus; das letzte Kapitel (über die größern und kleinern imaginären Ausdrücke) ist durch die Fortschritte unserer mathematischen Analysis Bedürfniß und für ein Lehrbuch nothwendig geworden.

Im Uebrigen verweisen wir den Leser noch auf die zu Ende dieses Theiles stehende Schluß-Anmerkung.

Auch über den Druck dieses zweiten Theiles hat Herr Dr. Bremiker an des Verfassers Stelle genaue Aufsicht zu führen die große Güte gehabt, was ich hier noch höchst dankbar anerkennen muß.

Berlin, im Mai 1854.

M. Ohm.

als eines Mittels, welches die geometrische Veranschaulichung mehrerer zusammengesetzter und deshalb analytisch schwer übersichtlicher Sätze, ermöglicht und das Verständniß derselben wesentlich erleichtert, wenn es auch keinem verständigen Analysten beifallen kann, zu behaupten, daß durch dieses Mittel die „Geltung" imaginärer „Größen" außer Zweifel gesetzt sei.

Die zwei letzten Kapitel sind ebenfalls ganz neu hinzugefügt; das vorletzte enthält die Zerlegung von Sin x, Cos x, Log(1+x) in Produkte aus unendlich vielen Faktoren und einige Folgerungen daraus; das letzte Kapitel (über die größern und kleinern imaginären Ausdrücke) ist durch die Fortschritte unserer mathematischen Analysis Bedürfniß und für ein Lehrbuch nothwendig geworden.

Im Uebrigen verweisen wir den Leser noch auf die am Ende dieses Theiles stehende Schluß-Anmerkung.

Auch über den Druck dieses zweiten Theiles hat Herr Dr. Bremiker an des Verfassers Stelle genaue Aufsicht zu führen die große Güte gehabt, was ich hier noch höchst dankbar anerkennen muß.

Berlin, im Mai 1854.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß der ersten Abtheilung des zweiten Theils.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Achtes Kapitel.

Von den natürlichen Potenzen und den daraus hervorgehenden (trigonometrischen) Funktionen. — Von den natürlichen Logarithmen. (§§. 142.—198.)

Neuntes Kapitel.

Zehntes Kapitel.

Von den künstlichen Potenzen und den künstlichen Logarithmen. Von den allgemeinen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. (§§. 209.—228.)

Eilftes Kapitel.

Von den (algebraischen) höhern Gleichungen. (§§. 229.–287.)

Zwölftes Kapitel.

Dreizehntes Kapitel.

Erstes Kapitel.

Von den arithmetischen Progressionen. Von den Faktoriellen. Von den figurirten Zahlen.

Erste Abtheilung.

Von den arithmetischen Progressionen; von den Faktoriellen und Fakultäten.

§. 1. Erklärung.

Eine Reihe von Ausdrücken von der Form

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \quad \text{rc. rc.},$$

wo a und d beliebige Ausdrücke sind, nennt man eine arithmetische Reihe (oder arithmetische Progression), die aus Gliedern besteht; die Zahl d heißt der Unterschied der Glieder, und die Reihe selbst heißt steigend, wenn d positiv, fallend dagegen, wenn d negativ ist. — Uebrigens kann d nicht nur eine positive oder negative Zahl sein, sondern selbst Null oder imaginär, d. h. allgemein.

Ist d negativ und d' das Glied dieser negativen Zahl (also $d=-d'$), so hat die arithmetische Reihe diese Form:

$$a, \quad a-d', \quad a-2d', \quad a-3d', \quad a-4d', \quad \text{rc. rc.},$$

wo d' eine absolute Zahl bedeutet.

§. 2. Lehrsätze.

Ist das n^{te} Glied durch u bezeichnet, die Summe aller n Glieder aber durch s (wo dann das n^{te} Glied u auch das letzte Glied genannt wird), so hat man allemal:

$$\text{I.}\quad u = a + (n-1)d;$$

$$\text{II.}\quad s = (a+u)\frac{n}{2}.$$

Beweis. Die Formel I. fällt in die Augen.

Die Gleichung II. dagegen kann auf folgende Art erwiesen werden. Es ist nämlich

$$s = a+(a+d)+(a+2d)+ \cdots +(u-2d)+(u-d)+u$$

und $$s = u+(u-d)+(u-2d)+ \cdots +(a+2d)+(a+d)+a;$$

folglich, wenn man addirt:

$$2s = (a+u)+(a+u)+(a+u)+ \cdots +(a+u)+(a+u)+(a+u),$$

oder $$2s = (a+u)n;$$

also auch $$s = \frac{(a+u)n}{2} = (a+u)\frac{n}{2}.$$

§. 3.

Daraus folgt:

1) Sind von den vier, in jeder dieser Gleichungen vorkommenden Buchstaben dreie gegeben, so gibt die Gleichung jedesmal den Werth des vierten.

2) In beiden Gleichungen I. und II.) kommen fünf verschiedene Buchstaben a, n, d, u und s vor, von denen drei gemeinschaftlich sind, nämlich a, n und u. Eliminirt man daher jeden dieser drei Buchstaben, einen nach dem andern, so erhält man wiederum folgende Gleichungen:

$$\text{III.}\quad s = [2u-(n-1)d]\cdot\frac{n}{2};$$

$$\text{IV.}\quad s = \frac{(u-a+d)(u+a)}{2d};$$

$$\text{V.}\quad s = [2a+(n-1)d]\cdot\frac{n}{2}.$$

Diese fünf Gleichungen sind deshalb alle von einander wesentlich verschieden, weil jede nur vier der fünf Buchstaben, also den fünften nicht enthält, dieser fünfte aber in jeder Gleichung ein anderer ist. Diese Gleichungen geben unmittelbar den 4ten und 5ten dieser 5 Buchstaben in drei gegebene ausgedrückt.

Anmerkung 1. Alle bis hierher entwickelten Gleichungen sind solche, die aus den Gleichungen I. und II.) abgeleitet sind. Da nun diese beiden Gleichungen selber wieder hervorgehen, wenn man in ihnen statt: $\quad u,\ a,\ d,$
bezüglich $\quad a,\ u,\ -d \quad$ setzt, so kann man durch dieselben Substitutionen die vorliegenden Gleichungen zum Theil auch auseinander ableiten.

Anmerkung 2. Unter den Gleichungen, welche aus I.) und II.) sich ergeben, sind quadratische, und diese geben daher zwei Auflösungen. Welcher von beiden Werthen aber jedesmal der brauchbare ist, muß immer erst durch die besondern Bedingungen der Aufgabe entschieden werden, welche zu diesen quadratischen Gleichungen geführt haben.

§. 4. Erklärung.

Das Produkt

$$a(a+d)(a+2d(a+3d)\cdots[a+(n-1)d],$$

dessen Faktoren n auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe sind, bezeichnet man durch das Zeichen

$$a^{n|d}$$

und nennt dieses Zeichen eine **Faktorielle**, deren **Basis** a, **Exponent** n, und **Differenz** oder **Unterschied** d ist.

Anmerkung. Dieser Definition zu Folge, muß der Exponent n immer eine absolute ganze Zahl und >1 sein, wenn die Faktorielle $a^{n|d}$ eine Bedeutung haben soll. — Auch wird die Faktorielle der Null gleich, sobald einer der Faktoren der Null gleich wird. — Endlich geht die Faktorielle in eine Potenz über, wenn die Differenz d in Null übergeht.

§. 5.

Die Lehrsätze, nach denen mit Faktoriellen gerechnet wird, sind folgende:

1) $a^{n|d} = [a+(n-1)d]^{n|-d}$;

2) $a^{m+n|d} = a^{m|d} \cdot (a+md)^{n|d} = a^{n|d} \cdot (a+nd)^{m|d}$;

3) $a^{m-n|d} = \dfrac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}$;

4) $\dfrac{a^{m|d}}{a^{n|d}} = (a+nd)^{m-n|d}$;

5) $h^m \cdot a^{m|d} = (ha)^{m|hd}$ oder $a^{m|d} = h^m \cdot \left(\dfrac{a}{h}\right)^{m|d}$,

welche hier noch näher erörtert werden mögen.

Lehrsatz 1. Eine Faktorielle $a^{n|d}$ wird in eine andere mit entgegengesetzter Differenz verwandelt, wenn man den um 1 verminderten Exponenten, also $n-1$, mit der Differenz d multiplizirt, solches Produkt zu der Basis a addirt, den Exponenten n als solchen beibehält, die Differenz dagegen mit dem entgegengesetzten Zeichen versieht; d. h. es ist

$$a^{n|d} = [a+(n-1)d]^{n|-d}.$$

Beispiele. So ist z. B.

$$2^{3|4} = [2+(3-1)4]^{3|-4} = 10^{3|-4};$$

die erstere Faktorielle bedeutet nämlich das Produkt $2 \cdot 6 \cdot 10$, die letztere dagegen das Produkt $10 \cdot 6 \cdot 2$. — Eben so ist:

$$2^{5|-\frac{1}{3}} = (\tfrac{2}{3})^{5|\frac{1}{3}},$$

weil die erstere Faktorielle das Produkt $2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$, die andere dagegen das Produkt $\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$ vorstellt. — Ferner ist

$$(-2)^{6|-\frac{3}{4}} = [-2+5 \cdot (-\tfrac{3}{4})]^{6|\frac{3}{4}} = (-\tfrac{23}{4})^{6|\frac{3}{4}} = \frac{8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 23}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}.$$

Auch $4^{4|-1} = 1^{4|1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$ —

Und $2^{3|-5} = (-8)^{3|5} = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48.$ — U. s. w. f.

Beweis. Denn die zweite Faktorielle $[a+(n-1)d]^{n|-d}$ bedeutet genau dasselbe Produkt, als die erste $a^{n|d}$, die Faktoren nur in umgekehrter Ordnung gelesen.

Lehrsatz 2. Zwei Faktoriellen $(a+md)^{n|d}$ und $a^{m|d}$, welche sich an einander anschließen, [d. h. welche eine gemein-

schaftliche Differenz d haben, und von welcher die Basis, als erster Faktor der einen, ebenfalls um d größer *) ist, als der letzte Faktor der andern **)], geben, wenn sie mit einander multiplizirt werden, eine Faktorielle $a^{m+n|d}$ mit der Basis a der andern, derselben Differenz d, und der Summe $m+n$ der Exponenten als Exponent; oder:

Eine Faktorielle $a^{m+n|d}$, deren Exponent $m+n$ als eine Summe angesehen wird, läßt sich in ein Produkt zweier Faktoriellen verwandeln, von denen die eine $a^{m|d}$ das Produkt der ersteren m Faktoren, die andere $(a+md)^{n|d}$ das Produkt der nun noch übrigen n Faktoren ausdrückt; d. h. es ist

$$a^{m+n|d} = a^{m|d}.(a+md)^{n|d} = a^{n|d}.(a+nd)^{m|d}.$$

Beispiele. Man findet danach leicht

$2^{5|1} = 2^{3|1}.5^{2|1}$; $2^{5|-\frac{1}{3}} = 2^{3|-\frac{1}{3}}.1^{2|-\frac{1}{3}}$;

$7^{3|-2}.13^{3|-2} = 13^{3|-2}.7^{3|-2} = 13^{6|-2}$; $1^{8|1} = 1^{3|1}.4^{5|1}$;

$8^{8|-1} = 8^{2|-1}.6^{6|-1}$; $n^{n|-1} = n^{m|-1}.(n-m)^{n-m|-1}$;

$1^{n|1} = 1^{m|1}(1+m)^{n-m|1}$; $5^{3|2}.11^{4|2} = 5^{7|2}$;

$9^{8|-2} = 9^{5|-2}(-1)^{3|-2}$; u. s. w. f.

Lehrsatz 3. Eine Faktorielle $a^{m-n|d}$, deren Exponent als eine Differenz $m-n$ gedacht wird, kann in einen Quotienten zweier Faktoriellen $a^{m|d}$ und $[a+(m-n)d]^{n|d}$, verwandelt werden, wenn man den Divisor so nimmt, daß er

---

*) Wenn hier und in der Folge oft noch vorkommt, daß $a+d$ um d größer sei, als a (oder $a+7d$ um d größer als $a+6d$), so verstehe man darunter, daß zu dem letztern noch d addirt wird, wenn das erstere herauskommen soll. Wäre d allemal positiv und a reell, so wäre in der That $a+d>a$, $a+7d>a+6d$, u. s. w.; aber weil d allgemein, mithin positiv, negativ, imaginär sein kann, so ist $a+d$ nicht nothwendig größer als a, im Sinne des I. Th. §. 45.

**) Dies ist allemal der Fall, so oft die Basis der einen hervorgeht, wenn man von der andern den Exponenten mit der Differenz multiplizirt und das Produkt zu ihrer Basis addirt.

sich an die gegebene Faktorielle $a^{m|d}$ anschließt, und mit ihr multiplizirt, den Dividenden gibt, d. h. es ist

$$a^{m-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}.$$

Beispiele. So findet sich

$$4^{2|1} = \frac{4^{7|1}}{6^{5|1}}; \quad 4^{2|-1} = \frac{4^{7|-1}}{2^{5|-1}};$$

$$(-\tfrac{1}{2})^{3|-2} = \frac{(-\tfrac{1}{2})^{11|-2}}{(-6\tfrac{1}{2})^{8|-2}}; \quad 7^{5|-8} = \frac{7^{8|-8}}{(-33)^{3|-8}}.$$

Es ist nämlich

$$7^{8|-8} = 7\cdot(-1)\cdot(-9)\cdot(-17)\cdot(-25)\cdot(-33)\cdot(-41)\cdot(-49)$$

und $(-33)^{3|-8} = (-33)\cdot(-41)\cdot(-49)$,

so wie $7^{5|-8} = 7\cdot(-1)\cdot(-9)\cdot(-17)\cdot(-25)$;

und da fällt die Richtigkeit des Beispiels sogleich in die Augen.

Beweis fällt aus Lehrsatz 2.) unmittelbar in die Augen.

Oder auch: man dividire die Formel 2.) links und rechts durch $(a+md)^{n|d}$, nachdem man (vorher oder nachher) $m-n$ statt m gesetzt hat, was allemal erlaubt ist, so lange unter $m-n$ noch immer, wie in 2.) unter m, jede beliebige positive ganze Zahl gedacht werden kann.

Lehrsatz 4. Zwei Faktoriellen $a^{m|d}$ und $a^{n|d}$, welche eine gemeinschaftliche Basis a und auch eine gemeinschaftliche Differenz d haben, werden durch einander dividirt, wenn man die Exponenten m und n von einander subtrahirt, die Differenz d beibehält, dagegen die neue Basis dadurch findet, daß man in dem Divisor $a^{n|d}$, den Exponenten n mit der Differenz d multiplizirt und zur Basis a addirt; d. h. es ist

$$\frac{a^{m|d}}{a^{n|d}} = (a+nd)^{m-n|d}.$$

Beispiele. Hiernach ist

$$\frac{3^{8|-2}}{3^{5|-2}} = (-7)^{3|-2}; \quad \frac{4^{5|-\frac{1}{2}}}{4^{3|-\frac{1}{2}}} = 3^{2|-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1^{m|1}}{1^{n|1}} = (1+n)^{m-n|1}; \quad \frac{m^{m|-1}}{m^{n|-1}} = (m-n)^{m-n|-1}; \quad \text{u. s. w. f.}$$

Es ist nämlich $3^{8|-2} = 3\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-7)\cdot(-9)\cdot(-11)$,

und $3^{5|-2} = 3\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)$ und $(-7)^{3|-2} = (-7)\cdot(-9)\cdot(-11)$;

und so fällt die Richtigkeit des ersten Beispiels in die Augen.

Beweis. Multiplizirt man den Ausdruck rechts $(a+nd)^{m-n|d}$, mit dem Divisor $a^{n|d}$, so kommt (nach Lehrsatz 2.) $a^{m|d}$, d. h. der Dividend heraus. Also ist die Formel 4.) richtig.

Oder auch: man dividire die 2.) rechts und links durch $a^{n|d}$, und setze nachgehends $m-n$ statt m, was so lange erlaubt ist, als man sich unter $m-n$, wie in 2.) unter m, jede beliebige ganze Zahl gesetzt denkt.

Lehrsatz 5. Eine Faktorielle $a^{m|d}$, wird mit einer Potenz h^m, welche mit ihr einerlei Exponenten m hat, multiplizirt, wenn man die Basis a und die Differenz d, mit dem Dignanden h multiplizirt, den gemeinschaftlichen Exponenten m dagegen unverändert beibehält.

Oder auch:

Aus einer beliebigen Faktorielle $(ha)^{m|hd}$ kann eine Potenz h^m, welche mit ihr denselben Exponenten m hat, als Faktor herausgerückt werden, wenn man sowohl Basis ha, als auch die Differenz hd, durch den beliebig genommenen Dignanden h dividirt, den Exponenten m dagegen unverändert läßt; d. h. es ist

$$a^{m|d} = h^m \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{m|\frac{d}{h}}.$$

Beispiele. So ist z. B.

$4^3\cdot(\tfrac{3}{4})^{3|-\frac{1}{2}} = (4\cdot\tfrac{3}{4})^{3|-4\cdot\frac{1}{2}} = 3^{3|-2}$; $(-2)^5\cdot(-\tfrac{1}{2})^{5|-1} = 1^{5|2}$;

$(-6)^5\cdot(-\tfrac{1}{2})^{5|\frac{1}{3}} = 3^{5|-2}$; $8^{3|4} = 4^3\cdot2^{3|1}$;

$(-8)^{3|-4} = (-4)^3\cdot2^{3|1}$; $7^{3|-5} = 2^3\cdot(\tfrac{7}{2})^{3|-\frac{5}{2}}$; u. s. w. f.

Beweis. Denn es ist

$$a^{m|d} = a\cdot(a+d)\cdot(a+2d)\cdot\cdots\cdots\cdot[a+(m-1)d];$$

und $$h^m = h\cdot h\cdot h\cdot\cdots\cdots\cdot h;$$

also, wenn man links und rechts multiplizirt:

$$h^m \cdot a^{m|d} = (ha)\cdot(ha+hd)\cdot(ha+2hd) \cdots [ha+(m-1)hd],$$

d. h. $h^m \cdot a^{m|d} = (ha)^{m|hd}$ oder $h^m \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{m|\frac{d}{h}} = a^{m|d}$,

wenn bezüglich $\frac{a}{h}$ und $\frac{d}{h}$ statt a und d gesetzt werden.

Anmerkung. Dieses letztern Lehrsatzes bedient man sich besonders auch dann, wenn eine Faktorielle mit negativer Basis erscheint, z. B. $(-a)^{m|d}$, um sie in eine andere mit positiver Basis zu verwandeln. Da nämlich $(-1)^{2m} = (-1)^m\cdot(-1)^m = 1$ ist, so ist $(-a)^{m|d} = (-1)^m\cdot(-1)\cdot(-a)^{m|d} = (-1)^m\cdot a^{m|-d}$.

Und diese Faktorielle, welche eine negative Differenz $-d$ hat, kann man wieder (nach Nr. 1. §. 340.) in eine andere mit positiver Differenz verwandeln, und man erhält dann

$$(-a)^{m|d} = (-1)^m\cdot(a+d-md)^{m|d}.$$

§. 6.

Auch kann man in einer Faktorielle $a^{m|d}$ bald den ersten Faktor absondern, bald den letzten, so daß man hat:

1) $a^{m|d} = a\cdot(a+d)^{m-1|d}$; oder $a\cdot(a+d)^{n|d} = a^{n+1|d}$;

2) $a^{m|d} = a^{m-1|d}\cdot[a+(m-1)d]$; oder $a^{n|d}\cdot(a+nd) = a^{n+1|d}$.

Beispiele. So zeigt sich

$2^{5|1} = 2\cdot3^{4|1} = 2^{4|1}\cdot6$; $8^{4|-1}\cdot9 = 9^{5|-1}$;

$4\cdot8^{4|-1} = 8^{4|-1}\cdot4 = 8^{5|-1}$; $2^{5|1} = 1\cdot2^{5|1} = 1^{6|1}$; u. s. w. f.

Anmerkung. Was $a^{1|d}$, $a^{0|d}$, $a^{-3|d}$ u. dgl. bedeutet, ist in der Definition des §. 4. nicht enthalten. Will man aber, wie man früher von der ganzen Potenz zur Differenz-Potenz übergegangen ist §§. 67—70. d. I. Th.), jetzt auch von der ganzen Faktorielle zur Differenz-Faktorielle übergehen, so kann man sich dazu wieder der Formel 3.) des §. 5.), nämlich

$$a^{m-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}$$

bedienen, wenn man nur, nachdem die Definition der Differenz-

Faktorielle festgestellt ist, untersucht, 1) ob dieselbe allemal auch wirklich eine Bedeutung, 2) ob sie allemal nur eine einzige, bestimmte Bedeutung habe, und 3) ob die Formeln des §. 5.), nach welchen künftighin mit Faktoriellen operirt wird, auch noch für diese (allgemeinern) Differenz-Faktoriellen gelten.

§. 7. Erklärung.

Das Zeichen $a^{m|d}$, in welchem m eine Differenz $\alpha-\beta$ zweier ganzen Zahlen α und β bedeutet (welche Differenz einer positiven oder einer negativen ganzen Zahl oder der Null gleich sein kann), heiße von nun an Differenz-Faktorielle, und bedeute den Quotienten

$$\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}.$$

Was §. 4. als Faktorielle definirt worden ist, mag von nun an ganze Faktorielle genannt werden.

Anmerkung 1. Es erhellet sogleich, daß (wenn $\alpha>\beta$) die Differenz-Faktorielle zu gleicher Zeit eine ganze Faktorielle sein kann, daß aber dann auch die Bedeutung der Differenz-Faktorielle, (nach §. 5. Nr. 3.), mit der Bedeutung der ganzen Faktorielle zusammenfällt.

Anmerkung 2. Weil, wenn m die Differenz $\alpha-\beta$ vorstellt, man statt m auch die gleichen Differenzen $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$ nehmen kann, so bedeutet, der vorliegenden Erklärung zufolge, die Differenz-Faktorielle $a^{m|d}$ einmal den Quotienten

$$\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}},$$

ein andermal den Quotienten $\dfrac{a^{\alpha+\gamma|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta+\gamma|d}}$,

und dann wiederum den Quotienten $\dfrac{a^{\alpha-\gamma|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta-\gamma|d}}$;

und es fragt sich daher, ob diese drei Bedeutungen jedesmal

in eine und dieselbe fallen, oder von einander verschieden sein können? —

Es ist aber, weil α, β, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, $\alpha-\gamma$ und $\beta-\gamma$, durchaus als absolute (positive) ganze Zahlen angesehen werden müssen (nach §. 5. Nr. 2.):

1) $a^{\alpha+\gamma|d} = a^{\alpha|d}\cdot(a+\alpha d)^{\gamma|d}$,

2) $[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta+\gamma|d} = [a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}\cdot(a+\alpha d)^{\gamma|d}$;

und (nach §. 5. Nr. 3.):

3) $a^{\alpha-\gamma|d} = a^{\alpha|d}:[a+(\alpha-\gamma)d]^{\gamma|d}$,

4) $[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta-\gamma|d} = [a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}:[a+(\alpha-\gamma)d]^{\gamma|d}$;

und dividirt man hier die 1.) durch die 2.), so wie die 3.) durch die 4.), so erhellet, daß rechts die gemeinschaftlichen Faktoren oder die gemeinschaftlichen Divisoren sich wegdividiren, daß also alle drei obigen Bedeutungen von $a^{m|d}$ einander gleich sind.

Es hat also die Differenz-Faktorielle allemal wirklich eine Bedeutung und zugleich auch allemal nur eine einzige, völlig bestimmte; d. h. sie ist allemal nur eindeutig.

§. 8.

Will man aber nun die Bedeutung von

$$a^{1|d}, \quad a^{0|d} \quad \text{und} \quad a^{-\beta|d}$$

wissen, so bemerke man, daß

$$1 = (\alpha+1)-\alpha,$$

$$0 = \alpha-\alpha,$$

und $$-\beta = \alpha-(\alpha+\beta)$$

ist, unter α und β absolute ganze Zahlen gedacht; und daß also (nach §. 7.):

$a^{1|d}$ den Quotienten $\dfrac{a^{\alpha+1|d}}{(a+d)^{\alpha|d}}$,

$a^{0|d}$ den Quotienten $\dfrac{a^{\alpha|d}}{a^{\alpha|d}}$,

und $a^{-\beta|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{(a-\beta d)^{\alpha+\beta|d}}$

vorstellt. — Weil aber (nach §. 6.)

$$a^{\alpha+1|d} = a\cdot(a+d)^{\alpha|d},$$

und (nach §. 5. Nr. 2.)

$(a-\beta d)^{\alpha+\beta|d} = (a-\beta d)^{\beta|d}\cdot a^{\alpha|d}$ ist, so findet sich

demnach 1) $a^{1|d} = a$;

2) $a^{0|d} = 1$;

3) $a^{-\beta|d} = \frac{1}{(a-\beta d)^{\beta|d}} = \frac{1}{(a-d)^{\beta|-d}}$,

wenn man zugleich die Formel (§. 5. Nr. 1.) in Anwendung bringt.

§. 9.

Verallgemeinerung der Lehrsätze des §. 5.

Man muß nun untersuchen, ob die Lehrsätze des (§. 5. Nr. 1—5.) auch noch gelten werden, wenn die dortigen Faktoriellen solche allgemeinere Differenz-Faktoriellen sind,

d. h. wenn m die Differenz $\alpha-\beta$,

und n die Differenz $\gamma-\delta$,

also m+n die Differenz $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$,

und m—n die Differenz $(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)$

bedeuten, und dabei α, β, γ, δ positive ganze Zahlen sind, während diese Differenzen selbst positiven oder negativen ganzen Zahlen oder der Null gleich sein können.

Es bedeutet aber dann (nach §. 7.)

$a^{m|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$

$[a+(m-1)d]^{m|-d}$ den Quotienten $\frac{[a+(\alpha-\beta-1)d]^{\alpha|-d}}{(a-d)^{\beta|-d}}$;

und die Formel §. 5. Nr. 1.) ist offenbar noch jetzt richtig, wenn beide letztern Quotienten einander gleich sind. Weil aber die in

diesen Quotienten vorkommenden Faktoriellen ganze sind, für welche die Formeln des §. 5.) bereits gelten, so kann man in dem letztern Quotienten

$$\frac{[a+(\alpha-\beta-1)d]^{\alpha|-d}}{(a-d)^{\beta|-d}}$$

die Faktoriellen mit der Differenz $-d$, in andere mit der Differenz $-(-d)$, d. h. $+d$ oder d verwandeln (nach §. 5. Nr. 1.), und man erhält statt seiner dann diesen andern:

$$\frac{(a-\beta d)^{\alpha|d}}{(a-\beta d)^{\beta|d}};$$

und daß dieser jetzige Quotient dem erstern gleich ist, d. h. daß wirklich

$$\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}} = \frac{(a-\beta d)^{\alpha|d}}{(a-\beta d)^{\beta|d}} \quad \text{ist,}$$

sieht man augenblicklich ein, sobald man bemerkt, daß die Kreuz-Produkte

$$(a-\beta d)^{\beta|d} \cdot a^{\alpha|d}$$

und

$$(a-\beta d)^{\alpha|d} \cdot [a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d},$$

alle beide (nach §. 5. Nr. 2.)

$$= (a-\beta d)^{\alpha+\beta|d},$$

also auch beide einander gleich sind.

Es gilt also die Formel §. 5. Nr. 1.) auch noch, wenn die Faktoriellen beliebig positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null zum Exponenten haben.

Was §. 5. Nr. 2.) betrifft, so bedeutet jetzt

$a^{m+n|d}$ den Quotienten $\dfrac{a^{\alpha+\gamma|d}}{[a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d]^{\beta+\delta|d}}$,

während

$a^{m|d}$ den Quotienten $\dfrac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$

und

$(a+md)^{n|d}$ den Quotienten $\dfrac{[a+(\alpha-\beta)d]^{\gamma|d}}{[a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d]^{\delta|d}}$

bedeutet; und die Gleichung §. 5. Nr. 2.) ist offenbar noch jetzt richtig, sobald die beiden letztern dieser Quotienten, mit einander multiplizirt, den erstern geben; welche Thatsache jedoch sogleich in die Augen fällt, wenn man Zähler und Nenner des zweiten Quotienten $\frac{\alpha^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$ mit $(a+\alpha d)^{\gamma|d}$ multiplizirt, weil dann der Zähler desselben (nach §. 5. Nr. 2.) in $a^{\alpha+\gamma|d}$, der Nenner aber in

$[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta+\gamma|d}$, d. h. in $[a+(\alpha-\beta)d]^{\gamma|d}\cdot[a+(\alpha+\gamma-\beta)d]^{\beta|d}$ übergeht, welcher sich gegen den Zähler des dritten Quotienten

$$\frac{[a+(\alpha-\beta)d]^{\gamma|d}}{[a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d]^{\delta|d}}$$

aufhebt, wenn in letzterem Zähler und Nenner zugleich mit $[a+(\alpha+\gamma-\beta)d]^{\beta|d}$ multiplizirt wird.

Also gilt auch die Gleichung §. 5. Nr. 2.) noch für diese (allgemeinern) Differenz-Faktoriellen.

Weil ferner

$a^{m|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$,

h^m den Quotienten $\frac{h^\alpha}{h^\beta}$,

und $(ha)^{m|hd}$ den Quotienten $\frac{(ha)^{\alpha|hd}}{[ha+(\alpha-\beta)hd]^{\beta|hd}}$

bedeutet, so wird auch §. 5. Nr. 5.) für Differenz-Faktoriellen noch gelten, weil offenbar die beiden erstern Quotienten mit einander multiplizirt den letztern geben, sobald dieselbe Nr. 5. des §. 5.), welche für ganze Faktoriellen dort schon erwiesen ist, hier bei dem Multipliziren der Zähler und Nenner zu Hilfe genommen wird.

Und weil für Differenz-Faktoriellen, der Satz Nr. 2. des §. 5.), — nämlich daß

$$a^{m+n|d} = a^{m|d}\cdot(a+md)^{n|d}$$

ist, — bereits als wahr anerkannt worden, so erhält man auch

noch, wenn man diese Gleichung abwechselnd durch den einen oder durch den andern der beiden Faktoren rechts dividirt:

$$\frac{a^{m+n|d}}{(a+md)^{n|d}} = a^{m|d}$$

und

$$\frac{a^{m+n|d}}{a^{m|d}} = (a+md)^{n|d},$$

welche die NNr. 3 und 4. des §. 5.) sind, in so ferne in der erstern durchaus m—n statt m, und in der andern zuerst n statt m, und m statt n, und dann in der neu entstehenden Formel m—n statt m gesetzt werden kann, weil m, n, m—n beliebige Differenzen ganzer Zahlen vorstellen, also beliebige andere Differenzen ganzer Zahlen dafür gesetzt werden können *).

Es gelten also alle fünf Nummern des §. 5.) auch dann noch, wenn die dortigen Faktoriellen, solche allgemeine Differenz-Faktoriellen sind, d. h. wenn unter den Exponenten der dortigen Faktoriellen, beliebig bald ganze positive, bald ganze negative Zahlen, bald auch die Null, zu finden sind **).

---

*) Anfänger mögen zuerst u statt m, und v statt n setzen, und dann in den neuen Gleichungen statt u und v wieder das substituiren, was gerade Noth thut, um die Gleichungen 3.) und 4.) des §. 5. genau in der dortigen Gestalt zu erhalten.

**) Es ist nicht möglich, einen Begriff der gebrochenen Faktorielle $a^{m|d}$ (unter der Voraussetzung, daß $m = \frac{\alpha}{\beta}$ ist) hinzustellen, für welchen alle fünf Nummern des §. 5.) noch geltend bleiben. Und namentlich ist der Begriff der gebrochenen Faktorielle, wie solcher in den Anwendungen von Vandermonde, Kramp ꝛc. gebraucht worden, von der Art, daß für diese gebrochenen Faktoriellen nur die Formeln 1.) und 2.), also natürlich auch die mit 2.) zugleich gegebenen NNr. 3. und 4.) des §. 5. noch stattfinden, nicht aber die Formel Nr. 5. §. 5. Ueber gebrochene oder besser, reelle Faktoriellen findet sich das Nöthige im VIII. Theile dieses Werkes.

§. 10.

Weil aber $b = b^{1|d}$ ist, so finden sich sogleich noch folgende, für Differenz-Faktoriellen geltende Formeln, besonders aus Nr. 5. des §. 5.), nämlich

1) $a\cdot(a+d)^{m|d} = a^{m+1|d}$;

2) $a^{m|d}\cdot(a+md) = a^{m+1|d}$;

3) $(-a)^{m|d} = (-1)^m\cdot(+a)^{m|-d} = (-1)^m\cdot(a+d-md)^{m|d}$;

4) $a^{m|d} = a^m\cdot 1^{m|(d:a)}$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{m|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot 1^{m|(db:a)}$;

6) $a^{m|d} = d^m\cdot\left(\frac{a}{d}\right)^{m|1}$;

7) $a^{m|d} = \left(\frac{d}{c}\right)^m\cdot\left(\frac{ac}{d}\right)^{m|c}$;

welche als Uebungsbeispiele für die Anwendung der Formeln 2. und 5. der §§. 5. und 9.) angesehen werden können.

Anmerkung. Es lehren aber diese letztern Sätze NNr. 3—7.), wie man Faktoriellen in andere verwandelt, bloß durch Anwendung der Nr. 5. des §. 5.), welche entweder eine gegebene Basis, oder eine gegebene Differenz haben.

§. 11. Lehrsätze.

Ist m irgend eine Differenz ganzer Zahlen, also eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null, so ist allemal

I. 1) $a^{2m|d} = a^{m|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$;

2) $a^{2m+1|d} = a^{m+1|2d}\cdot(a+d)^{m|2d}$;

II. 1) $a^{3m|d} = a^{m|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$;

2) $a^{3m+1|d} = a^{m+1|3d}\cdot(a+d)^{m|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$;

3) $a^{3m+2|d} = a^{m+1|3d}\cdot(a+d)^{m+1|3d}\cdot(a+2d)^{m|3d}$;

u. s. w. f.

Beweise. Ist m eine positive ganze Zahl, so erhellen diese Sätze un-

mittelbar aus der Definition des §. 4), indem das Produkt von 2m oder 2m+1, oder 3m oder 3m+1 oder 3m+2 Faktoren, in zwei oder drei Produkte zerlegt wird, aus den geraden oder ungeraden, oder aus jedem dritten Faktor zusammengesetzt.

Und ist m einer Differenz $\alpha-\beta$ zweier ganzen Zahlen gleich, oder einer negativen ganzen Zahl $-\gamma$, so ergeben sich diese Sätze, wenn man genau nach §. 9.) verfährt, und dann noch etwas leichter, wenn man $-\gamma$ statt $\alpha-\beta$ setzt und §. 8. N. 3.) in Anwendung bringt, dabei aber nicht vergißt, daß dieselben Formeln für ganze positive Exponenten bereits gelten, also für solche angewandt werden dürfen.

Auch diese Beweise durchzuführen, mag als eine Anzahl von Uebungsbeispielen angesehen, und daher dem Anfänger überlassen werden.

§. 12. Erklärung.

Die Faktorielle $1^{m|1}$ oder $m^{m|-1}$, wo m eine Differenz $\alpha-\beta$ ganzer Zahlen, also positiv oder negativ ganz, oder Null ist, nennen wir insbesondere die m^te^ Fakultät, und es wird solche kürzer durch m! bezeichnet.

Beispiele. Daher ist

$$0!=1;\quad 1!=1;\quad 2!=2;\quad 3!=6;$$
$$4!=24;\quad 5!=120;\quad 6!=720;\quad \text{u. s. w. f.},$$

und

$$(-1)!=\tfrac{1}{0};\quad (-2)!=\tfrac{1}{0};\quad (-3)!=\tfrac{1}{0};\quad \text{u. s. w. f.}$$

So oft man daher mit m! operirt, so oft muß m selbst 0 oder eine ganze positive Zahl sein (nach §. 36. des I. Th.).

§. 13.

Ferner folgt noch (aus §§. 5. und 9. NNr. 1., 3. und 4., und §. 10. Nr. 1. und 2.)

1) $$\frac{(m+n)!}{n!}=(m+n)^{m|-1}=(n+1)^{m|1};$$

2) $$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}=\frac{(m+n)^{m|-1}}{m!}=\frac{(m+n)^{n|-1}}{n!};$$

3) $$\frac{(n+1)!}{n!}=n+1;$$

4) $$(n-1)!=\frac{n!}{n}.$$

Anmerkung. Auch diese Formeln betrachte man bloß als Uebungsbeispiele über die Verwandlung der Ausdrücke, welche Faktoriellen enthalten. Um eine einzige davon näher zu rücken, nehmen wir das erste dieser Beispiele und bemerken, daß $(m+n)!$ statt der Faktorielle $1^{m+n|1}$ oder $(m+n)^{m+n|-1}$, so wie $n!$ statt der Faktorielle $1^{n|1}$ oder $n^{n|-1}$ steht, so daß also

$$\frac{(m+n)!}{n!} = \frac{1^{m+n|1}}{1^{n|1}}, \text{ oder auch } = \frac{(m+n)^{m+n|-1}}{n^{n|-1}} \text{ ist.}$$

Der erstere Quotient $\frac{1^{m+n|1}}{1^{n|1}}$ gibt (nach §. 5. Nr. 4.) sogleich $(1+n)^{m|1}$; und dieses (nach §. 5. Nr. 1.) wiederum $(m+n)^{m|-1}$; welches letztere jedoch auch erhalten worden wäre, wenn man auf obigen zweiten Quotienten $\frac{(m+n)^{m+n|-1}}{n^{n|-1}}$ die Formel des §. 5. Nr. 3.) in Anwendung gebracht hätte.

§. 14. Erklärung.

Den in der Folge sehr oft vorkommenden Quotienten

$$\frac{x^{n|-1}}{n!} \text{ bezeichnen wir durch } x_n,$$

wo x jeden Ausdruck, n aber jede Differenz ganzer Zahlen vorstellt, also jede positive oder negative ganze Zahl oder Null.

In der Folge wird also jedes solche Zeichen, wie z. B. m_n, in dieser Bedeutung genommen, so daß man sich den Quotienten $\frac{m^{n|-1}}{n!}$ darunter vorgestellt denkt; so oft nämlich nicht ausdrücklich das Gegentheil festgesetzt wird.

Beispiele. Es bedeutet also:

7_3 den Quotienten $\frac{7^{3|-1}}{3!}$ oder $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder 35;

7_4 ... . $\frac{7^{4|-1}}{4!}$ oder $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ oder 35;

$(-\frac{1}{2})_2$ den Quotient. $\frac{(-\frac{1}{2})^{2|-1}}{2!}$ oder $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}$ oder $\frac{3}{8}$;

$(-5)_8$ den Quotienten $\frac{(-5)^{8|-1}}{8!}$

oder $\frac{(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ oder 495;

5_1 den Quotienten $\frac{5^{1|-1}}{1!}$ d. h. $\frac{5}{1}$ oder 5;

9_0 den Quotienten $\frac{9^{0|-1}}{0!}$ d h. $\frac{1}{1}$ oder 1;

u. s. w. f.

Auch kann man sich leicht für die Werthe von m_n, je nachdem statt n und statt m nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. ꝛc. gesetzt wird, folgende Tafel bilden:

Für die Werthe	Werthe der Ausdrücke.								
	m_0,	m_1,	m_2,	m_3,	m_4,	m_5,	m_6,	m_7,	m_8, ꝛc.
von m, = 1	1,	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0, ꝛc.
2	1,	2,	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0, ꝛc.
3	1,	3,	3,	1,	0,	0,	0,	0,	0, ꝛc.
4	1,	4,	6,	4,	1,	0,	0,	0,	0, ꝛc.
5	1,	5,	10,	10,	5,	1,	0,	0,	0, ꝛc.
6	1,	6,	15,	20,	15,	6,	1,	0,	0, ꝛc.
7	1,	7,	21,	35,	35,	21,	7,	1,	0, ꝛc.
8	1,	8,	28,	56,	70,	56,	28,	8,	1, ꝛc.
9	1,	9,	36,	84,	126,	126,	84,	36,	9, ꝛc.
10	1,	10,	45,	120,	210,	252,	210,	120,	45, ꝛc.
11	1,	11,	55,	165,	330,	462,	462,	330,	165, ꝛc.
12	1,	12,	66,	220,	495,	792,	924,	792,	495, ꝛc.
13	1,	13,	78,	286,	715,	1287,	1716,	1716,	1287, ꝛc.
14	1,	14,	91,	364,	1001,	2002,	3003,	3432,	3003, ꝛc.
15	1,	15,	105,	455,	1365,	3003,	5005,	6435,	6435, ꝛc.
16	1,	16,	120,	560,	1820,	4368,	8008,	11440,	12870, ꝛc.

Und man bemerkt dabei, daß in diesen Reihen von Zahlen, eine jede derselben die Summe ist, aus der zunächst über ihr, und der dieser letzten am nächsten zur Linken stehenden Zahl.

Auch übe man sich noch an folgenden Beispielen:

$$\left(\frac{p}{q}\right)_5 = \frac{p(p-q)(p-2q)(p-3q)(p-4q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot q^5};$$

$$(-p)_5 = -\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = -(p+4)_5;$$

$$(-n)_2 = \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)_2;$$

$$(-n)_3 = -\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -(n+2)_3;$$

$$(-n)_4 = +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = (n+3)_4;$$

$$(-n)_5 = -\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = -(n+4)_5;$$

$(-n)_6 = +(n+5)_6;$ $(-n)_7 = -(n+6)_7;$ u. s. w.

§. 15.

Aus der Definition des §. 14. in Verbindung mit §. 13. folgt aber:

Sind m und n Null oder positive ganze Zahlen, so hat man:

1) $\frac{(m+n)!}{m!\,n!} = (m+n)_m = (m+n)_n;$

2) $m_n = m_{(m-n)};$

3) $m_m = m_0 = 1;$

4) $m_n = 0$, so oft $n > m$ ist.

5) $0_m = 0$, so lange m nicht Null, aber positiv ganz ist.

Ist aber x ganz allgemein gedacht, so ist doch allemal

6) $x_0 = 1;$

7) $x_1 = x;$ also auch $1_1 = 1$.

Beispiele. So ist:

$7_3 = 7_4;$ $9_2 = 9_7;$ $14_6 = 14_8;$ u. s. w.

Es ist nämlich $9_2 = \frac{9^{2|-1}}{2!} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$, dagegen

$$9_7 = \frac{9^{7|-1}}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 36.$$

Ferner ist

$$9_3 = \frac{9!}{3!\,6!}; \qquad 8_5 = \frac{8!}{5!\,3!}; \qquad 10_3 = \frac{10!}{3!\,7!};$$

es ist nämlich

$$10_3 = \frac{10^{3|-1}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$ dagegen

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, und

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; so wie $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

Dann hat man

$$5_5 = \frac{5^{5|-1}}{5!} = \frac{5!}{5!} = 1; \text{ dagegen}$$

$$3_5 = \frac{3^{5|-1}}{5!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 0.$$

Endlich ist noch

8) $$\left(\frac{p}{q}\right)_n = \frac{p^{n|-q}}{q^n \cdot n!} = \frac{(p+q-nq)^{n|q}}{q^n \cdot n!};$$

9) $$\left(-\frac{p}{q}\right)_n = (-1)^n \cdot \frac{p^{n|q}}{q^n \cdot n!};$$

so wie früher schon

10) $$(-p)_n = (-1)^n \cdot \frac{p^{n|1}}{n!} = (-1)^n \cdot (p+n-1)_n$$

gefunden worden war, wenn nur n eine beliebige ganze positive Zahl oder Null ist, während p und q ganz allgemein sein können.

Beispiele. So findet sich:

$$\left(\frac{7}{4}\right)_5 = \frac{7^{5|-4}}{4^5 \cdot 5!} = \frac{(-9)^{5|4}}{4^5 \cdot 5!};$$

$$\left(-\frac{7}{4}\right)_5 = (-1)^5 \cdot \frac{7^{5|4}}{4^5 \cdot 5!}; \quad \text{u. s. w. f.}$$

Zweite Abtheilung.

Von den figurirten Zahlen.

§. 16. Erklärung.

Nimmt man die arithmetische Reihe

1, 2, 3, 4, 5, ...

und bildet man daraus neue Reihen, so daß ihr erstes Glied immer 1, und jedes n^{te} Glied einer neuen Reihe, gleich ist der

Summe der ersten n Glieder der nächstvorhergehenden Reihe, so erhält man unbegrenzt viele neue Zahlen-Reihen, die man Reihen der figurirten Zahlen, oder auch figurirte Reihen nennt, und zwar bezüglich figurirte Reihen der zweiten, dritten, vierten, etc. etc. m^{ten} Ordnung. Die erste angenommene Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. etc., aus welcher alle abgeleitet sind, nennt man dann auch eine figurirte Reihe der ersten Ordnung, so wie sie auch die Reihe der natürlichen Zahlen genannt wird.

Die Reihen selbst sind in nachstehendem Schema enthalten:

I.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	....
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	....
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	....
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,	....
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792,	....
VI.	1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716,	....
VII.	1,	8,	36,	120,	330,	792,	1716,	3432,	....

u. s. w. f.

§. 17.

Bezeichnet man durch

$$S_m^n$$

die Summe von n ersten Gliedern der figurirten Reihe der m^{ten} Ordnung, so wie das n^{te} Glied derselben Reihe durch

$$T_m^n,$$

so folgt aus dieser Definition, wenn $n>1$, unmittelbar:

$$1)\quad T_m^n = S_{m-1}^n,\ \text{wo}\ m>1,$$

und dabei

$$2)\quad T_m^n = S_m^n - S_m^{n-1};$$

also auch

$$3)\quad S_{m+1}^{n+1} = S_{m+1}^n + S_m^{n+1}.$$

Bezeichnet man durch S_m^1 das erste Glied der Reihe der m^{ten} Ordnung allein; denkt man sich ferner noch oberhalb der

Reihen im Schema, eine Reihe lauter 1, in welcher T_0^n wiederum das n^te^ Glied (also 1), und S_0^n die Summe von n Gliedern (also n selbst) bezeichnet, so gelten diese letztern Formeln auch noch für $n = 1$ und für $m = 1$.

§. 18. Lehrsätze.

Man hat allemal:

$$1)\quad S_1^n = T_2^n = \frac{n^{2|1}}{2!};$$

$$2)\quad S_2^n = T_3^n = \frac{n^{3|1}}{3!};$$

$$3)\quad S_3^n = T_4^n = \frac{n^{4|1}}{4!};$$

u. s. w. f.

und allgemein

$$\text{C})\quad S_m^n = T_{m+1}^n = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!}.$$

Beweise. Die Formel 1.) folgt unmittelbar aus §. 2.)

In Bezug auf die übrigen Formeln versuche man zuerst, ob solche zutreffen, wenn man für n, die erstern Zahlen 2, 3, 4, 5, u. s. w. setzt. Man findet aber aus 2.):

$$S_2^2 = T_3^2 = \frac{2^{3|1}}{3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4;$$

$$S_2^3 = T_3^3 = \frac{3^{3|1}}{3!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10;$$

$$S_2^4 = T_3^4 = \frac{4^{3|1}}{3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20;$$

$$S_2^5 = T_3^5 = \frac{5^{3|1}}{3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35;$$

u. s. w. f.; d. h. die Summen der 2, 3, 4, 5 ersten Glieder der zweiten Ordnung (oder das 2te, 3te, 4te, 5te Glied der dritten Ordnung) finden sich nach der zu erweisenden Formel 2.) bezüglich = 4, 10, 20, 35; und vergleicht man dies mit dem Schema des §. 16.), so findet man, daß diese Resultate zutreffen, für diese erstern Werthe von n.

Aber eben so findet sich (aus 3.):

$$S_3^2 = T_4^2 = \frac{2^{4|1}}{4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5;$$

$$S_3^3 = T_4^3 = \frac{3^{4|1}}{4!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15;$$

$$S_3^4 = T_4^4 = \frac{4^{4|1}}{4!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35;$$

$$S_3^5 = T_4^5 = \frac{5^{4|1}}{5!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70;$$

u. s. w. f.; d. h. die Summen der 2, 3, 4, 5 ersten Glieder der dritten Ordnung (oder das 2te, 3te, 4te, 5te Glied der vierten Ordnung) finden sich nach der zu erweisenden Formel, bezüglich 5, 15, 35, 70, welches wiederum mit dem Schema des §. 16.) zusammentrifft.

Auf dieselbe Weise wird man finden, daß auch die folgenden speziellen Formeln zutreffen, wenn statt n die erstern Zahlen 2, 3, 4, 5 ꝛc. gesetzt werden.

Man sieht daher, wie es bloß darauf ankommt, nachzuweisen, daß dieselben Formeln auch noch zutreffen müssen, wenn man für n (und zuletzt auch für m) nach der Reihe, alle ganzen (positiven) Zahlen setzt; also nachzuweisen, daß, so oft diese Formeln zutreffen, wenn eine (einzige) bestimmte ganze Zahl h statt n gesetzt wird, solche auch allemal zutreffen müssen, so oft man statt n die nächstfolgende ganze Zahl h+1 nimmt.

Gesetzt also, man wüßte, daß für einen einzigen Werth h von n, wirklich zugetroffen hätte, die Gleichung 2.), d. h.

$$S_2^h = T_3^h = \frac{h^{3|1}}{3!},$$

d. h. daß wirklich die Summe von h ersten Gliedern der zweiten Ordnung (oder das h^{te} Glied der 3ten Ordnung) sich gefunden hätte aus der Formel 2.), nämlich aus $\frac{h^{3|1}}{3!}$, so wollen wir nun daraus das nachstehende Glied T_3^{h+1} oder S_2^{h+1} finden. — Es ist aber

$$S_2^{h+1} = S_2^h + T_2^{h+1} = S_2^h + S_1^{h+1};$$

und aus 1.) folgt, weil solche schon erwiesen ist:

$S_1^{h+1} = \frac{(h+1)^{2|1}}{2!}$ und $S_2^h = \frac{h^{3|1}}{3!}$ soll ebenfalls zugetroffen haben; also ist auch

$$S_2^{h+1} = \frac{h^{3|1}}{3!} + \frac{(h+1)^{2|1}}{2!};$$

welches, wenn man beide Brüche dadurch auf gleiche Benennung bringt, daß man Zähler und Nenner des 2ten mit 3 multiplizirt; und wenn man bei dem Addiren der Zähler den gemeinschaftlichen Faktor $(h+1)^{2|1}$ heraussetzt, sogleich

$$S_2^{h+1} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$$

giebt; d. h. man findet dann S_2^{h+1} ebenfalls aus der Formel 2.), wenn $h+1$ statt n gesetzt wird.

Man hat sich also überzeugt, daß wenn die Formel 2.) zutrifft, so oft irgend eine (einzige) Zahl h statt n gesetzt wird, so trifft sie auch ferner zu, wenn man die nächstfolgende ganze Zahl $h+1$ statt n nimmt. Und da sie zugetroffen hat, für $n=5$, so trifft sie also nothwendig zu, wenn $n=6$, aber eben deshalb wieder, wenn $n=7$, und dann auch aus demselben Grunde, wenn $n=8$, u. s. w.; überhaupt wenn statt n nach und nach alle auf einander folgenden ganzen Zahlen gesetzt werden.

So wie nun die Formel 2.) ganz allgemein erwiesen ist, gerade eben so beweist man die Formel 3.). Gesetzt nämlich, es hätte sich ausgemittelt, daß (nicht für jeden Werth von n, sondern) für einen einzigen Werth h von n, sich wirklich gefunden hätte

$$S_3^h = T_4^h = \frac{h^{4|1}}{4!},$$

so hätte man

$$S_3^{h+1} = S_3^h + T_3^{h+1} = S_3^h + S_2^{h+1} = \frac{h^{4|1}}{4!} + \frac{(h+1)^{3|1}}{3!},$$

weil $S_2^{h+1} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$ aus der so eben bewiesenen Formel 2.) hervorgeht. Bringt man aber die beiden letztern Brüche unter einerlei Benennung, und sondert man in den Zählern die gemeinschaftlichen Faktoren ab, so erhält man hieraus:

$$S_3^{h+1} = \frac{h\cdot(h+1)^{3|1} + (h+1)^{3|1}\cdot 4}{4!} = \frac{(h+1)^{3|1}\cdot(h+4)}{4!} = \frac{(h+1)^{4|1}}{4!}.$$

Also findet sich für S_3^{h+1} genau dasselbe, was die Formel 3.) auch gibt, wenn $h+1$ statt n gesetzt wird. Also gilt die Formel 3.) für jede nächstfolgende Zahl $h+1$ statt n, so oft sie für $n=h$ zugetroffen hat. Und weil sie für $n=5$ zugetroffen hat, so gilt sie also für $n=6$, und deshalb wieder für $n=7$, u. s. f. für alle ganzen Zahlen, welche der Reihe nach statt n gesetzt werden.

Eben so wird nun die Formel 4.) allgemein erwiesen; u. s. w. f.

Aber eben wenn nun diese frühern Formeln 1.–4.) allgemein für jedes positive ganze n erwiesen sind, so trifft die allgemeine Formel (ℭ) wieder zu, so oft 1, 2, 3, 4 statt m gesetzt wird, weil sie dann in die Formeln 1.–4.) übergeht, deren allgemeine Giltigkeit bereits anerkannt ist. Um daher zu zeigen, daß die Formel (ℭ) für alle ganzen Zahlen von n und m richtig sein müsse, zeige man nur wieder, daß sie allemal richtige Resultate liefert, wenn die nächstfolgende Zahl k+1 statt m gesetzt wird, so oft sie für eine (einzige) gewisse Zahl k statt m gesetzt, in ein als richtig bekanntes Resultat übergeht.

Gesetzt also, man hätte bereits gefunden, daß nicht für jeden Werth von m, sondern nur für einen (einzigen) bestimmten Werth k von m, die Formel (ℭ) wirklich zutreffe, so daß man hat

$$\alpha)\qquad S_k^h = \frac{h^{k+1|1}}{(k+1)!};$$

gesetzt ferner, daß nicht für jeden Werth von n, sondern für einen einzigen Werth h von n, die Formel für die k+1[te] Ordnung ebenfalls zutreffe, also daß richtig sei

$$\beta)\qquad S_{k+1}^h = \frac{h^{k+2|1}}{(k+2)!},$$

so hat man sogleich, genau wie vorher verfahrend (nach §. 17. Nr. 3.)

$$S_{k+1}^{h+1} = S_{k+1}^h + S_k^{h+1} = \frac{h^{k+2|1}}{(k+2)!} + \frac{(h+1)^{k+1|1}}{(k+1)!},$$

nach den hier gemachten Voraussetzungen α. und β.)

Wenn man nun des zweiten Quotienten Zähler und Nenner mit k+2 multiplizirt, um beide Quotienten auf einerlei Benennung zu bringen, und wenn man ferner von dem Dividenden des erstern Quotienten den ersten Faktor h absondert, so giebt die letztere Gleichung

$$\gamma)\quad S_{k+1}^{h+1} = \frac{(h+1)^{k+1|1}(h+k+2)}{(k+2)!} = \frac{(h+1)^{k+2|1}}{(k+2)!}.$$

Weil aber diese Formel auch aus der zu erweisenden (ℭ) hervorgeht, so trifft demnach diese Formel (ℭ) allemal zu für die Summe von h+1 Gliedern in der k+1 Ordnung, so oft sie für die Summe von h Gliedern in derselben Ordnung zutrifft, und dabei für die vorhergehende k[te] Ordnung bereits als allgemein wahr anerkannt ist. Da sie nun für n = h = 2 liefert

$$S_{k+1}^2 = T_{k+2}^2 = \frac{2^{k+2|1}}{(k+2)!} = \frac{(k+3)!}{(k+2)!} = k+3;$$

dieses aber nach der Ansicht des Schema des §. 16.) ein richtiges Resultat ist, so gilt dieselbe Formel also auch noch für n = 3, und dann auch für n = 4, so wie für alle ganze Zahlen, welche nach und nach statt n gesetzt werden.

Es liefert also die Formel (☾) für S^n_{k+1} ein völlig richtiges Resultat, so oft sie für S^n_k ein solches liefert. Da sie nun für S^n_2, S^n_3 richtige Resultate liefert, wie solches bereits erwiesen ist, so liefert sie also allemal richtige Resultate, wenn nach und nach alle ganze Zahlen statt m gesetzt werden.

Anmerkung. Nach §. 17. gilt die Formel ☾) auch noch, wenn $n = 1$, so wie auch noch, wenn $m = 0$.

§. 19.

Bringt man hiermit die frühern Formeln der Faktoriellen und Fakultäten in Verbindung, so lassen sich diese Formeln des vorhergehenden Lehrsatzes auch so schreiben:

1) $T^n_0 = 1 = \frac{n^{0|1}}{0!}$;

2) $T^n_1 = S^n_0 = n = \frac{n^{1|1}}{1!} = \frac{n^{1|-1}}{1!} = n_1 = n_{n-1} = \frac{n^{n-1|-1}}{(n-1)!}$
$= \frac{2^{n-1|1}}{(n-1)!}$;

3) $T^n_2 = S^n_1 = \frac{n^{2|1}}{2!} = \frac{(n+1)^{2|-1}}{2!} = (n+1)_2 = (n+1)_{n-1}$
$= \frac{(n+1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{3^{n-1|1}}{(n-1)!}$;

4) $T^n_3 = S^n_2 = \frac{n^{3|1}}{3!} = \frac{(n+2)^{3|-1}}{3!} = (n+2)_3 = (n+2)_{n-1}$
$= \frac{(n+2)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{4^{n-1|1}}{(n-1)!}$;

5) $T^n_4 = S^n_3 = \frac{n^{4|1}}{4!} = \frac{(n+3)^{4|-1}}{4!} = (n+3)_4 = (n+3)_{n-1}$
$= \frac{(n+3)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{5^{n-1|1}}{(n-1)!}$;

und allgemein:

$$\odot)\quad T^n_m = S^n_{m-1} = \frac{n^{m|1}}{m!} = \frac{(n+m-1)^{m|-1}}{m!} = (n+m-1)_m$$

$$= (n+m-1)_{n-1} = \frac{(n+m-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{(m+1)^{n-1|1}}{(n-1)!}.$$

Schluß-Anmerkung.

Es sind aber die hier eben betrachteten figurirten Reihen, spezielle Fälle nur, der sogenannten arithmetischen Reihen der höhern Ordnungen, welche im 8ten Theil dieses Werkes näher betrachtet sind. Jene Betrachtungen, eben weil sie von einem allgemeinern Standpunkte ausgehen, werfen dann auf das hier Vorgetragene in so ferne noch das nöthige Licht, als man den Zusammenhang der verschiedenen Betrachtungen gehörig in das Auge fassen und den erfindenden analytischen, von dem hier befolgten begründenden synthetischen Gange immer mehr unterscheiden lernen kann.

Zweites Kapitel.

Die kombinatorische Analysis in ihren ersten Elementen.

Erste Abtheilung.

Von den Permutationen, kombinatorischen Variationen und Kombinationen.

§. 20. Erklärung.

Eine [logische *)] Verbindung mehrer, durch Buchstaben oder andere Zeichen repräsentirten Elemente, ist ohne Wiederholungen (z. B. abcd), wenn dasselbe Element nicht zwei oder mehrere Male in ihr vorkommt; außerdem aber ist sie eine Verbindung mit Wiederholungen (z. B. aab oder bab). — Die gegebenen Elemente in einer bestimmten Ordnung neben einander geschrieben, bilden den Zeiger oder Index, und eine Verbindung heißt wohlgeordnet, wenn in ihr kein im Zeiger später folgendes Element einem frühern vorangeht; (z. B. adef oder addg, aber nicht daef, oder dadg, u. s. w.; wenn nämlich a, b, c, d, e, f, g 2c. der Zeiger ist).

Anmerkung 1. Die Verbindungen gegebener Elemente zu bilden, gehört übrigens nicht der Mathematik, sondern der Logik zu. — Wohl aber ist es eine Anwendung der Zahlenlehre, die Anzahl der Verbindungen a priori zu bestimmen, welche aus

*) D. h. eine Verbindung von noch völlig unbestimmter Art, so daß die Elemente z. B. noch eben so gut addirt, als auch mit einander multiplizirt gedacht werden können.

gegebenen Elementen, die auf eine bestimmte Weise mit einander verbunden werden sollen, hervorgehen.

Anmerk. 2. Ist kein Zeiger bemerkt, sind dagegen die Elemente durch Buchstaben oder durch numerische ganze Zahlen dargestellt, so setzt man immer voraus, daß der Zeiger die Buchstaben in der Ordnung des Alphabets, die Zahlen dagegen in ihrer natürlichen Folge anzugeben hat.

Anmerk. 3. Die Verbindungen selbst heißen auch bezüglich: Unionen, Binionen oder Amben, Ternionen oder Ternen, Quaternionen oder Quaternen, Quinternen oder Quinen u. s. w. f., je nachdem sie aus einem, zwei, drei, vier, fünf, oder mehr Elementen bestehen.

§. 21. Erklärung.

Eine gegebene Verbindung, z. B. abc oder aabccd, heißt permutirt oder versetzt, wenn man dieselben Elemente in allen möglichen Anordnungen zu neuen Verbindungen vereinigt hat. Das Schema aller solchen entstandenen Verbindungen heißt dann eine zweite, dritte, vierte ꝛc. ꝛc. oder m^te· Permutations-Klasse, je nachdem die gegebene Verbindung aus 2, 3, 4, oder m Elementen besteht. Eine solche Permutations-Klasse endlich wird bezeichnet durch

$$\overset{3}{P}(abc) \quad \text{oder} \quad \overset{6}{P}(aabccd);$$

indem man über den Buchstaben P die Klassenzahl schreibt, d. h. die Anzahl der Elemente, die permutirt werden sollen.

Beispiele. Man findet:

$\overset{3}{P}$ (abc)	$\overset{5}{P}$ (aabbb)	$\overset{4}{P}$ (abcd)	
abc	aabbb	abcd	cabd
acb	ababb	abdc	cadb
bac	abbab	acbd	cbad
bca	abbba	acdb	cbda
cab	baabb	adbc	cdab
cba	babab	adcb	cdba
	babba	bacd	dabc
	bbaab	badc	dacb
	bbaba	bcad	dbac
	bbbaa	bcda	dbca
		bdac	dcab
		bdca	dcba.

§. 22. Erklärung.

Ist eine Anzahl z. B. m von Elementen

a, b, c, d, e, ꝛc. ꝛc.

gegeben, und denkt man sich diese Elemente erst paarweise, dann zu dreien, zu vieren u. s. w. auf alle mögliche Weise und in jeder möglichen Anordnung der Elemente mit einander verbunden, so erhält man durch Aufzählung aller dieser Verbindungen die kombinatorischen Variationen aus diesen m Elementen, und zwar die zweite, dritte, vierte, ꝛc. ꝛc. n^{te} Klasse derselben, je nachdem die Verbindungen aus 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc. oder n Elementen bestehen.

Die Variationen sind mit oder ohne Wiederholungen, je nachdem die Verbindungen zu der erstern oder zu der andern Art gehören.

Die Variationen bezeichnet man mit dem Buchstaben V des größern lateinischen Alphabets mit untergesetztem Zeiger, und, wenn eine bestimmte Klasse ausgedrückt werden soll, mit überschriebener Klassenzahl.

Dabei bezeichnet dasselbe V mit einem Strich, nämlich V`, Variationen mit Wiederholungen, dagegen das bloße V, ohne Strich, allemal Variationen ohne Wiederholungen.

Diesem nach wird die Bedeutung der Zeichen

$$\overset{n}{V`}_{(a,\, b,\, c,\, \cdots)} \quad \text{und} \quad \overset{n}{V}_{(1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \cdots\, m)}$$

unmittelbar erkannt.

Man kann sich auch eine erste Klasse denken.

§. 23. Aufgabe.

Aus gegebenen Elementen a, b, c, ⋯ die Variationen mit Wiederholungen zu entwickeln.

Auflösung. 1) Man schreibe die gegebenen Elemente, durch Kommata getrennt, hin, so hat man die erste Klasse.

2) Jedem dieser Elemente setze man jedes Element vor, so hat man die zweite Klasse.

3) Jeder Verbindung dieser zweiten Klasse setze man jedes Element vor, so gibt dies die dritte Klasse.

4) So fahre man fort, einer jeden Verbindung irgend einer Klasse jedes Element vorzusetzen, und allemal erhält man die nächstfolgende Klasse; und zwar in's Unendliche fort.

§. 24.

Durch dasselbe Verfahren erhält man auch die Variationen ohne Wiederholungen, wenn bei dem jedesmaligen Vorsetzen der einzelnen Elemente, jede Verbindung übergangen wird, welche dieses Element schon enthält. Hier erhält man aber nur so viele Klassen, als Elemente gegeben sind, und die letzte Klasse muß allemal eine reine Permutations-Klasse sein.

Beispiele.

$\overset{1}{V'}$ (a, b, c)	a, b, c	$\overset{1}{V}$ (a, b, c)	a, b, c
$\overset{2}{V'}$ (a, b, c)	aa, ab, ac ba, bb, bc ca, cb, cc	$\overset{2}{V}$ (a, b, c)	ab, ac ba, bc ca, cb
$\overset{3}{V'}$ (a, b, c)	aaa, aab, aac aba, abb, abc aca, acb, acc baa, bab, bac bba, bbb, bbc bca, bcb, bcc caa, cab, cac cba, cbb, cbc cca, ccb, ccc	$\overset{3}{V}$ (a, b, c)	abc, acb bac, bca cab, cba
$\overset{4}{V'}$ (a, b, c)	aaaa, aaab, aaac aaba, ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ꝛc.		

§. 25. Erklärung.

Da die Variationen alle möglichen Verbindungen mit allen möglichen Anordnungen der Elemente enthalten, so muß in ihnen

jede wohlgeordnete Verbindung zugleich mit allen ihren Permutationen oder Versetzungen vorkommen. — Sondert man nun diese wohlgeordneten Verbindungen ab, und wirft alle übrigen weg, so erhält man durch Aufzählung aller dieser Verbindungen, die Kombinationen der gegebenen Elemente, und zwar ebenfalls mit oder ohne Wiederholungen, die dann auch wieder in Klassen und zwar in die erste, zweite, dritte, ꝛc., n^{te} Klasse getheilt werden.

Die Kombinationen bezeichnet man durch den Buchstaben des größern lateinischen Alphabets C mit übergesetzter Klassenzahl und untergesetztem Zeiger; und man fügt noch überdies einen Strich zur Rechten bei, wenn man Kombinationen mit Wiederholungen bezeichnen will, während das bloße C (ohne Strich), allemal Kombinationen ohne Wiederholungen ausdrückt.

Die Zeichen

$$\overset{n}{C'}_{(a,\,b,\,c,\,d,\,\cdots)} \quad \text{und} \quad \overset{n}{C}_{(a,\,b,\,c,\,d,\,\cdots)}$$

haben dann eine völlig bestimmte Bedeutung.

§. 26.

Es erhellet sogleich aus dieser Erklärung, daß man durch das §. 23.) gelehrte Verfahren für Variationen, auch alle Kombinationen aus gegebenen Elementen erhalten wird, wenn man bei dem jedesmaligen Vorsetzen der Elemente darauf sieht, einer Verbindung kein späteres Element vorzusetzen, als das Anfangs-Element dieser Verbindung ist. — Zugleich erhält man die Verbindungen mit Wiederholungen ohne weitere Vorsicht, dagegen diejenigen ohne Wiederholungen, wenn man bei dem Vorsetzen der einzelnen Elemente auch noch diejenigen Verbindungen übergeht, welche dasselbe Anfangs-Element haben, als das vorzusetzende ist.

Beispiele. Kombinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d.

$\overset{1}{C}'$ (a, b, c, d)	a,	b,	c,	d
$\overset{2}{C}'$ (a, b, c, d)	aa,	ab,	ac,	ad
		bb,	bc,	bd
			cc,	cd
				dd
$\overset{3}{C}'$ (a, b, c, d)	aaa,	aab,	aac,	aad
		abb,	abc,	abd
			acc,	acd
				add
		bbb,	bbc,	bbd
			bcc,	bcd
				bdd
			ccc,	ccd
				cdd
				ddd
$\overset{4}{C}'$ (a, b, c, d)	aaaa,	aaab,	aaac,	aaad
		aabb,	ꝛc.	ꝛc.
			ꝛc.	ꝛc.
				ꝛc.
		bbbb,	bbbc,	ꝛc.
			ꝛc.	ꝛc.

Kombinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d, e.

$\overset{1}{C}$ (a, b, c, d, e)	a,	b,	c,	d,	e
$\overset{2}{C}$ (a, b, c, d, e)		ab,	ac,	ad,	ae
			bc,	bd,	be
				cd,	ce
					de
$\overset{3}{C}$ (a, b, c, d, e)			abc,	abd,	abe
				acd,	ace
					ade
				bcd,	bce
					bde
					cde
$\overset{4}{C}$ (a, b, c, d, e)				abcd,	abce
					abde
					acde
					bcde
$\overset{5}{C}$ (a, b, c, d, e)					abcde

Anmerkg. Bei den Kombinationen mit Wiederholungen geht die Zahl der Klassen in's Unendliche fort; dagegen gibt es bei denen ohne Wiederholungen nie mehr Klassen, als Elemente gegeben sind, und die höchste Klasse enthält nur eine einzige Verbindung, welche aus der wohlgeordneten Verbindung aller gegebenen Elemente besteht.

§. 27. Lehrsätze.

Bezeichnet man die Anzahl der Verbindungen einer Permutations-, Variations-, oder Kombinations-Klasse, durch ein dem Zeichen der Klasse vorgesetztes

Ns. (numerus specierum)

und drücken Zeichen, wie a^α, b^β und dergl., wenn sie im Zeiger vorkommen, (nicht Potenzen, sondern) bloß aus, daß das Element a, αmal und das Element b, βmal 2c. 2c. wiederholt sein soll, so gelten folgende Formeln:

I. $$\text{Ns. } \overset{m}{P}(a, b, c, d, \cdots) = m! \;;$$

II. $$\text{Ns. } \overset{m}{P'}(a^\alpha, b^\beta, c^\gamma \cdots) = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\cdots};$$

III. $$\text{Ns. } \underset{(a, b, c \cdots)}{\overset{n}{V}} = m^{n|-1} = [m-(n-1)]^{n|1};$$

IV. $$\text{Ns. } \underset{(a, b, c \cdots)}{\overset{n}{V'}} = m^n \;;$$

V. $$\text{Ns. } \underset{(a, b, c \cdots)}{\overset{n}{C}} = \frac{m^{n|-1}}{n!} = m_n \;;$$

VI. $$\text{Ns. } \underset{(a, b, c \cdots)}{\overset{n}{C'}} = \frac{m^{n|1}}{n!} = \frac{[m+(n-1)]^{n|-1}}{n!} = [m+(n-1)]_n \;;$$

wo überall m die Anzahl der Elemente des Zeigers ausdrückt.

Beweis von I.

1. Zwei Elemente a und b lassen zwei Versetzungen zu: ab und ba.

2. Bei drei Elementen kann jedes das erste sein, und weil dann die beiden andern immer noch zwei Versetzungen zulassen, so erhält man 2·3 Versetzungen oder 3! Versetzungen für 3 Elemente.

3. Bei m+1 Elementen kann jedes das erste sein; lassen dann die m übrigen Elemente immer m! Versetzungen zu, so erhält man für alle (m+1) Elemente (m+1)! Versetzungen.

4. Die Formel I.) gilt also allemal für die nächstfolgende Zahl, sobald sie für irgend eine bestimmte Zahl gilt; und da sie für $m = 2$ und $m = 3$ statt hat, so hat sie dann nothwendig auch für jede absolute ganze Zahl statt, die für m genommen werden kann.

Beweis von II.

1. Man denke sich alle m Elemente verschieden, so lassen sie m! Versetzungen zu, welche man sich als wirklich entwickelt vorstellen kann.

2. Von diesen Verbindungen, die aus m von einander verschiedenen Elementen bestehen, nehme man eine beliebige heraus, und in ihr wieder beliebige Elemente in beliebigen Stellen, deren Anzahl α sein mag; nehme dann von diesen α Elementen alle Versetzungen (deren Anzabl $= \alpha!$), und denke sich dabei die übrigen Elemente der herausgehobenen Verbindung in ihren Stellen verbleibend, so entstehen aus der herausgehobenen Verbindung eine Zahl $\alpha!$ von Verbindungen, welche nothwendig alle, unter allen Verbindungen in Nr. 1.) enthalten sein müssen.

3. Es läßt sich daher die ganze m^{te} Klasse (in Nr. 1.) in Parthien theilen, so daß jede Partie aus $\alpha!$ Verbindungen besteht, welche sich bloß durch Versetzungen der α herausgehobenen Elemente von einander unterscheiden, und daher in eine einzige Verbindung zusammenfallen, sobald diese α Elemente nicht mehr als verschieden, sondern als dieselben gedacht werden.

4. Die Anzahl dieser Partien ist nun unstreitig $= \frac{m!}{\alpha!}$, und so groß also auch die Anzahl der Verbindungen, die man erhält, wenn unter den m Elementen eine Anzahl α derselben, bloße Wiederholungen sind, weil dann jede Partie in eine einzige Verbindung zusammenfällt.

5. Diese $\frac{m!}{\alpha!}$ Verbindungen kann man nun aber wiederum in Partien abtheilen, so daß die Verbindungen in jeder Partie sich nur durch Versetzung von β ihrer Elemente, während die übrigen in ihren Stellen verbleiben, von einander unterscheiden; welche daher, sobald diese β Elemente bloße Wiederholungen werden, in eine einzige zusammenfallen.

6. Sobald daher β dieser Elemente bloße Wiederholungen sind, dagegen

von den vorigen verschieden, so gibt es wieder nur so viele Verbindungen, als es (in Nr. 5.) Parthien von Verbindungen gab, nämlich

$$\frac{m!}{\alpha!}:\beta! \quad \text{oder} \quad \frac{m!}{\alpha!\,\beta!}.$$

7. So fortfahrend fällt die Richtigkeit des Lehrsatzes in die Augen.

Beweis von III.

1. Die Anzahl der Verbindungen der ersten Klasse ist unstreitig $=m$, also auch $=m^{1|-1}$.

2. Um die zweite Klasse zu erhalten, wird jedes Element den übrigen $m-1$ Elementen vorgesetzt (weil keine Wiederholungen vorkommen sollen), und daher die Anzahl der Verbindungen der zweiten Klasse $=m(m-1)=m^{2|-1}$.

3. Um die dritte Klasse zu erhalten, werden allen Verbindungen der zweiten Klasse die $m-2$ übrigen Elemente vorgesetzt, die sie nicht schon hat; folglich die Anzahl aller Verbindungen der dritten Klasse

$$=m(m-1)(m-2)=m^{3|-1}.$$

4. Gesetzt es sei die Anzahl aller Verbindungen der p^{ten} Klasse $=m^{p|-1}$, so wird man daraus alle Verbindungen der $p+1^{ten}$ Klasse erhalten, wenn man jeder der p^{ten} Klasse, die übrigen $m-p$ Elemente vorsetzt, die sie nicht schon enthält (damit keine Wiederholungen entstehen); folglich ist dann die Anzahl der Verbindungen der $p+1^{ten}$ Klasse $=m^{p|-1}\cdot(m-p)=m^{p+1|-1}$.

5. Gilt also die Formel III.) für $n=p$, so gilt sie auch allemal für die nächstgrößere Zahl $p+1$, die statt n gesetzt wird. Da sie nun gilt für $n=2$ und auch für $n=3$, so gilt sie auch für $n=4$, $n=5$, u. s. w., überhaupt für jede absolute ganze Zahl, die statt n gesetzt werden mag.

Beweis von IV. fällt unmittelbar in die Augen.

Beweis von V.

Weil die Kombinationen lauter Verbindungen ohne Wiederholungen haben, und jede Verbindung der n^{ten} Klasse demnach aus n verschiedenen Elementen besteht, so läßt jede Verbindung der n^{ten} Klasse, $n!$ Versetzungen zu. Weil nun die n^{te} Klasse der Variationen erhalten wird, wenn man dieselbe Klasse der Kombinationen zugleich mit allen Versetzungen ihrer Verbindungen nimmt, so muß man die Anzahl der Verbindungen der n^{ten} Kombinations-Klasse erhalten, wenn man die Anzahl derer der Variations-Klasse noch durch die Versetzungszahl, d. h. durch $n!$ dividirt; weshalb sich diese gesuchte Zahl $=\frac{m^{n|-1}}{n!}$ ergibt.

Beweis von VI.

Um diesen Beweis anschaulicher zu machen, bemerke man zuvörderst Folgendes:

Stellt f(m) die Anzahl der Verbindungen vor, einer n^{ten} Klasse der Variationen oder Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen aus den m Elementen a, b, c d ⋯ entwickelt und will man wissen, wie viele darunter sind, welche das Element a nicht enthalten, so darf man nur m−1 statt m setzen; d. h. f(m−1) drückt die Zahl der Verbindungen derselben Klasse aus, die das Element a gar nicht enthalten. — Denkt man sich nämlich das Element a ganz weg, so bleiben m−1 Elemente, und die n^{te} Klasse aus diesen, welche f(m−1) Verbindungen haben wird, muß dann nothwendig alle diejenigen Verbindungen enthalten, welche in derselben n^{ten} Klasse aus allen m Elementen entwickelt, vorkommen, dabei aber das Element a nicht enthalten.

Auf dieselbe Weise erhält man f(m−2) für die Anzahl der Verbindungen in der n^{ten} Klasse aus allen m Elementen, die weder a noch b enthalten. Nicht minder erhält man für die Anzahl der Verbindungen in derselben Klasse, die weder a, noch b, noch c, enthalten, die Zahl f(m−3); u. s. w. f.

Dies vorausgesetzt, kann man nun schließen:

1. Die erste Klasse hat m Elemente, also m oder $\frac{m^{1|1}}{1!}$ Verbindungen, welche Zahl auch durch T_1^m ausgedrückt ist (§. 19.)

2. Aus der Art, wie diese Klassen entwickelt werden, folgt aber ferner, daß die Zahl der Verbindungen der 2ten Klasse sein muß

$$= T_1^m + T_1^{m-1} + T_1^{m-2} + \cdots + T_1^1,$$

oder S_1^m, oder $\frac{m^{2|1}}{2!}$, oder T_2^m (§. 16. und §. 19.)

3. Aus demselben Grunde muß dann die Zahl der Verbindungen der dritten Klasse sein

$$= T_2^m + T_2^{m-1} + T_2^{m-2} + \cdots + T_2^1,$$

oder S_2^m, oder $\frac{m^{3|1}}{3!}$, oder T_3^m.

4. Nicht weniger ist dann die Anzahl der Verbindungen der vierten Klasse

$$= T_3^m + T_3^{m-1} + T_3^{m-2} + \cdots + T_3^1 = S_3^m = \frac{m^{4|1}}{4!} = T_4^m.$$

5. Ist endlich die Anzahl der Verbindungen in der p^{ten} Klasse

$= S^m_{p-1} = T^m_p$, so ist die Anzahl der Verbindungen der p+1ten Klasse

$$= T^m_p + T^{m-1}_p + T^{m-2}_p + \ldots + T^1_p = S^m_p = T^m_{p+1}$$

oder $= \frac{m^{p+1|1}}{(p+1)!}$ [wie aus der Art der Entwicklung der Klassen hervorgeht (§. 26.)].

6. Gilt also die Formel VI.) für irgend eine bestimmte Zahl, die statt n gesetzt wird, so gilt sie dann nothwendig auch für die nächstgrößere Zahl; und da sie gilt für $n = 2$, $n = 3$, so gilt sie nothwendig auch für $n = 4$, $n = 5$, überhaupt für alle absoluten ganzen Zahlen, die statt n gesetzt werden.

§. 28.

1) Die Buchstaben α, β, γ, 2c. in (§. 27. II.) nennt man auch Wiederholungs-Exponenten.

2) Die Formel II. §. 27.) gilt auch dann noch, wenn einer der Wiederholungs-Exponenten Null oder 1 ist, wenn man nur annimmt, daß das Element (der Buchstabe), auf den sich der Wiederholungs-Exponent bezieht, im erstern Fall gar nicht, im andern Fall aber nur einmal vorkommt.

§. 29. Erklärung.

Nimmt man zu Elementen die Null und beliebige numerische Zahlen, und zählt man alle Verbindungen aus zwei, drei, vier 2c. oder n der gegebenen Elemente auf, so aber, daß in jeder Verbindung die Summe aller Elemente $= m$ ist, so hat man die Variationen oder die Kombinationen zur bestimmten Summe m, je nachdem alle Verbindungen zugleich mit allen Anordnungen ihrer Elemente, oder bloß die wohlgeordneten Verbindungen genommen werden.

Auch diese Variationen und Kombinationen theilt man noch in Klassen, nach der Zahl der Elemente, die in den Verbindungen vorkommen, und die Bezeichnung dieser Variationen und Kombinationen unterscheidet sich dadurch nur von der §§. 22. und 26.)

angegebenen, daß zur Linken noch die bestimmte Summe beigeschrieben wird.

Auch werden wir bei diesen Variationen und Kombinationen zur bestimmten Summe, hier bloß solche mit Wiederholungen näher betrachten, daher immer nur solche verstehen.

Die Bedeutung der Zeichen

$$ {}^{m}\overset{n}{V}' \qquad {}^{m}\overset{n}{C}' $$

ist demzufolge nicht zu verkennen.

§. 30.

Man erhält daher die n[te] Klasse der Variationen zur bestimmten Summe m, wenn man in der n[ten] Kombinations-Klasse zur Summe m aus denselben Elementen, jede Verbindung mit allen ihren Versetzungen nimmt. — Umgekehrt ist es auch nicht schwer, die letztere aus der ersteren abzuleiten.

§. 31. Aufgabe.

Die n[te] Klasse der Variationen zur Summe m zu entwickeln, aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ...

Auflösung. 1) Man schreibe n—1 Nullen nebeneinander und in die n[te] Stelle die Zahl m, so hat man die erste Verbindung.

2) Aus jeder gefundenen Verbindung wird die nächstfolgende so abgeleitet:

α) Ist das letzte Element >0, so vermindere man es um 1, und vermehre dagegen das nächstvorhergehende um eben so viel; z. B. auf 0004 folgt 0013.

β) Ist dies letzte Element oder sind vom Ende ab mehrere Elemente $=0$, so erhöhe man von der letzten Null zur Linken ab, das nächstzweite Element um 1, lasse die Ziffern neben der erhöhten linker Hand unverändert, in die Stellen rechter Hand aber setze man durchgehends 0, bis auf die letzte Stelle, in welche die Ergänzung zur bestimmten Summe

m kommt; z. B. nach 12200 kommt unmittelbar 13001; auf 3100 folgt 4000.

γ) Gibt es keine zweite Ziffer zur Linken der in β.) gedachten Null, welche noch erhöht werden könnte, so ist diese Verbindung die letzte in ihrer Klasse.

§. 32.

Wollte man dieselbe Klasse zu derselben Summe aus den Elementen 1, 2, 3, ⋯ entwickeln, so würde man, um die erste Verbindung zu erhalten, die 1 neben einander hinschreiben n—1 mal, und als n^{te} Stelle die Ergänzung m—(n—1). — Die Verbindungen aus einander werden dann gerade so abgeleitet, wie im vorhergehenden Paragraphen gelehrt wurde, nur daß man, wo dort Null steht, hier immer 1 zu setzen hat.

Man könnte auch die n^{te} Klasse zur Summe m—n, aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ⋯ entwickeln, und dann jedes Element um 1 erhöhen, und man würde wiederum die n^{te} Klasse zur Summe m, aus den Elementen 1, 2, 3, ⋯ haben.

Beispiele.

0 0 0 3		1 1 1 4	
0 0 1 2		1 1 2 3	
0 0 2 1		1 1 3 2	
0 0 3 0		1 1 4 1	
0 1 0 2		1 2 1 3	
0 1 1 1		1 2 2 2	
0 1 2 0	${}^{3}\overset{4}{V}{}'$	1 2 3 1	${}^{7}\overset{4}{V}{}'$
0 2 0 1	(0, 1, 2, ⋯)	1 3 1 2	(1, 2, 3, ⋯)
0 2 1 0		1 3 2 1	
0 3 0 0		1 4 1 1	
1 0 0 2		2 1 1 3	
1 0 1 1		2 1 2 2	
1 0 2 0		2 1 3 1	
1 1 0 1		2 2 1 2	
1 1 1 0		2 2 2 1	
1 2 0 0		2 3 1 1	
2 0 0 1		3 1 1 2	
2 0 1 0		3 1 2 1	
2 1 0 0		3 2 1 1	
3 0 0 0		4 1 1 1	

§. 33.

1) Setzt man in der n^{ten} Variations-Klasse zur Summe m, statt des Zeigers 1, 2, 3, ..., bezüglich den Zeiger a, a+d, a+2d, ..., so erhält man die n^{te} Variationsklasse zur Summe $na+(m-n)d$ aus den Elementen

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \text{rc. rc.}$$

Denn die erste Verbindung, welche $n-1$ mal die 1, und dann noch das Element $m-(n-1)$ enthält, bekommt jetzt $n-1$ mal das Element a, und hernach noch $a+(m-n)d$; also machen alle n Elemente zusammen $na+(m-n)d$ aus. In jeder der folgenden Verbindungen wird aber irgend eine Stelle um 1, jetzt um d erhöht, und dagegen irgend eine andere um eben so viel erniedrigt; also bleibt dieselbe Summe.

2) Setzt man dagegen in der n^{ten} Variations-Klasse zur Summe m aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ..., statt dieses Zeigers den andern

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \text{rc. rc. rc.}$$

so erhält man die n^{te} Variations-Klasse aus den Elementen a, a+d, a+2d ... zur Summe $na+md$.

3) Wäre daher die n^{te} Klasse der Variationen zur Summe p aus den Elementen a, a+d, a+2d, a+3d ... zu entwikkeln, so setze man:

$$na+(m-n)d = p, \quad \text{oder} \quad na+md = p,$$

bestimme daraus:

$$m = \frac{p+n(d-a)}{d}, \quad \text{oder} \quad m = \frac{p-na}{d},$$

entwickle die n^{te} Klasse der Variationen zur Summe $\frac{p+n(d-a)}{d}$ aus den Elementen 1, 2, 3, rc., oder zur Summe $\frac{p-na}{d}$ aus den Eementen 0, 1, 2, 3, ..., und setze überall

statt 1, 2, 3, 4, ... im ersten Fall, oder
statt 0, 1, 2, 3, ... im andern,

bezüglich a, a+d, a+2d, a+3d, ...

Anmerkung. Man sieht auch sogleich, daß diese letztere Aufgabe nicht immer möglich ist, und nur für solche Werthe von a, d und p möglich wird, für welche $\frac{p-na}{d}$ eine absolute ganze Zahl ist.

§. 34. Aufgabe.

Die n^{te} Klasse der Kombinationen zur Summe m aus den Elementen 0, 1, 2, 3 ··· zu entwickeln.

Auflösung. 1) Die erste Verbindung findet man genau, wie im §. 31. Nr. 1.).

2) Aus jeder Verbindung leitet man die nächstfolgende so ab:

α) Ist die letzte Ziffer um mehr als 1 größer, als die vorletzte, so vermindere man diese um 1, und vermehre dagegen die vorletzte um eben so viel.

β) Ist die letzte Ziffer der vorletzten gleich oder nur um 1 größer, so gehe man zu der zur Linken folgenden fort, und suche die nächste Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte. Diese erhöhe man um 1, die Ziffern linker Hand lasse man unverändert, und in die Stellen rechter Hand setze man lauter der erhöheten gleiche Ziffern, bis auf die letzte Stelle, in welche die Ergänzung zur bestimmten Summe gesetzt wird, die aber nie kleiner als die vorhergehende Ziffer werden darf; z. B. auf 0122 folgt 1112.

γ) Hat die Verbindung keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte, so ist diese die End-Verbindung der Klasse.

§. 35.

Wollte man die n^{te} Klasse der Kombinationen zur Summe m aus den Elementen 1, 2, 3, ··· oder aus den Elementen a, a+d, a+2d ··· entwickeln, so müßte man das hier angegebene Verfahren auf dieselbe Weise modifiziren, wie das im §. 31. angegebene durch die §§. 32. und 33. modifizirt wurde.

Beispiele.

0007		1118	
0016		1127	
0025		1136	
0034		1145	
0115	${}^{7}\overset{4}{C}$	1226	${}^{11}\overset{4}{C}$
0124	(0, 1, 2, 3, ...)	1235	(1, 2, 3, ...)
0133		1244	
0223		1334	
1114		2225	
1123		2234	
1222		2333	

Anmerkung. Die Entwicklung der Variationen und Kombinationen zur bestimmten Summe war früher unter dem Namen der beiden Discerptions-Probleme bekannt.

Zweite Abtheilung.

Anwendung der vorhergehenden Lehren zur Auflösung einiger unbestimmten Aufgaben der Zahlenlehre.

§. 36. Aufgabe.

Man hat eine Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu=m,$$

wo α, β, γ ... μ lauter Unbekannte sind, deren Anzahl n ist; man soll alle möglichen zusammengehörigen Werthe dieser Unbekannten α, β, γ ... μ finden, welche Null oder absolute ganze Zahlen sind, und welche der gegebenen Gleichung unter der Voraussetzung Genüge leisten, daß m entweder Null, oder eine absolute ganze Zahl ist.

Auflösung und Beweis. Man entwickle die n^{te} Klasse der Variationen zur Summe m aus den Elementen 0, 1, 2, 3 ..., und nehme die Elemente jeder dieser Verbindungen bezüglich statt α, β, γ ... μ, so hat man die gesuchten Werthe.

Hat man z. B.

$$\alpha+\beta+\gamma = 3,$$

so erhält man

α	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	2, 3
β	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	0,	1, 0
γ	3,	2,	1,	0,	2,	1,	0,	1,	0, 0

so daß je drei in einer und derselben Vertikal-Reihe stehende Werthe von α, β, γ, der gegebenen Gleichung genügen, während man dabei zugleich alle möglichen Auflösungen hat.

§. 37. Aufgabe.

Alle möglichen zusammengehörigen Werthe der Unbekannten $\beta, \gamma \cdots \mu$ zu finden, welche Null oder absolute ganze Zahlen sind, und welche der Gleichung

$$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+3\cdot\delta+ \cdots +n\cdot\mu = p$$

ein Genüge leisten, unter der Voraussetzung, daß p entweder Null, oder eine absolute ganze Zahl ist.

Auflösung. 1) Man bilde den Zeiger

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & \cdots\cdots & n \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \cdots\cdots & \mu \end{Bmatrix}.$$

2) Man entwickle alle Klassen der Kombinationen zur Summe p aus den Elementen 1, 2, 3 ⋯ n. (Ein höheres Element als n darf nicht vorkommen, weshalb man bei dem Entwickeln dieser Kombinationen aus einem unbegrenzten Zeiger 1, 2, 3 ⋯, (nach §. 34. und §. 35.) sogleich diejenigen Verbindungen weglassen muß, welche höhere Elemente als n enthalten.

3) Die Zahl, die anzeigt, wie vielmal in einer jeden Verbindung (einer jeden Klasse) ein jedes Element vorkommt, ist allemal ein Werth des unter demselben Element im Zeiger stehenden Unbekannten, wenn man nur statt derjenigen Unbekannten, deren im Zeiger übergesetztes Element in der Verbindung gar nicht vorkommt, Null setzt.

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung

$$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+3\cdot\delta+4\cdot\varepsilon = 9.$$

Der Zeiger ist hier:

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \end{Bmatrix}.$$

Die Kombinationen aus den Elementen 1, 2, 3, 4 stehen links, die aus jeder Verbindung hervorgehenden zusammengehörigen Werthe der Unbekannten aber rechts:

		β, γ, δ, ε
144	. . .	1, 0, 0, 2
234	. . .	0, 1, 1, 1
333	. . .	0, 0, 3, 0
1134	. . .	2, 0, 1, 1
1224	. . .	1, 2, 0, 1
1233	. . .	1, 1, 2, 0
2223	. . .	0, 3, 1, 0
11124	. . .	3, 1, 0, 1
11133	. . .	3, 0, 2, 0
11223	. . .	2, 2, 1, 0
12222	. . .	1, 4, 0, 0
111114	. . .	5, 0, 0, 1
111123	. . .	4, 1, 1, 0
111222	. . .	3, 3, 0, 0
1111113	. . .	6, 0, 1, 0
1111122	. . .	5, 2, 0, 0
11111112	. . .	7, 1, 0, 0
111111111	. . .	9, 0, 0, 0

Je 4 in einer Reihe rechts stehende Zahlen, bezüglich statt β, γ, δ, ε gesetzt, thun der Gleichung $1\cdot\beta+2\cdot\gamma+3\cdot\delta+4\cdot\varepsilon=9$ ein Genüge; und man hat zugleich alle möglichen Auflösungen.

Beweis fällt bald in die Augen.

§. 38.

Sollte den beiden Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu=\text{m}$$

und
$$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+\cdots+\text{n}\cdot\mu=\text{p};$$

welche n+1 Unbekannte α, β, $\cdots$ μ enthalten, zugleich Genüge geleistet werden, so würde das Verfahren dasselbe bleiben, nur müßte man, statt alle Klassen der Kombinationen zu entwickeln, aus dem Zeiger 1, 2, 3, $\cdots$ n, diejenigen Klassen weglassen, deren Klassen-Zahl größer als m wäre, weil in der Auflösung des vorhergehenden §. 37.) die Klassenzahl der links stehenden Kombinations-Verbindung allemal der Summe $\beta+\gamma+\delta+\cdots+\mu$ gleich kommt, diese Summe aber hier nie größer als m werden

kann. Dabei müßte aber für jede der Auflösungen der zweiten Gleichung der zugehörige Werth von α, aus der ersten bestimmt werden, wie bei dem bloßen Anblick der Gleichungen in die Augen fällt.

Beispiele. Es seien gegeben die beiden Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=5$$
$$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+3\cdot\delta=9,$$

so entwickle man zuerst alle Klassen der Kombinationen zur Summe 9 aus den Elementen 1, 2, 3, mit Uebergehung aller der Klassen, welche die 5te übersteigen; und daraus die zusammengehörigen Werthe, welche der zweiten Gleichung entsprechen.

Man hat dann:

	$\beta,\ \gamma,\ \delta,$
333	0, 0, 3
1233	1, 1, 2
2223	0, 3, 1
11133	3, 0, 2
11223	2, 2, 1
12222	1, 4, 0

und hieraus die Auflösungen

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$
2, 0, 0, 3
1, 1, 1, 2
1, 0, 3, 1
0, 3, 0, 2
0, 2, 2, 1
0, 1, 4, 0

welche alle den beiden Gleichungen entsprechen, und zugleich alle möglichen Auflösungen sind.

§. 39.

Haben zwei gegebene Gleichungen,

z. B. $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=\mathrm{d}$ und $\mu+\nu+\pi+\cdots=\mathrm{q}$, denen unter derselben Voraussetzung genügt werden soll, gar keinen Unbekannten gemeinschaftlich, so erhält man ihre Auflösungen alle, wenn man jede einzelne Auflösung der einen, mit jeder einzelnen Auflösung der zweiten verbindet.

Es seien z. B. gegeben die beiden Gleichungen

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{und} \quad \mu+\nu=3,$$

so sind die Auflösungen

der ersten: der zweiten:

$$\begin{array}{l|l} \alpha & 0,\ 1,\ 2, \\ \beta & 2,\ 1,\ 0, \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \mu & 0,\ 1,\ 2,\ 3, \\ \nu & 3,\ 2,\ 1,\ 0, \end{array}$$

und die Auflösungen beider Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} \alpha & 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2, \\ \beta & 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \\ \mu & 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \\ \nu & 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0. \end{array}$$

Beide Gleichungen in Verbindung haben daher 12 Auflösungen.

Man kann dies auch leicht für den Fall erweitern, wo drei und mehr solche Gleichungen gegeben wären, die keinen der Unbekannten gemeinschaftlich haben.

§. 40. Lehrsatz.

Der Ausdruck

$$a^\alpha \quad b^\beta \quad c^\gamma \quad d^\delta \quad \cdots \quad m^\mu$$

gibt die n^{te} Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d, ··· m, wenn man statt α, β, γ ··· μ, alle aus der Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+ \cdots +\mu = n$$

(nach §. 36.) erhaltenen Werthe setzt, dabei aber, so oft ein Wiederholungs-Exponent z. B. β den Werth 0 hat, seinen zugehörigen Buchstaben b ganz und gar wegläßt.

Beweis ist sehr leicht zu führen.

Beispiele. So gibt

$$a^\alpha \quad b^\beta$$
$$\alpha+\beta=m$$

die m^{te} Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den beiden Elementen a und b. Die Gleichung

$$\alpha+\beta=m$$

gibt nämlich zu Auflösungen (nach §. 36.)

$$\begin{array}{l|l} \alpha & m,\ m-1,\ m-2,\ \cdots\ 2,\ 1,\ 0, \\ \beta & 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ m-2,\ m-1,\ m, \end{array}$$

und daher die Verbindungen der bezeichneten Kombinations-Klasse

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ a^{m-3}b^3,\ \ldots\ldots\ldots,\ a^2b^{m-2},\ ab^{m-1},\ b^m.$$

Eben so gibt

$$a^\alpha \quad b^\beta \quad c^\gamma$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 4$$

die vierte Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c. — Die Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma = 4$$

gibt nämlich zu Auflösungen

α	4,	3,	3,	2,	2,	2,	1,	1,	1,	1,	0,	0,	0,	0,	0,
β	0,	1,	0,	2,	1,	0,	3,	2,	1,	0,	4,	3,	2,	1,	0,
γ	0,	0,	1,	0,	1,	2,	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	3,	4,

und daher die fragliche Kombinations-Klasse

$$a^4,\ a^3b,\ a^3c,\ a^2b^2,\ a^2bc,\ a^2c^2,\ ab^3,$$
$$ab^2c,\ abc^2,\ ac^3,\ b^4,\ b^3c,\ b^2c^2,\ bc^3,\ c^4.$$

§. 41. Zusatz.

Der Ausdruck

$$(ax^0)^\alpha \cdot (bx^1)^\beta \cdot (cx^2)^\gamma \cdots (mx^n)^\mu,$$

wo α, β, $\gamma \cdots \mu$ wiederum, wie vorher, Wiederholungs-Exponenten sind, gibt von der ν^{ten} Kombinations-Klasse mit Wiederholungen aus den Elementen

$$ax^0,\ \ bx^1,\ \ cx^2,\ \ dx^3,\ \cdots\ mx^n,$$

d. h. $$a\ ,\ \ bx\ ,\ \ cx^2,\ \ dx^3,\ \cdots\ mx^n,$$

bloß diejenigen Verbindungen, in welchen die Summe der Exponenten von x, gerade der Zahl p gleich ist, wenn man statt der Wiederholungs-Exponenten α, β, $\gamma \cdots \mu$, alle Werthe setzt, welche sich (nach §. 38.) durch Auflösung der beiden Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu = \nu$$

und $$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+\cdots+n\cdot\mu = p$$

ergeben, dabei aber im Falle der Wiederholungs-Exponent Null ist, dies für ein Zeichen nimmt, daß das zugehörige Element gar nicht genommen werden darf.

Beispiel. So gibt der Ausdruck

$$(ax^0)^\alpha \cdot (bx^1)^\beta \cdot (cx^2)^\gamma \cdot (dx^3)^\delta$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=6$$
$$\beta+2\gamma+3\delta=10$$

von der sechsten Klasse der Kombinationen aus den vier Elementen a, bx, cx^2, dx^3, nur diejenigen Verbindungen, in welchen die Summe der Exponenten von x jedesmal gerade 10 ist.

Drittes Kapitel.

Fortsetzung der kombinatorischen Analysis. Von den kombinatorischen Aggregaten *).

§. 42. Erklärung.

Von nun an soll jeder Buchstabe des kleinen deutschen Alphabets ohne Ausnahme Null oder eine ganze positive Zahl vorstellen.

Wenn ein solcher deutscher Buchstabe eine völlig bestimmte ganze Zahl vorstellt, soll er ein stehender Werth genannt werden; so oft er aber nach und nach jeden der Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. ꝛc. erhalten soll, mag er ein durchlaufender heißen, und im letzten Falle ist er wieder ein unbeschränkt durchlaufender oder ein beschränkt durchlaufender, je nachdem für ihn nach und nach alle Werthe der in's Unendliche fortgehenden Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. ꝛc., oder nur alle diejenigen nach einander gesetzt werden sollen, welche noch gegebenen (gewöhnlich in Gleichungen ausgedrückten) Bedingungen entsprechen.

Beispiele. So stellt z. B. $a^{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{a}$ ein durchlaufender Werth ist, die Glieder vor: a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, ꝛc. ꝛc. in infin. Dagegen stellt

der Ausdruck $a^{\mathfrak{a}}$

mit der Beschränkung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4$

---

*) Diese wichtige Erfindung des Professors G. A. Rothe zu Erlangen, ist in der Schrift: Theorie der comb. Integrale, Nürnberg 1820, zum erstenmale bekannt gemacht.

bloß die fünf Glieder vor

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3 \text{ und } a^4;$$

weil nun, wegen der Beschränkung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4$, der Buchstabe $\mathfrak{a}$ keinen Werth bekommen kann, der größer als 4 wäre, in so ferne außerdem $\mathfrak{b}$ negativ werden würde, was gegen die eben gemachte Annahme streitet, daß jeder kleine deutsche Buchstabe 0 oder eine positive ganze Zahl vorstellen soll.

Ferner wird der Ausdruck

$$a^{\mathfrak{a}}\, b^{\mathfrak{b}},$$

wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durchlaufende Werthe sind, alle folgende Glieder vorstellen:

$a^0b^0,\ a^1b^0,\ a^2b^0,\ a^3b^0,\ a^4b^0$, ꝛc. in inf.
$a^0b^1,\ a^1b^1,\ a^2b^1,\ a^3b^1,\ a^4b^1$, ꝛc. in inf.
$a^0b^2,\ a^1b^2,\ a^2b^2,\ a^3b^2,\ a^4b^2$, ꝛc. in inf.
$a^0b^3,\ a^1b^3,\ a^2b^3,\ a^3b^3$, ꝛc. ꝛc. in inf.
in inf. in inf.,

in so ferne nicht bloß statt $\mathfrak{b}$, die 0 und alle ganze Zahlen, sondern, während $\mathfrak{b}$ irgend einen Werth hat, auch zugleich statt $\mathfrak{a}$ wiederum 0 und alle ganzen Zahlen gesetzt werden müssen. — Wollte man

den Ausdruck $a^{\mathfrak{a}}\, b^{\mathfrak{b}}$
mit der Beschränkung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$

nehmen, so würde, ist $\mathfrak{c}$ ein durchlaufender Werth, erstlich $\mathfrak{c}$ nach und nach Null und alle ganzen Zahlen-Werthe erhalten, während für jeden Werth von $\mathfrak{c}$, dem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wiederum Null und alle ganzen Zahlen-Werthe gegeben werden müssen, welche der Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ entsprechen, und man bekäme wieder dieselben unendlich mal unendlich vielen Glieder, wie eben vorher auch, nur anders geordnet, nämlich:

$a^0b^0,\ a^1b^0,\ a^0b^1,\ a^2b^0,\ a^1b^1,\ a^0b^2,\ a^3b^0,\ a^2b^1,\ a^1b^2,\ a^0b^3,\ a^4b^0,$
$a^3b^1,\ a^2b^2,\ a^1b^3,\ a^0b^4,\ a^5b^0,\ a^4b^1$ ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wäre dagegen $\mathfrak{c}$ ein stehender Werth, etwa $=n$, so würde

der Ausdruck $a^{\mathfrak{a}}\, b^{\mathfrak{b}}$
mit der Beschränkung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n$

bloß $n+1$ Glieder vorstellen, nämlich die Glieder

$$a^n b^0,\ a^{n-1}b^1,\ a^{n-2}b^2,\ a^{n-3}b^3,\ \ldots\ a^2b^{n-2},\ a^1b^{n-1},\ a^0b^n.$$

So wird jedes Glied der arithmetischen Reihe

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots\ldots\ldots$ in's Unendliche fort, durch

den Ausdruck $a+\mathfrak{a}d$

vorgestellt, unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$ ein durchlaufender Werth ist. Dagegen stellt, unter derselben Voraussetzung,

der Ausdruck $a+\mathfrak{a}d$
mit der Beschränkung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1$,

(wo auch b ein durchlaufender Werth ist) bloß die m ersten Glieder

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots\cdots\ a+(m-1)d,$$

vor, weil m—1 der größte Werth jetzt ist, den a haben kann, ohne daß b negativ wird.

Eben so stellen, wenn a ein durchlaufender Werth ist, die Ausdrücke

$$\frac{(a+1)^{1|1}}{1!},\quad \frac{(a+1)^{2|1}}{2!},\quad \frac{(a+1)^{3|1}}{3!},\quad \frac{(a+1)^{4|1}}{4!},\quad \text{u. s. w. f.}$$

die figurirten Reihen bis in's Unendliche, bezüglich der

1ten, 2ten, 3ten, 4ten, u. s. w.

Ordnung vor, während der Ausdruck

$$\frac{(a+1)^{m|1}}{m!}$$

alle Glieder der figurirten Reihe der m^{ten} Ordnung liefert, so oft a als ein durchlaufender Werth angesehen wird. [Solches folgt aus der Formel $T^n_m = \frac{n^{m|1}}{m!}$ des §. 19.]. — Tritt aber zu einem dieser Ausdrücke z. B. zu

$$\frac{(a+1)^{4|1}}{4!}$$

die Beschränkung $a+b=n-1$ hinzu, so stellt derselbe Ausdruck, unter der Voraussetzung, daß auch b ein durchlaufender Werth ist, nur noch die ersten n Glieder derselben Reihe (der figurirten Zahlen der 4ten Ordnung) vor. — Wird statt der Beschränkung $a+b=n-1$ lieber diese andere $a-b=n$ oder $a=n+b$ hinzugefügt, so drückt derselbe Ausdruck alle Glieder der figurirten Reihe der 4ten Ordnung aus, aber mit dem $n+1^{ten}$ Gliede anfangend, also die ersten n Glieder nicht mit begriffen, weil jetzt der geringste Werth von a, n selber ist, eben weil kein kleiner deutscher Buchstabe je andere Werthe soll annehmen dürfen, als positive ganze Zahlen oder Null. — Und wird zu dieser letzten Beschränkung $a-b=n$, noch diese neue hinzugedacht $b+c=p$, wo b und c durchlaufende Werthe sein sollen, so ist der größte Werth, den b haben kann, p selbst, also n+p der größte Werth, den a haben kann, und derselbe Ausdruck

$$\frac{(a+1)^{4|1}}{4!}\ \text{mit den Beschränkungen}\ \left\{\begin{matrix} a-b=n \\ b+c=p \end{matrix}\right\}$$

gibt nun die Glieder der figurirten Reihe der 4^{ten} Ordnung vom $n+1^{ten}$ anfangend bis zum $n+p+1^{ten}$ fortschreitend, aber außer diesen p+1 Gliedern, weder frühere noch spätere Glieder derselben Reihe.

Ferner folgt aus (§. 40.), daß

der Ausdruck $\qquad a^{\mathfrak{a}}\ b^{\mathfrak{b}}\ c^{\mathfrak{c}}\ d^{\mathfrak{d}}$
mit der Beschränkung $\qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = m$
die m^{te} Klasse der Kombinationen aus den 4 Elementen a, b, c, d mit Wiederholungen liefert, während

der Ausdruck $\qquad a^{\mathfrak{a}}\cdot(bx)^{\mathfrak{b}}\cdot(cx^2)^{\mathfrak{c}}\cdot(dx^3)^{\mathfrak{d}}$ oder $a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}}d^{\mathfrak{d}}\cdot x^{\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}}$
mit den Beschränkungen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = 5$ und $\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d} = 7$,
(dem §. 41. zu Folge) von der 5ten Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den vier Elementen a, bx, cx^2 und dx^3, nur diejenigen Verbindungen liefert, welche, wenn man sie als Produkte ansieht, die Potenz x^7 als Faktor enthalten; immer unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, durchlaufende Werthe vorstellen. — Wollte man letztere Glieder alle entwickeln, so müßte man zuvor alle möglichen Werthe finden, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ nach und nach annehmen können. Man hätte zu dem Ende (nach §. 38.):

			$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$
	133	und	2, 1, 0, 2
${}^7C$	223		2, 0, 2, 1
(1, 2, 3)	1123		1, 2, 1, 1
	1222		1, 1, 3, 0
	11113		0, 4, 0, 1
	11122		0, 3, 2, 0

und da nur diese 6 zusammengehörige Werthe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, existiren, welche beiden gegebenen Beschränkungen, nämlich daß

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = 5 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d} = 7$$

sein soll, entsprechen, so erhält man die 6 Glieder:

$$a^2b^1c^0d^2\cdot x^7,\quad a^2b^0c^2d^1\cdot x^7,\quad a^1b^2c^1d^1\cdot x^7,$$
$$a^1b^1c^3d^0\cdot x^7,\quad a^0b^4c^0d^1\cdot x^7,\quad a^0b^3c^2d^0\cdot x^7;$$

und sollten diese alle addirt werden, so gäbe dies den Ausdruck

$$[a^2bd^2+a^2c^2d+ab^2cd+abc^3+b^4d+b^3c^2]\cdot x^7.$$

§. 43. Erklärung.

Die Summe aller Glieder, welche ein, solche deutsche Buchstaben enthaltender Ausdruck A liefert, wenn die deutschen Buchstaben unbeschränkte oder beschränkte durchlaufende Werthe sind, bezeichne man durch ein dem Ausdruck vorgesetztes S, nachdem letzterer selbst in eckige Klammern eingeschlossen ist, und die be-

schränkenden Gleichungen so dicht wie möglich unter ihn gesetzt worden sind. — Der Ausdruck A selbst, welcher der Repräsentant von allen diesen Gliedern ist, heißt dann das allgemeine Glied dieser Summe, und die so bezeichnete Summe selbst ein kombinatorisches Aggregat.

Beispiele. Die Summe von n Gliedern der figurirten Reihe der m^{ten} Ordnung, welche §. 17.) durch S_m^n bezeichnet worden ist, kann z. B. jetzt durch das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\frac{(a+1)^{m|1}}{m!}\right]_{a+b=n-1}$$

vorgestellt werden; und die Lehrsätze des §. 18.) schreiben sich jetzt sehr leicht so:

1) $$S\left[\frac{(a+1)^{1|1}}{1!}\right]_{a+b=n-1}=\frac{n^{2|1}}{2!};$$

2) $$S\left[\frac{(a+1)^{2|1}}{2!}\right]_{a+b=n-1}=\frac{n^{3|1}}{3!};$$

3) $$S\left[\frac{(a+1)^{3|1}}{3!}\right]_{a+b=n-1}=\frac{n^{4|1}}{4!};$$

4) $$S\left[\frac{(a+1)^{4|1}}{4!}\right]_{a+b=n-1}=\frac{n^{5|1}}{5!};$$

𝔒) $$S\left[\frac{(a+1)^{m|1}}{m!}\right]_{a+b=n-1}=\frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!};$$

und es hat diese Art zu schreiben den großen Vortheil, daß man links die einzelnen Glieder der Reihe (der Summe) selber wirklich hat, und nicht bloße Zeichen, welche die Stellen der wirklichen Glieder einnehmen (Lokalzeichen), an denen aber nicht die wirkliche Zusammensetzung derselben durch die Operationen erkannt wird.

Und das Aggregat

$$S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!}\,a^a\,b^b\right]_{a+b=4}$$

stellt vor die Summe

$$\frac{4!}{4!\,0!}a^4b^0+\frac{4!}{3!\,1!}a^3b^1+\frac{4!}{2!\,2!}a^2b^2+\frac{4!}{1!\,3!}a^1b^3+\frac{4!}{0!\,4!}a^0b^4;$$

oder auch, weil $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}=(m+n)_m=(m+n)_n$ ist,

die Summe

$$a^4+4_1\cdot a^3b+4_2\cdot a^2b^2+4_3\cdot ab^3+b^4;$$

oder, wenn man $4_1=4$, $4_2=6$, $4_3=4_1=4$ berechnet hat, die Summe

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

von welcher wir aus §. 85. des I. Th. d. W. wissen, daß sie $=(a+b)^4$ ist.

Ferner stellt das Aggregat

$$S\left[\begin{matrix}(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot m_{\mathfrak{b}}\cdot a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m\end{matrix}\right]$$

wo m eine positive ganze Zahl ist, die Summe

$$m_0\cdot a^m-m_1\cdot a^{m-1}b+m_2\cdot a^{m-2}b^2-m_3\cdot a^{m-3}b^3+\cdots$$
$$+(-1)^{m-2}\cdot m_{m-2}\cdot a^2b^{m-2}+(-1)^{m-1}\cdot m_{m-1}\cdot ab^{m-1}+(-1)^m\cdot m_m\cdot b^m$$

vor, während $m_0=1$, $m_1=m$, $m_2=\frac{m(m-1)}{2}$,

$m_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, u. s. w. $m_{m-2}=m_2$, $m_{m-1}=m_1$

und $m_m=m_0=1$ ist; wo endlich statt $(-1)^{m-2}$, $(-1)^m$ entweder $+1$, oder -1 gesetzt wird, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, während dann

$$(-1)^{m-1}=-(-1)^m \text{ entweder } -1 \text{ oder } +1 \text{ gibt. —}$$

Also würde das Aggregat

$$S\left[\begin{matrix}(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot 4_{\mathfrak{a}}\cdot a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4\end{matrix}\right]$$

die Summe

$$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

vorstellen, von welcher wir (nach §. 85. des I. Theiles) wissen, daß sie $=(a-b)^4$ ist.

Endlich stellt das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\begin{matrix}a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdot d^{\mathfrak{d}}\cdot x^{\mathfrak{p}}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=5,\quad \mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}=\mathfrak{p}\end{matrix}\right]$$

die Summe vor

$$a^5+a^4b\cdot x+(a^4c+a^3b^2)\cdot x^2+(a^4d+a^3bc+a^2b^3)\cdot x^3$$
$$+(a^3bd+a^3c^2+a^2b^2c+ab^4)\cdot x^4$$
$$+(a^3cd+a^2b^2d+a^2bc^2+ab^3c+b^5)\cdot x^5$$
$$+(a^3d^2+a^2bcd+ab^3d+a^2c^3+ab^2c^2+b^4c)\cdot x^6$$
$$+(a^2bd^2+a^2c^2d+ab^2cd+b^4d+abc^3+b^3c^2)\cdot x^7$$
$$+(a^2cd^2+ab^2d^2+abc^2d+b^3cd+ac^4+b^2c^3)\cdot x^8$$
$$+(a^2d^3+abcd^2+b^3d^2+ac^3d+b^2c^2d+bc^4)\cdot x^9$$
$$+(abd^3+ac^2d^2+b^2cd^2+bc^3d+c^5x)\cdot x^{10}$$
$$+(acd^3+b^2d^3+bc^2d^2+c^4d)\cdot x^{11}+(ad^4+bcd^3+c^3d^2)\cdot x^{12}$$
$$+(bd^4+c^2d^3)\cdot x^{13}+cd^4\cdot x^{14}+d^5\cdot x^{15};$$

welche aus 56 Gliedern besteht, die hier in 16 Glieder zusammengefaßt sind. Man erhält aber diese Glieder alle, wenn man p nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen vorstellen läßt, dann aber zu jedem Werth von p, alle möglichen Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, sucht, welche den gegebenen Beschränkungen

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}=p$$

entsprechen, alle diese zusammengehörigen Werthe in das allgemeine Glied des Aggregats setzt, und zuletzt die Summe aller der dadurch hervorgehenden Glieder nimmt. Es kann dabei offenbar p nicht größer als 15 genommen werden, weil jeder größere Werth von p, für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ keine Auflösungen mehr liefert.

§. 44.

Der Werth eines kombinatorischen Aggregats hängt also ab:

1) von dessen allgemeinem Gliede, durch welches die Form der einzelnen Glieder bestimmt wird; aber besonders

2) von den beschränkenden Gleichungen, welche die Menge (die Anzahl) der einzelnen Glieder bedingen, und welche so beschränkend sein können, daß das Aggregat unendlich viele Glieder, vielleicht aber auch nicht ein einziges Glied haben kann. [Man vergleiche die Beispiele zu §. 42.].

Anmerkung. Von nun an soll in jedem Aggregat jeder deutsche Buchstabe als ein durchlaufender angesehen werden, so lange nicht ausdrücklich gesagt wird, daß er ein stehender Werth geworden ist.

§. 45.

Aus diesen Begriffen gehen sogleich nachstehende Folgerungen hervor:

1) In jedem kombinatorischen Aggregat haben die durchlaufenden deutschen Buchstaben keine bestimmte Bedeutung, sondern bloß eine von den beschränkenden Gleichungen abhängige. Also kann man statt eines jeden dieser Buchstaben einen beliebigen neuen setzen, (d. h. aber überall, wo er vorkommt, sowohl in dem allgemeinen Gliede, als auch in den beschränkenden Gleichungen).

So ist z. B.

$$S\left[\begin{matrix}(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\cdot y^{\mathfrak{a}}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n\end{matrix}\right]=S\left[\begin{matrix}(-1)^{\mathfrak{c}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\cdot y^{\mathfrak{c}}\\ \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=n\end{matrix}\right]=S\left[\begin{matrix}(-1)^{\mathfrak{c}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\cdot y^{\mathfrak{c}}\\ \mathfrak{c}+\mathfrak{b}=n\end{matrix}\right].$$

2) Da die beschränkenden Gleichungen bloß dazu dienen, den durchlaufenden deutschen Buchstaben nicht mehr und nicht weniger zusammengehörige Werthe zu geben und zu lassen, als sie gerade haben sollen, so kann man die Anzahl dieser Gleichungen nach Belieben vermehren oder vermindern, so oft dadurch den durchlaufenden deutschen Buchstaben nicht mehr und nicht weniger, sondern genau dieselben zusammengehörigen Werthe gegeben werden.

So kann man z. B. zu dem Aggregat

$$S\left[\begin{matrix}\dfrac{x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{c}!}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4,\quad \mathfrak{c}+\mathfrak{d}=5\end{matrix}\right]$$

noch die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{f}$ hinzufügen, weil dadurch offenbar dem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ noch genau alle die Werthe zukommen, welche den andern Beschränkungen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4$ und $\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=5$ entsprechen. Dann kann man aber auch jenes Resultat noch so schreiben:

$$S\left[\begin{matrix}\dfrac{x^{\mathfrak{f}}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{c}!}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4,\quad \mathfrak{c}+\mathfrak{d}=5,\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{f}\end{matrix}\right]$$

Und da, wenn man von den drei beschränkenden Gleichungen

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4,\qquad \mathfrak{c}+\mathfrak{d}=5,\qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{f},$$

die beiden ersten addirt, $a+b+c+d=9$, oder $f+b+d=9$ hervorgeht, so wird man statt dieser drei beschränkenden Gleichungen auch diese vier anderen

$$a+b=4, \quad c+d=5, \quad a+c=f \quad \text{und} \quad f+g=9$$

nehmen können, so daß obiges Resultat auch noch so geschrieben werden kann:

$$S\left[\frac{x^f}{a!\ c!}\right]_{\substack{a+b\,=\,4,\ c+d\,=\,5,\\ a+c\,=\,f,\ f+g\,=\,9}}.$$

Die letzte dieser beschränkenden Gleichungen gibt für f nach und nach die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

und zu jedem Werthe von f, ergeben sich die Werthe von a und c aus der Gleichung $a+c=f$, wenn man nur dabei die beiden erstern Beschränkungen beachtet, daß nämlich $a+b=4$ und $c+d=5$ werden muß, d. h. daß a nicht größer wie 4, und c nicht größer als 5 genommen wird. Man erhält hiernach für a, c, f, folgende Werthe:

f	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	9
a	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4
c	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	5	4	3	2	5	4	3	5	4	5.

Und da man auf diese Weise 30 zusammengehörige Werthe von a und c hat, so repräsentirt obiges Aggregat eine Summe von 30 Gliedern, welche sich jedoch sogleich in eine Summe von 10 Gliedern zusammen fassen läßt, nämlich in die Summe

$$1+2\cdot x+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)\cdot x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot x^3$$
$$+\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{1!\ 3!}+\frac{1}{2!\ 2!}+\frac{1}{3!\ 1!}+\frac{1}{4!}\right)\cdot x^4$$
$$+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{1!\ 4!}+\frac{1}{2!\ 3!}+\frac{1}{3!\ 2!}+\frac{1}{4!\ 1!}\right)\cdot x^5$$
$$+\left(\frac{1}{1!\ 5!}+\frac{1}{2!\ 4!}+\frac{1}{3!\ 3!}+\frac{1}{4!\ 2!}\right)\cdot x^6$$
$$+\left(\frac{1}{2!\ 5!}+\frac{1}{3!\ 4!}+\frac{1}{4!\ 3!}\right)\cdot x^7+\left(\frac{1}{3!\ 5!}+\frac{1}{4!\ 4!}\right)\cdot x^8+\frac{1}{4!\ 5!}\cdot x^9;$$

oder, wenn die Fakultäten berechnet und die Brüche addirt werden, in die Summe:

$$1+2x+2x^2+\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{2}{3}x^4+\tfrac{31}{120}x^5+\tfrac{7}{90}x^6+\tfrac{13}{720}x^7+\tfrac{1}{320}x^8+\tfrac{1}{2880}x^9.$$

3) Eben deshalb kann man in einem Aggregat die beschrän-

kenden Gleichungen ganz weglassen, wenn sie von der Art sind, daß sie nicht beschränken, sondern daß die durchlaufenden deutschen Buchstaben des Aggregats deshalb nicht mehr und nicht weniger und nicht andere Werthe bekommen.

Ist z. B. gegeben das Aggregat

$$S\left[\frac{x^f}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=f}$$

unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, f, durchlaufende Werthe sind, und läßt man hier die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=f$ weg, setzt aber zuvor in dem allgemeinen Gliede $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$ statt f, so liefert das Aggregat

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{c}!}\right]$$

nicht mehr und nicht weniger Werthe und auch keine anderen, als das vorhergehende, weil jetzt wie oben, statt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen gesetzt werden müssen. In beiden Fällen erhält man daher unendlich mal unendlich viele einzelne Glieder, deren Summe durch das Aggregat selbst vorgestellt ist.

§. 46. Lehrsatz.

Setzt man zu einem kombinatorischen Aggregat A, in dessen allgemeinem Gliede allein, oder auch zugleich in seinen beschränkenden Gleichungen der deutsche Buchstabe $\mathfrak{a}$, aber nicht der andere $\mathfrak{k}$ vorkommt, zu den beschränkenden Gleichungen noch diese

$$\mathfrak{a}=2\mathfrak{k},$$

oder diese andere $\mathfrak{a}=2\mathfrak{k}+1$,

hinzu, so hat man im erstern Fall ein Aggregat A_1, in welchem nicht mehr alle Glieder von A vorkommen, sondern nur diejenigen, in denen $\mathfrak{a}$ eine gerade Zahl ist; im andern Falle dagegen hat man ein Aggregat A_2, in welchem nur diejenigen Glieder von A vorkommen, in denen $\mathfrak{a}$ eine ungerade Zahl ist. Aber eben deswegen ist dann nothwendig

$$A = A_1 + A_2$$

oder

$$A = \left[A\right]_{\mathfrak{a}=2\mathfrak{k}} + \left[A\right]_{\mathfrak{a}=2\mathfrak{k}+1}.$$

Beweis ist unnöthig.

Beispiele. So ist z. B.

$$S\left[\begin{matrix}(-1)^a x^a y^b\\ a+b=7\end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix}(-1)^a x^a y^b\\ a+b=7\\ a=2k\end{matrix}\right] + S\left[\begin{matrix}(-1)^a x^a y^b\\ a+b=7\\ a=2k+1\end{matrix}\right].$$

Es stellt nämlich das Aggregat zur Linken die Summe vor:

$$y^7 - xy^6 + x^2y^5 - x^3y^4 + x^4y^3 - x^5y^2 + x^6y - x^7;$$

während das erstere Aggregat zur Rechten, weil in ihm statt a nur 0, oder jede gerade Zahl gesetzt werden kann, nur die Summe:

$$y^7 + x^2y^5 + x^4y^3 + x^6y$$

vorstellt, und das zweite Aggregat zur Rechten, weil in ihm statt a nur ungerade Zahlen gesetzt werden können, die Summe:

$$-(xy^6 + x^3y^4 + x^5y^2 + x^7)$$ repräsentirt.

§. 47.

Da es aber einerlei ist, ob man die beschränkenden Gleichungen $a = 2k$, oder $a = 2k+1$ hinschreibt, oder ob man lieber sogleich $2k$ statt a setzt, oder $2k+1$ statt a, sowohl im allgemeinen Gliede, als in den beschränkenden Gleichungen des Aggregats; so ist jedes kombinatorische Aggregat A, der Summe zweier andern A_1 und A_2 gleich, von denen A_1 erhalten wird, wenn man in A, $2k$ statt a setzt, während das andere A_2 hervorgeht, wenn in A, $2k+1$ statt a gesetzt wird.

Und eben weil in A_1 und A_2 der Buchstabe a nicht mehr, sondern dafür $2k$ und $2k+1$ vorkommt, so kann man (nach §. 45. Nr. 1.) statt k (jeden nicht vorkommenden andern deutschen Buchstaben, also namentlich auch) wieder a setzen, so daß A_1 und A_2 erhalten werden, wenn in A zuerst $2a$, dann $2a+1$ statt a gesetzt wird.

Beispiel. So findet sich z. B.

$$S\left[\begin{matrix}\dfrac{(-1)^a x^a}{a!}\\ a+b=n\end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix}\dfrac{(-1)^{2a} x^{2a}}{(2a)!}\\ 2a+b=n\end{matrix}\right] + S\left[\begin{matrix}\dfrac{(-1)^{2a+1} x^{2a+1}}{(2a+1)!}\\ 2a+b+1=n\end{matrix}\right];$$

oder, weil $(-1)^{2a} = +1$ und $(-1)^{2a+1} = -1$ ist,

$$S\left[\frac{(-1)^a x^a}{a!}\right]_{a+b=n} = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]_{2a+b=n} - S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]_{2a+b=n-1}.$$

Eben so ist:

$$S\left[\frac{(-1)^a \cdot x^a y^b z^c}{(a+1)(b+1)(c+1)}\right]_{a+b+c=5} = S\left[\frac{x^{2a} y^b z^c}{(2a+1)(b+1)(c+1)}\right]_{2a+b+c=5}$$

$$- S\left[\frac{x^{2a+1} y^b z^c}{(2a+2)(b+1)(c+1)}\right]_{2a+b+c=4}.$$

§. 48.

Aus demselben Grunde ist aber jedes kombinatorische Aggregat A, der Summe dreier andern A_1, A_2 und A_3 gleich, welche aus A hervorgehen, wenn man statt eines seiner deutschen Buchstaben z. B. a, zuerst $3a$, dann $3a+1$, und endlich $3a+2$ substituirt; oder es ist

$$A = \left[A\right]_{a=3k} + \left[A\right]_{a=3k+1} + \left[A\right]_{a=3k+2}.$$

Und auf dieselbe Weise läßt sich ein Aggregat A in die Summe von 4, 5, und mehr andern auf ähnliche Art aus ihm hervorgegangenen, verwandeln.

§. 49. Lehrsatz.

Setzt man in einem Aggregat A, statt eines seiner deutschen Buchstaben, z. B. statt a zuerst 0, so erhält man ein Aggregat A_1, welches alle diejenigen Glieder von A enthält, für welche $a = 0$ ist. Fügt man aber zu A noch die beschränkende Gleichung $a = k+1$ hinzu, oder, was dasselbe ist, setzt man $k+1$ statt a, so bekommt man ein Aggregat A_2, welches genau alle diejenigen Glieder von A enthält, in welchen a nicht Null geworden ist. Daher ist nothwendig

$$A = A_1 + A_2,$$

oder

$$A = \left[A\right]_{a=0} + \left[A\right]_{a=k+1}.$$

Es ist also jedes kombinatorische Aggregat A, der Summe

zweier anderen A_1 und A_2 gleich, welche aus A hervorgehen, wenn man zuerst 0, dann $\mathfrak{a}+1$, statt $\mathfrak{a}$ setzt.

Beweis ist überflüssig.

Beispiel. So ist, um das Beispiel des §. 47.) noch einmal anzuziehen:

$$S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}}{(\mathfrak{a}+1)(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{c}+1)}\atop \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=5\right] = S\left[\frac{y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}}{(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{c}+1)}\atop \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=5\right]$$
$$+S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}+1}.x^{\mathfrak{a}+1} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}}{(\mathfrak{a}+2)(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{c}+1)}\atop \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=4\right],$$

in so ferne sich die Gleichung $(\mathfrak{a}+1)+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=5$ auf $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=4$ reduzirt.

§. 50.

Umgekehrt ist aber dann wieder

$$A_2 = A - A_1,$$

d. h. jedes kombinatorische Aggregat A_2 ist der Differenz $A-A_1$ zweier anderen A und A_1 gleich, von denen das erstere A aus dem gegebenen A_2 hervorgeht, wenn man daselbst $\mathfrak{a}-1$ statt $\mathfrak{a}$ setzt, während das andere A_1 wiederum aus diesem A erhalten wird, wenn man im letzteren 0 statt $\mathfrak{a}$ setzt *).

§. 51. Lehrsatz.

Fügt man einem kombinatorischen Aggregat A, in welchem der deutsche Buchstabe $\mathfrak{a}$, aber nicht $\mathfrak{k}$ vorkommt, noch die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{k}=\mu$ hinzu, so liefert dieses neue Aggregat A_1 bloß diejenigen Glieder von A, in welchen $\mathfrak{a}$ nicht größer als μ ist, unter μ eine ganze Zahl vorausgesetzt. Fügt man aber dem Aggregat A die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}=\mathfrak{k}+1+\mu$ hinzu, so liefert dieses neue Aggregat A_2 offenbar alle diejenigen Glieder von A, in welchen $\mathfrak{a}$ größer als μ ist. — Also ist nothwendig

---

*) Dieses letztere A_1 wird offenbar auch direkt aus A_2 erhalten, wenn man daselbst -1 statt $\mathfrak{a}$ setzt.

$$A = A_1 + A_2,$$

oder $$A = \left[\begin{matrix} A \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{k} = \mu \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} A \\ \mathfrak{a} = \mathfrak{k}+1+\mu \end{matrix}\right].$$

Anmerkung. Setzt man hier $\mu = 0$, so gibt dies den Lehrsatz des §. 49.) wieder.

§. 52.

Dieser Lehrsatz gilt aber offenbar noch, wenn statt μ selbst wieder ein deutscher in A vorkommender Buchstabe, z. B. $\mathfrak{b}$ gesetzt werden sollte, weil dann A_1 alle diejenigen Glieder von A enthält, in welchen $\mathfrak{a}$ nie größer als der zugehörige Werth von $\mathfrak{b}$ wird, während A_2 alle die übrigen Glieder von A enthalten muß, in welchen $\mathfrak{a}$ allemal größer als die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{b}$ gefunden wird.

Es ist also allemal

$$A = A_1 + A_2,$$

wenn A_1 aus A dadurch erhalten ist, daß man in letzterem (nämlich in A) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{b}$ gesetzt hat, und wenn A_2 aus A sich ergibt, indem $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1$ statt $\mathfrak{a}$ gesetzt worden ist; denn im erstern Fall ist das, was für $\mathfrak{b}$ gesetzt worden ist, nämlich $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, offenbar = oder $>\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a}$ = oder < als dieses statt $\mathfrak{b}$ gesetzte; und im andern Fall ist das, was für $\mathfrak{a}$ gesetzt worden, nämlich $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1$, offenbar größer als $\mathfrak{b}$.

Beispiele. So ist, um das Aggregat des §. 47.) noch einmal aufzufassen:

$$S\left[\begin{matrix} \dfrac{(-1)^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}}{(\mathfrak{a}+1)(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{c}+1)} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 5 \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix} \dfrac{(-1)^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{a}} y^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}}{(\mathfrak{a}+1)(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{c}+1)} \\ 2\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 5 \end{matrix}\right]$$

$$+ S\left[\begin{matrix} \dfrac{(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1} x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+1} y^{\mathfrak{b}} z^{\mathfrak{c}}}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+2)(\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{c}+1)} \\ \mathfrak{a}+2\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 4 \end{matrix}\right].$$

§. 53. Lehrsatz.

Zwei kombinatorische Aggregate, welche dieselben beschränkenden Gleichungen haben, werden zu einander addirt, oder von

einander subtrahirt, wenn man ihre allgemeinen Glieder addirt oder subtrahirt, dabei aber dieselben gemeinschaftlichen beschränkenden Gleichungen beibehält. — Damit jedoch dieselben beschränkenden Gleichungen zwischen denselben deutschen Buchstaben in beiden Aggregaten wirklich stattfinden, ist es oft nöthig, (nach §. 45. Nr. 1.), in dem einen derselben statt der vorkommenden deutschen Buchstaben neue zu setzen.

Beispiele. So findet sich z. B.

$$S\begin{bmatrix} x_a \\ a+b=n \end{bmatrix} + S\begin{bmatrix} x_{c+1} \\ c+b=n \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} x_a + x_{a+1} \\ a+b=n \end{bmatrix};$$

und weil (nach den §§. 14. 15.) für jeden einzelnen stehenden Werth von a,

$$x_a + x_{a+1} = (x+1)_{a+1}$$

ist, so erhält man hieraus noch

$$S\begin{bmatrix} x_a \\ a+b=n \end{bmatrix} + S\begin{bmatrix} x_{c+1} \\ c+b=n \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} (x+1)_{a+1} \\ a+b=n \end{bmatrix},$$

welche Gleichung lehrt, daß die beiden Summen

$$x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n \quad \text{und} \quad x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n+1}$$

(welche beide aus gleichvielen Gliedern bestehen) zu einander addirt, die Summe

$$(x+1)_1+(x+1)_2+(x+1)_3+\cdots+(x+1)_{n+1}.$$

geben.

Beweis. Addirt oder subtrahirt man nämlich nach diesem Lehrsatze, so addirt oder subtrahirt man, statt die ganzen Summen zu addiren oder zu subtrahiren, ihre gleichvielten Glieder, welches bekanntlich dasselbe Endresultat gibt.

§. 54.

Um diesen Lehrsatz anwenden zu können, ist es zuweilen nöthig, die Aggregate nach den frühern §§. zuvor umzuformen. —

Gesetzt man hätte zu addiren:

$$S\begin{bmatrix} m_b \cdot a^{a+b} b^b \\ a+b=m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S\begin{bmatrix} m_b \cdot a^a b^{b+1} \\ a+b=m \end{bmatrix},$$

so verwandle man das erstere (nach §. 49.), indem $b=0$ und $b+1$ statt b gesetzt wird, in die Summe:

$$S\left[\underset{\mathfrak{a}=m}{m_0\cdot a^{\mathfrak{a}+1}}\right]+S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{m_{\mathfrak{b}+1}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}b^{\mathfrak{b}+1}}\right],$$

wobei der erste Summand, weil $\mathfrak{a}$ den einzigen Werth m hat, bloß aus dem einzigen Gliede $m_0\cdot a^{m+1}$, d. h. a^{m+1} besteht, weil $m_0=1$ ist. Und verwandelt man das zweite oben gegebene Aggegrat (nach demselben §. 49.), indem man $\mathfrak{a}=0$ und $\mathfrak{a}+1$ statt $\mathfrak{a}$ setzt, so erhält man für selbiges die Summe:

$$b^{m+1}+S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{m_{\mathfrak{b}}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}b^{\mathfrak{b}+1}}\right].$$

Addirt man nun beide gegebene Aggregate, so ergibt sich aus unserm Lehrsatze die Summe:

$$a^{m+1}+b^{m+1}+S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{(m_{\mathfrak{b}+1}+m_{\mathfrak{b}})a^{\mathfrak{a}+1}b^{\mathfrak{b}+1}}\right],$$

oder auch (weil $m_{n+1}+m_n=(m+1)_{n+1}$ ist) die Summe:

$$a^{m+1}+b^{m+1}+S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{(m+1)_{\mathfrak{b}+1}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}b^{\mathfrak{b}+1}}\right],$$

oder auch (wenn man §. 50.) in Anwendung bringt, und zuerst $\mathfrak{a}-1$ statt $\mathfrak{a}$, setzt,

$$a^{m+1}+S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{(m+1)_{\mathfrak{b}+1}\cdot a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}+1}}\right],$$

welches Resultat, wenn derselbe Satz noch einmal angewandt wird, so daß man zuerst $\mathfrak{b}-1$ statt $\mathfrak{b}$ setzt, in

$$S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m+1}{(m+1)_{\mathfrak{b}}\cdot a^{\mathfrak{a}}\cdot b^{\mathfrak{b}}}\right]$$

übergeht.

Um dies noch näher zu beleuchten, denke man sich den speziellen Fall dieses Beispiels, in welchem $m=6$ ist, so waren zu addiren die beiden Summen:

$$a^7+6_1\cdot a^6b+6_2\cdot a^5b^2+6_3\cdot a^4b^3+6_4\cdot a^3b^4+6_5\cdot a^2b^5+6_6\cdot ab^6$$

und $$a^6b+6_1\cdot a^5b^2+6_2\cdot a^4b^3+6_3\cdot a^3b^4+6_4\cdot a^2b^5+6_5\cdot a\,b^6+6_6\cdot b^7.$$

Weil aber hier die gleichvielten Glieder nicht bequem zusammenaddirt werden könnten, so mußte man von der ersten Summe das erste Glied absondern, von der andern Summe das letzte, und hatte dann außer a^7+b^7 noch zu addiren die Summen:

$$6_1\cdot a^6b+6_2\cdot a^5b^2+6_3\cdot a^4b^3+6_4\cdot a^3b^4+6_5\cdot a^2b^5+6_6\cdot ab^6$$

und $$a^6b+6_1\cdot a^5b^2+6_2\cdot a^4b^3+6_3\cdot a^3b^4+6_4\cdot a^2b^5+6_5\cdot ab^6,$$

in welchen nun die gleichvielten Glieder bequem zusammenaddirt werden konnten, so daß man mit Anwendung des Satzes

$$x_n + x_{n+1} = (x+1)_{n+1}$$

erhielt:

$$7_1 \cdot a^6b + 7_2 \cdot a^5b^2 + 7_3 \cdot a^4b^3 + 7_4 \cdot a^3b^4 + 7_5 \cdot a^2b^5 + 7_6 \cdot ab^6;$$

zu welchem Resultat vorn hin noch das obige a^7, und hinten hin noch das obige b^7 hinzugefügt werden konnte, wenn man das ganze Endresultat in der Ordnung haben wollte, wie solche in dem Aggregat

$$S\left[\begin{array}{c} 7_{\mathfrak{b}} \cdot a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 7 \end{array}\right]$$

ausgesprochen ist.

§. 55. Lehrsatz.

Soll ein kombinatorisches Aggregat A, mit einem Ausdruck M multiplizirt oder dividirt werden, welcher von den durchlaufenden Werthen der deutschen Buchstaben unabhängig ist, also immer denselben Werth behält, so darf man nur das allgemeine Glied von A, mit M multipliziren oder dividiren, alles übrige aber unverändert lassen.

Beweis. Denn dadurch, daß das allgemeine Glied des Aggregats den Faktor M erhält, erhalten alle einzelnen Glieder der durch A vorgestellten Summe, den Faktor M; also ist die ganze Summe mit diesem M multiplizirt.

Beispiele. So ist z. B.

$$m!\, S\left[\begin{array}{c} \dfrac{x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = m \end{array}\right] = S\left[\begin{array}{c} \dfrac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = m \end{array}\right],$$

und

$$a \cdot S\left[\begin{array}{c} \dfrac{x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 3 \end{array}\right] = S\left[\begin{array}{c} \dfrac{a \cdot x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 3 \end{array}\right].$$

Das Produkt zur Linken stellt nämlich vor:

$$a \cdot \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right);$$

und das Aggregat zur Rechten stellt vor die Summe:

$$a \cdot \frac{x^3}{3!} + a \cdot \frac{x^2y}{2!} + a \cdot \frac{xy^2}{2!} + a \cdot \frac{y^3}{3!}.$$

§. 56.

Umgekehrt, enthält das allgemeine Glied eines Aggregats A, den Faktor M, welcher von den durchlaufenden Werthen der deutschen Buchstaben unabhängig ist, so kann man selbigen außerhalb des Summenzeichens als Faktor hinsetzen.

§. 57. Lehrsatz.

Sollen aber zwei Aggregate A und B mit einander multiplizirt werden, so multiplizire man ihre allgemeinen Glieder mit einander, und gebe dem neuen Aggregat, alle die beschränkenden Gleichungen, welche A und B zusammen genommen haben; wenn man nur vorher (nach §. 45. Nr. 1.) in dem einen der Aggregate statt derjenigen deutschen durchlaufenden Buchstaben, welche zu gleicher Zeit in dem andern vorkommen, neue, in den gegebenen Aggregaten noch nicht vorkommende deutsche Buchstaben setzt.

Beispiel. So findet sich:

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4} \times S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=5}$$

$$= S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4} \times S\left[\frac{x^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{c}+\mathfrak{b}=5} = S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4,\ \mathfrak{c}+\mathfrak{b}=5}.$$

Es bedeutet nämlich $S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4}$ die Summe:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!};$$

und das andere Aggregat $S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=5}$ bedeutet die Summe:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}.$$

Multiplizirt man nun diese Summen mit einander, so muß jedes Glied der einen Summe, welche alle durch $\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}$ vorgestellt sind, mit jedem Gliede

der andern Summe, welche alle durch $\frac{x^c}{c!}$ vorgestellt sind, multiplizirt werden; also stellt $\frac{x^a}{a!} \cdot \frac{x^c}{c!}$ eines dieser Produkte, und dann alle diese Produkte vor, wenn, während dem a irgend ein Werth gegeben wird, dem c noch jeder mögliche Werth gegeben werden kann, welches letztere eben dadurch bezweckt wurde, daß man in dem zweiten Aggregat deutsche Buchstaben eingeführt hat, welche dem erstern Aggregat völlig fremd sind. — Untersucht man, welche Summe durch das obige Resultat zur Rechten:

$$S\left[\frac{x^{a+c}}{a!\,c!}\right]_{a+b=4,\ c+d=5}$$

vorgestellt ist, so muß man vor allem die Werthe suchen, welche a, b, c, d aus den Gleichungen $a+b=4$, $c+d=5$ erhalten, und da findet man, als Werthe von a und b, welche der erstern Gleichung $a+b=4$ entsprechen,

a	0	1	2	3	4
b	4	3	2	1	0;

und als Werthe von c und d, welche der Gleichung $c+d=5$ entsprechen:

c	0	1	2	3	4	5
d	5	4	3	2	1	0;

folglich sind die zusammengehörigen Werthe von a, b, c und d, welche beiden Gleichungen zugleich entsprechen:

a	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
b	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
d	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0

und das Aggregat selbst stellt also die Summe vor, welche im Beispiel zu §. 45. Nr. 2.) bereits entwickelt steht, obgleich hier die Glieder in anderer Anordnung sich ergeben, während dort dadurch, daß man noch die neue beschränkende Gleichung $a+c=f$ hinzugefügt, und nachgehends dem f die Werthe 0, 1, 2, 3, ꝛc. gegeben hat, um dann die jedesmaligen Werthe von a und c dazu zu finden, die einzelnen Glieder der Summe sogleich nach den auf einander folgenden Potenzen von x, geordnet erschienen sind.

Beweis fällt in die Augen.

Bemerkung. Bildete man aus:

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=4} \quad \text{und} \quad S\left[\frac{y^a}{a!}\right]_{a+b=4}$$

das neue Aggregat:

$$S\left[\begin{array}{c}\frac{x^{\mathfrak{a}}\cdot y^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{a}!}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=4\end{array}\right],$$

so würde dies nicht das Produkt der beiden erstern Summen sein, sondern nur die Summe derjenigen Produkte vorstellen, welche man erhält, wenn die beiden gegebenen erstern Summen:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

und

$$1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!},$$

so unter einander gesetzt werden, und dann nicht jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern, sondern nur jedes Glied der einen mit dem genau unter ihm stehenden Gliede der andern multiplizirt wird.

§. 58.

Umgekehrt ist klar, daß wenn sich das allgemeine Glied eines Aggregats Σ, als ein Produkt zweier Faktoren **A** und **B** darstellen läßt, welche keinen der deutschen durchlaufenden Buchstaben mit einander gemein haben, und wenn zu gleicher Zeit die beschränkenden Gleichungen in zwei Parthien sich absondern lassen, von denen die eine bloß die deutschen durchlaufenden Buchstaben des einen Faktors, die andere Parthie aber bloß die des andern Faktors enthält, — daß dann dieses Aggregat Σ in ein Produkt zweier Aggregate verwandelt werden kann, von denen jedes, einen der Faktoren **A** oder **B** zum allgemeinen Gliede, und von den beschränkenden Gleichungen nur diejenigen hat, welche gerade die deutschen Buchstaben seines allgemeinen Gliedes enthalten.

So ist z. B.

$$S\left[\begin{array}{c}m_{\mathfrak{a}}\cdot n_{\mathfrak{b}}\cdot x^{\mathfrak{a}}\cdot y^{\mathfrak{b}}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=m,\quad \mathfrak{b}+\mathfrak{d}=n\end{array}\right]=S\left[\begin{array}{c}m_{\mathfrak{a}}\cdot x^{\mathfrak{a}}\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=m\end{array}\right]\times S\left[\begin{array}{c}n_{\mathfrak{b}}\cdot y^{\mathfrak{b}}\\ \mathfrak{b}+\mathfrak{d}=n\end{array}\right].$$

§. 59. Lehrsatz.

In dem allgemeinen Gliede A eines Aggregats S[A], kann selber wieder ein Aggregat S[B] vorkommen (mit eigenen deutschen durchlaufenden Buchstaben), welches das allgemeine Glied B hat. — In diesem Falle ist solches S[A] einem neuen Aggregate S[C] gleich, dessen allgemeines Glied C sich von A nur dadurch unterscheidet, daß wo in A das Aggregat S[B] vorkommt, in C dafür bloß das allgemeine Glied B gesetzt wird; — und dessen beschränkende Gleichungen, die von S[A] und von S[B] zusammengenommen sind.

Beispiel 1. So ist z. B.

$$S\left[\frac{z^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{d}!}\cdot S\left[\frac{x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{d}=3} = S\left[\frac{x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}z^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{d}=3} = S\left[\frac{x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}z^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=3}$$

Denn es stellt für jeden stehenden Werth $\mathfrak{a}$, welcher 0, 1, 2 oder 3 sein kann, das Aggregat:

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}} \quad \text{bald} \quad \frac{x^0y^0}{0!\,0!}, \quad \text{bald} \quad \frac{x^0y^1}{0!\,1!}+\frac{x^1y^0}{1!\,0!}, \quad \text{bald}$$

$$\frac{x^0y^2}{0!\,2!}+\frac{x^1y^1}{1!\,1!}+\frac{x^2y^0}{2!\,0!}, \quad \text{bald} \quad \frac{x^0y^3}{0!\,3!}+\frac{x^1y^2}{1!\,2!}+\frac{x^2y^1}{2!\,1!}+\frac{x^3y^0}{3!\,0!}$$

vor, je nachdem $\mathfrak{a} = 0, 1, 2$ oder 3 ist. Und das ganze Aggregat zur Linken stellt die Summe aller dieser Summen vor, nachdem vorher die erstere noch mit $\frac{z^3}{3!}$, die andere mit $\frac{z^2}{2!}$, die dritte mit $\frac{z^1}{1!}$ und die vierte mit $\frac{z^0}{0!}$ (d. h. mit 1, d. h. gar nicht) multiplizirt worden ist. — Dagegen gibt das Aggregat zur Rechten, wegen $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = 3$, für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Werthe:

$\mathfrak{b}$	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
$\mathfrak{c}$	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
$\mathfrak{d}$	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3

und diese Auflösungen liefern genau dieselben Glieder.

Beispiel 2. Gesetzt, man wüßte (was wirklich nach I. Th. §. 85. Lehrsatz 1.) zutrifft, daß für jeden, zwischen 0 und 4 incl. befindlichen stehenden Werth von $\mathfrak{a}$,

$$(x+y)^{\mathfrak{a}} = S\left[\frac{\mathfrak{a}!}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!}x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}}$$

wäre, so würde in dem Aggregat

$$S\left[\frac{(x+y)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{d}=4}$$

statt $(x+y)^{\mathfrak{a}}$ selber das ihm gleiche Aggregat gesetzt werden können, und der Fall des Paragraphen wäre nun eingetreten. Dann erhielte man aber, nach diesem Lehrsatze, sogleich das einfache Aggregat

$$S\left[\frac{\frac{\mathfrak{a}!}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!}\cdot x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{a}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{d}=4,\ \ \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}}$$

oder auch, weil sich hier $\mathfrak{a}!$ wegdividirt, und $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{a}$ gesetzt werden kann, dieses andere:

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{b}}y^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=4}$$

als Resultat.

Der **Beweis** fällt in die Augen, und beruht darauf, daß die beschränkenden Gleichungen von S[B], während die obigen deutschen Buchstaben irgend Werthe haben, immer für ihre deutschen Buchstaben dieselben Werthe liefern, in dem einen Falle wie in dem andern, während die Form der einzelnen Glieder ebenfalls jedesmal links wie rechts dieselbe bleibt.

§. 60.

Sehr wichtig wird dieser Satz, wenn man ihn umkehrt. — Hat man nämlich ein Aggregat S[C], dessen allgemeines Glied C aus B und noch andern Ausdrücken zusammengesetzt ist, und dessen beschränkende Gleichungen dergestalt abgesondert werden können, daß die eine Parthie a derselben, die in B vorkommenden deutschen Buchstaben gar nicht enthält, während letztere in der andern Parthie b dieser beschränkenden Gleichungen vorkommen; so ist solches Aggregat S[C] allemal einem andern S[A] gleich, welches die Parthie a der beschränkenden Gleichungen, und ein allgemeines Glied A hat, das aus S[B] mit den be-

schränkenden Gleichungen b, genau so zusammengesetzt ist, wie C selbst aus B zusammengesetzt war.

Beispiel. Hat man z. B.

$$S\left[\frac{x^a y^b z^c}{a!\ b!\ c!}\right]_{a+b+c=4},$$

so kann man statt $a+b+c=4$ schreiben $a+b=d$, $c+d=4$; und dann statt dieses Aggregats, dieses andere:

$$S\left[\frac{z^c}{c!}\times S\left[\frac{x^a y^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=d}\right]_{c+d=4}$$

setzen.

Viertes Kapitel.

Von dem binomischen und polynomischen Lehrsatz für Potenzen und Faktoriellen mit ganzen Exponenten. Von den Binomial-Produkten.

Erste Abtheilung.

Der binomische und polynomische Lehrsatz für ganze Potenzen und für ganze Faktoriellen.

§. 61. Lehrsatz.

Sind a und b ganz willkührliche Ausdrücke, m dagegen Null oder eine absolute ganze Zahl, so ist allemal

$$\text{I.}\qquad (a+b)^m = S\left[\begin{matrix} m_b \cdot a^a b^b \\ a+b = m \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix} m_b \cdot a^{m-b} b^b \\ a+b = m \end{matrix}\right];$$

oder welches dasselbe ist:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots[m-(m-2)]}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)}ab^{m-1} + \frac{m(m-1)\cdots[m-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdots m}b^m;$$

oder, weil $m_n = m_{m-n}$ (§. 15. Nr. 2.):

$$(a+b)^m = a^m + m_1 \cdot a^{m-1}b + m_2 \cdot a^{m-2}b^2 + \cdots$$

$$+ m_n \cdot a^{m-n}b^n + \cdots + m_2 \cdot a^2 b^{m-2} + m_1 \cdot ab^{m-1} + b^m,$$

wenn nur, für $r = 0$ oder für jeden positiven ganzen Werth von r, unter m_r der Quotient $\frac{m^{r|-1}}{r!}$ d. h. der Quotient

$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots m-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}$ verstanden wird.

Beweis. 1) Multiplizirt man a+b mit a+b, so erhält man aa+ab+ba+bb; multiplizirt man dies nochmals mit a+b, so wird jedem Gliede a und hernach auch jedem Gliede b als Faktor vorgesetzt, und alle einzelnen Produkte werden zuletzt zu einander addirt. Verfolgt man daher dieses Multipliziren, bis man m mal a+b genommen hat, so erhellet, daß das Endresultat dieser Multiplikation nichts weiter ist, als die Summe, die man erhält, wenn man die m^te^ Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus den beiden Elementen a und b entwickelt, die Verbindungen als Produkte betrachtet, und diese Produkte addirt.

2) Weil aber die m^{te} Klasse der Variationen aus der m^{ten} Klasse der Kombinationen erhalten wird, wenn man die Verbindungen der letztern zugleich mit allen ihren Versetzungen nimmt; weil ferner alle Verbindungen, die aus denselben Elementen bestehen, wenn sie als Produkte betrachtet werden, einander gleich sind, folglich die Summe aller dieser erhalten wird, wenn man die eine davon mit der Anzahl aller, d. h. mit der Versetzungszahl multiplizirt; — so erhält man eine gleiche Summe, wenn man die m^{te} Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den beiden Elementen a und b entwickelt, die Verbindungen als Produkte betrachtet, ihnen ihre Versetzungszahl als Faktor vorsetzt, und dann diese Produkte zu einander addirt.

3) Nun stellt aber

$$a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$$
$$\alpha+\beta = m$$

eine jede Verbindung dieser erwähnten m^{ten} Klasse der Kombinationen vor §. 40.). Die Versetzungszahl dieser Verbindung ist dagegen (nach §. 27. II.)

$$= \frac{m!}{\alpha!\ \beta!}, \quad \text{oder} \quad = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!}.$$
$$= (\alpha+\beta)_{\beta} \qquad = m_{\beta} \qquad (§.\ 21.).$$

Folglich ist das Produkt einer jeden Verbindung in ihre Versetzungs-Zahl

$$= m_{\beta} \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta},$$

wo $\alpha+\beta = m$ ist.

4) Und da endlich das Aggregat:

$$S\left[\begin{matrix} m_{\mathfrak{b}} \cdot a^{\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = m \end{matrix}\right]$$

die Summe aller dieser Produkte vorstellt, so ist (nach 2.) dieses Aggregat $= (a+b)^m$.

§. 62.

Weil dieser Satz so höchst wichtig ist, so mag er hier noch einmal in seinen verschiedenen Formen stehen, deren jede in besondern Fällen der Anwendung, ihre eigenthümliche Bequemlichkeit gewährt. Es ist nämlich, wenn m entweder 0 oder eine ganze positive Zahl ist:

$$(a+b)^m$$

$$= S\left[\begin{matrix} m_\mathfrak{b} \cdot a^\mathfrak{a} b^\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix} m_\mathfrak{b} \cdot a^{m-\mathfrak{b}} b^\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right] = S\left[m_\mathfrak{b} \cdot a^{m-\mathfrak{b}} b^\mathfrak{b} \right] \text{*)}$$

$$= S\left[\begin{matrix} \frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} a^\mathfrak{a} b^\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix} \frac{m^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} a^\mathfrak{a} b^\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right] = S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!} a^{m-\mathfrak{b}} b^\mathfrak{b} \right]$$

$$= S\left[\begin{matrix} \frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} a^\mathfrak{a} b^\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix} \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot a^\mathfrak{a} b^\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right] = m!\; S\left[\begin{matrix} \frac{a^\mathfrak{a}\; b^\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right]$$

$$= S\left[m^{\mathfrak{b}|-1} a^{m-\mathfrak{b}} \cdot \frac{b^\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}!} \right] = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Und man kann dem Anfänger nicht dringend genug anrathen, alle diese Formen, unter denen immer derselbe Satz wieder erkannt werden kann, sich recht tief einzuprägen, weil fast alle spätern Untersuchungen auf diesen Satz zurückgeführt werden, und auf ihn sich gründen.

Auch mag hier noch eine Form stehen, wie sie in den Elementen zuweilen brauchbar gefunden wird. Dividirt man nämlich das $n+1^{te}$ Glied (wo $\mathfrak{b}=n$ genommen ist), nämlich $m_n a^{m-n} b^n$, durch das n^{te} Glied, nämlich durch $m_{n-1} a^{m-n+1} b^{n-1}$,

---

*) Es scheint zwar, daß indem hier die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m$ weggelassen wird, dem $\mathfrak{b}$ dadurch alle Werthe zukommen können, welche größer wie m sind, und daß der Ausdruck (das Aggregat) jetzt eine Summe von unendlich vielen Gliedern vorstelle, statt daß es kurz vorher nur eine Summe von m+1 Gliedern repräsentirte. Und dem ist in der That so. Allein wenn man bedenkt, daß (nach §. 15. Nr. 4.) $m_\mathfrak{b}$ allemal Null wird, so oft man $\mathfrak{b}>m$ nimmt, so erkennt man sogleich, daß diese letztern, nach dem $m+1^{ten}$ folgenden Glieder alle $=0$ sind, daher eben so gut hinzugedacht, als auch wiederum weggelassen werden können.

so erhält man $\left(\text{weil } \frac{m_n}{m_{n-1}} = \frac{m^{n|-1}}{n!} : \frac{m^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{m-n+1}{n}\right.$ ist$\left.\right)$ zum Quotienten $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{b}{a}$. Umgekehrt erhält man also das $n+1^{te}$ Glied aus dem nächstvorhergehenden n^{ten} Gliede, wenn man letzteres mit $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{b}{a}$ multiplizirt. Wird daher das erste Glied a^m der Summe:

$$a^m + m \cdot a^{m-1}b + m_2 \cdot a^{m-2}b^2 + \cdots\cdots + b^m,$$

welche $=(a+b)^m$ ist, durch P_0, die übrigen Glieder aber der Reihe nach durch $P_1, P_2, P_3, \cdots P_{n-1}, P_n, \cdots$ bezeichnet, so finden sich diese einzelnen Glieder so auseinander:

$$\begin{aligned}
P_0 &= a^m, \\
P_1 &= m \cdot \frac{b}{a} \cdot P_0, \\
P_2 &= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_1, \\
P_3 &= \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_2, \\
P_4 &= \frac{m-3}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_3, \\
&\vdots \\
P_n &= \frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_{n-1},
\end{aligned}$$

u. s. w. f.

§. 62^{bis}.

Endlich machen wir noch auf die letzte der obigen Formen aufmerksam, nämlich (indem wir zugleich x statt a, und h statt b setzen) auf die Form

$$\text{I.} \qquad (x+h)^m = S\left[m^{\mathfrak{b}|-1} x^{m-\mathfrak{b}} \cdot \frac{h^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\right],$$

welche auf gewöhnliche Weise so geschrieben werden muß:

$$\text{II.}\quad (x+h)^m = x^m + mx^{m-1}\cdot h + m(m-1)x^{m-2}\cdot\frac{h^2}{2!}$$
$$+m(m-1)(m-2)x^{m-3}\cdot\frac{h^3}{3!}+m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}\cdot\frac{h^4}{4!}$$
$$+m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5}\cdot\frac{h^5}{5!}+\cdots\cdots$$

Denn man sieht hier, wie die einzelnen Glieder der Summe zur Rechten nach ganzen Potenzen von h fortlaufen, und wie von den Koeffizienten

x^m, mx^{m-1}, $m(m-1)x^{m-2}$, $m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, 2c. 2c. 2c.

der Ausdrücke $\frac{h^0}{0!}$, $\frac{h^1}{1!}$, $\frac{h^2}{2!}$, $\frac{h^3}{3!}$, 2c. 2c. 2c., jeder aus seinem nächstvorhergehenden gefunden wird, dadurch daß man den letztern mit seinem Exponenten von x multiplizirt, nachgehends aber den Exponenten der Potenz von x, um eine Einheit vermindert. — Ein Gesetz, was wir später für die Summen solcher Potenzen, etwa von der Form:

$$A(x+h)^m+B(x+h)^n+C(x+h)^p+ \text{ 2c. 2c.},$$

in Anspruch nehmen werden, wenn es darauf ankommt, für das ganze Resultat der Umwandlung in eine nach Potenzen von h fortlaufende Summe, bequeme mechanische Vorschriften zu erhalten.

§. 63.

Setzt man aber (im §. 62.) $-b$ statt b, so erhält man noch:

$$(a-b)^m = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot m_{\mathfrak{b}}\cdot a^{m-\mathfrak{b}}b^{\mathfrak{b}}\right] = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{m!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!}\cdot a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$
$$= S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}}\cdot a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m} = m!\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{a^{\mathfrak{a}}\ b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$
$$= S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m} = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$
$$= S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}a^{m-\mathfrak{b}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right] = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}m^{\mathfrak{b}|-1}a^{m-\mathfrak{b}}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\right];$$

d. h.

$$(a-b)^m = a^m - m\cdot a^{m-1}b + m_2\cdot a^{m-2}b^2 - m_3\cdot a^{m-3}b^3 + m_4\cdot a^{m-4}b^4 - \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

wo $m_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$,

$m_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, u. s. w. f. ist.

Anmerkung 1. Der Satz des §. 61.) heißt gewöhnlich der binomische Lehrsatz. Man hätte ihn auch dadurch erweisen können, daß man seine Gültigkeit nach und nach für alle auf einander folgende ganzen positiven Zahlen erwiesen, und zu dem Ende gezeigt hätte, wie er für $m = h+1$ gelten müsse, so oft er für $m = h$ gilt, während die ersten Versuche lehren, daß er für $m = 2, 3,$ ꝛc. ꝛc. zutrifft. — Bei diesem Beweise muß die Formel für $m = h$ nochmal mit $a+b$ multiplizirt, und dann der Satz angewandt werden, nach welchem

$$x_n + x_{n+1} = (x+1)_{n+1} \quad \text{ist.}$$

Anmerkung 2. Setzt man in dem binomischen Lehrsatze statt m, nach und nach 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ꝛc., so erhält man, besonders leicht, sobald die Tabelle der pag. 18.) zu Hilfe genommen wird:

1) $(a\pm b)^1 = a\pm b$;

2) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

3) $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

4) $(a\pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$;

5) $(a\pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$;

6) $(a\pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$;

7) $(a\pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$;

8) $(a\pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8$;

9) $(a\pm b)^9 = a^9 \pm 9a^8b + 36a^7b^2 \pm 84a^6b^3 + 126a^5b^4 \pm 126a^4b^5 + 84a^3b^6 \pm 36a^2b^7 + 9ab^8 \pm b^9$;

u. s. w. f.

Anmerkung 3. Setzt man in den §§. 61. und 63.) 1 statt a, und c statt b, so erhält man noch die Formen:

$$(1+c)^m = S[\;m_{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{a}}\;] = S\left[\frac{m^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} c^{\mathfrak{a}}\right] = \text{etc. etc. etc.}$$

$$\text{und } (1-c)^m = S[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot m_{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{a}}] = S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{m^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} c^{\mathfrak{a}}\right] = \text{etc. etc. etc.}$$

Umgekehrt kann man aber auch aus diesen speziellen Formeln die frühern wiederum ableiten, wenn man $\frac{b}{a}$ statt c setzt, und dann noch links und rechts mit a^m multiplizirt.

§. 64. Lehrsatz.

Ist m Null oder eine absolute ganze Zahl, so hat man:

$$\text{II.}\quad (a+b+c)^m = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m}$$

$$= S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!} a^{m-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}} b^{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{c}}\right].$$

Beweis ist ganz derselbe, wie der §. 61.) geführte, der also nur mit sehr geringen Modifikationen hier wiederholt werden darf.

Beispiel. Es sei $(a+b+c)^4$ zu entwickeln; so hat man

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 4,$$

also die Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,

$\mathfrak{a}$	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$\mathfrak{b}$	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
$\mathfrak{c}$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4;

und deshalb liefert die Formel II.) 15 Glieder, nämlich:

$$(a+b+c)^4 = a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c+12abc^2$$
$$+4ac^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4.$$

Anmerkg. Man kann diesen Satz auch sehr leicht unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz §. 61.) selbst ableiten. Es ist nämlich:

$$(a+b+c)^m = [(a+(b+c)]^m = S\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{f})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{f}!} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot (b+c)^{\mathfrak{f}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{f}=m}.$$

Aber es ist auch:

$$(b+c)^f = \left[\frac{f!}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=f},$$

wo $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ als durchlaufend anzusehen sind; folglich (nach §. 59.):

$$(a+b+c)^m = S\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{f})!\ \mathfrak{f}!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{f}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{f}=m,\ \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{f}}$$

$$= S\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m} \quad (§. 45.).$$

§. 65.

Ist ferner m eine absolute ganze Zahl, so ist noch:

$$\text{III.} \qquad (a+b+c+d)^m = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!\ \mathfrak{d}!} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdot d^{\mathfrak{d}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m};$$

und so für die m^{te} Potenz eines jeden Polynoms; welches sowohl nach Art des im §. 61. geführten Beweises, als auch nach Anmerkg. zu §. 64. abgeleitet werden kann.

Auch könnten II. III. 2c. 2c. nach Anmerk. 1. zu §. 63. bewiesen werden.

Anmerkung. Der Satz II. heißt gewöhnlich der trinomische, III. dagegen der quadrinomische; so wie der allgemeinere der polynomische Lehrsatz genannt wird.

§. 66. Aufgabe.

Weil die Faktoriellen in Potenzen übergehen, so oft die Differenz $=0$ gesetzt wird, so entsteht die Frage, ob nicht, so wie eben für die Potenz $(a+b)^m$, so auch für die Faktorielle $(a+b)^{m|r}$ eine ähnliche Entwickelung (Umformung) in eine Summe von, nach ähnlichem Gesetze fortlaufenden Gliedern statt finden werde.

Auflösung. Es ist (nach §. 8. und §. 6.):

$$a^{1|r} = a, \quad b^{1|r} = b \quad \text{und} \quad a^{k|r} \cdot (a+kr) = a^{k+1|r}; \quad \text{also:}$$

1) $(a+b)^{1|r} = a+b.$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $a+b+r$, links und rechts, und zwar rechts erstlich a, dann b, so kann man $a+b+r$ bald so trennen, daß $(a+r)+b$, bald aber so trennen, daß $a+(b+r)$ daraus wird, und man erhält dann:

$$(a+b)^{2|r} = a(a+r)+2ab+b(b+r),$$

d. h. 2) $(a+b)^{2|r} = a^{2|r} + 2 \cdot a^{1|r} b^{1|r} + b^{2|r}.$

Multiplizirt man hier wieder links und rechts mit $a+b+2r$, so aber, daß man bei dem Multipliziren den Multiplikator $a+b+2r$, bald in $(a+2r)+b$, bald in $(a+r)+(b+r)$, zuletzt in $a+(b+2r)$ umwandelt, je nachdem rechts das erste, das zweite oder das dritte Glied multiplizirt wird, so ergibt sich augenblicklich, wenn man zuletzt die gleichnamigen Glieder addirt:

3) $(a+b)^{3|r} = a^{3|r} + 3 \cdot a^{2|r} b^{1|r} + 3 \cdot a^{1|r} b^{2|r} + b^{3|r}.$

Multiplizirt man hier nochmals links und rechts mit $a+b+3r$, bald als $(a+3r)+b$, bald als $(a+2r)+(b+r)$, bald als $(a+r)+(b+2r)$, bald als $a+(b+3r)$ geschrieben, je nachdem rechts das erste, zweite, dritte oder vierte Glied multiplizirt wird, so erhält man sogleich, wie vorhin:

4) $(a+b)^{4|r} = a^{4|r} + 4 \cdot a^{3|r} b^{1|r} + 6 \cdot a^{2|r} b^{2|r} + 4 \cdot a^{1|r} b^{3|r} + b^{4|r}.$

Man könnte so fortfahren, links und rechts mit $a+b+4r$, $a+b+5r$, u. s. w. f. zu multipliziren, und würde, ähnliche Zerlegungen des Multiplikators vornehmend, für $(a+b)^{5|r}$, $(a+b)^{6|r}$, 2c. 2c. eine Summe von Gliedern erhalten, welche, so wie die vorstehenden vier ersten, in den Koeffizienten, wie in den Exponenten, genau mit denen der Potenz-Umwandlungen für $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, 2c. 2c. übereinstimmen.

Um nun dieses Gesetz allgemein zu bestätigen, darf man nur nachweisen, daß wenn solches für irgend einen Exponenten h gilt, dasselbe für den nächstfolgenden Exponenten $h+1$ jedesmal auch

gelten müsse. — Gesetzt also, es treffe zu, daß (nicht für jeden ganzen Werth von h, sondern) nur für einen einzigen ganzen Werth von h,

5) $(a+b)^{h|r} = S[h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}]$

gefunden worden sei (wie solches z. B. wirklich (in Nr. 4.) gefunden ist, für $h = 4$), so multiplizire man links und rechts mit $a+b+hr$, diesen Faktor jedoch für jedes einzelne zu multiplizirende Glied, anders, und namentlich für das durch $h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} b^{\mathfrak{b}|r}$ vorgestellte und zu multiplizirende Glied, in $[a+(h-\mathfrak{b})r]+(b+\mathfrak{b}r)$ zerlegend. Man erhält dann (nach §. 55.):

$$(a+b)^{h+1|r} = S[h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h+1-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r} + h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}+1|r}],$$

wo jedoch $\mathfrak{b}$ ein durchlaufender Buchstabe ist, und nach und nach 0 und jede ganze Zahl vorstellt. Weil aber das allgemeine Glied des Aggregats zur Rechten eine Summe ist, so ist (nach §. 53.) noch:

$$(a+b)^{h+1|r} = S[h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h+1-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}] + S[h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}+1|r}].$$

Sondert man hier (nach §. 49.) von dem erstern Aggregat zur Rechten das erste Glied ab, dadurch, daß man $\mathfrak{b} = 0$ und dann $\mathfrak{b}+1$ statt $\mathfrak{b}$ setzt, so hat man weiter:

$$(a+b)^{h+1|r} = a^{h+1|r} + S[h_{\mathfrak{b}+1} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}+1|r}] + S[h_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}+1|r}].$$

Und weil man jetzt die beiden Aggregate zur Rechten bequem addiren kann, weil ferner auch

$$h_{\mathfrak{b}+1} + h_{\mathfrak{b}} = (h+1)_{\mathfrak{b}+1}$$

ist, so folgt noch:

$$(a+b)^{h+1|r} = a^{h+1|r} + S[(h+1)_{\mathfrak{b}+1} \cdot a^{h-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}+1|r}],$$

welches Resultat zur Rechten, wenn §. 50. angewandt, also $\mathfrak{b}-1$ statt $\mathfrak{b}$ und in dem neuen Aggregat $\mathfrak{b} = 0$ gesetzt wird, in

6) $(a+b)^{h+1|r} = S[(h+1)_{\mathfrak{b}} \cdot a^{h+1-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}]$

übergeht *).

---

*) Um die nöthige Fertigkeit in der Behandlung der kombinatorischen

Weil nun dieses Resultat kein anderes ist, als was aus

$\odot)\cdots\quad (a+b)^{m|r} = S[m_{\mathfrak{b}} \cdot a^{m-\mathfrak{b}|r} \cdot b^{\mathfrak{b}|r}]$

hervorgeht, wenn $h+1$ statt m gesetzt wird, so muß die Formel $\odot$) gelten für alle ganzen Zahlen, die statt m gesetzt werden mögen, weil sie gilt (nach 1.—4.) wenn $m=1$, $=2$, $=3$, $=4$, gesetzt wird, und weil bewiesen ist, daß sie allemal auch für die nächstfolgende ganze Zahl $h+1$ (statt m gesetzt) gelten muß, so oft sie für eine gewisse Zahl h (statt m) gilt *).

§. 67.

Es ist also allemal, wenn m Null oder eine positive ganze Zahl ist:

$$\text{I.}\quad (a\pm b)^{m|r} = S[m_{\mathfrak{b}} \cdot a^{m-\mathfrak{b}|r}(\pm b)^{\mathfrak{b}|r}] = S\left[\begin{matrix} m_{\mathfrak{b}} \cdot a^{m-\mathfrak{b}|r}(\pm b)^{\mathfrak{b}|r} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right]$$

$$= S\left[\begin{matrix}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}} \cdot a^{\mathfrak{a}|r}(\pm b)^{\mathfrak{b}|r} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m\end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix}\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} a^{\mathfrak{a}|r}(\pm b)^{\mathfrak{b}|r} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m\end{matrix}\right].$$

Und so wie in dieser Gleichung, $r=0$ gesetzt wird, so hat man wieder den binomischen Lehrsatz für Potenzen, in seinen verschiedenen Formen.

Aggregate sich zu verschaffen, thut man wohl (besonders bei dem Unterricht) jede solche Arbeit zu wiederholen, dabei aber die Aggregaten-Bezeichnung wegzulassen und die Reihen selbst dafür zu setzen.

*) Man würde jedoch sehr im Irrthum sein, wenn man mit Kramp und so vielen Anderen annehmen wollte, daß dieser binomische Lehrsatz für Faktoriellen auch dann noch gelten müsse, wenn m eine gebrochene Zahl, oder gar wenn m allgemein ist. Im Gegentheil findet man (im VIII. Th. dieses Werkes), daß wenn m eine ganze oder gebrochene Zahl ist, und wenn im letztern Falle die Reihe konvergirt, dann

$$S[m_{\mathfrak{b}} \cdot a^{m-\mathfrak{b}|1} \cdot b^{\mathfrak{b}|1}] = \frac{(a+b)^{m|1} \cdot \mathit{Sin}\, a\pi \cdot \mathit{Sin}\,(a+b+m)\pi}{\mathit{Sin}\,(a+m)\pi \cdot \mathit{Sin}\,(a+b)\pi}$$

sein müsse, wo man nun sogleich sieht, daß, wenn m eine positive ganze Zahl ist, der Ausdruck zur Rechten sich auf $(a+b)^{m|1}$ reduzirt, dagegen im Allgemeinen ein ganz anderer und namentlich nicht $=(a+b)^{m|1}$ wird, wenn m eine gebrochene Zahl ist.

§. 68.

Hieraus folgt noch, wenn m Null oder eine absolute ganze Zahl ist,

$$\text{II.}\quad (a+b+c)^{m|r} = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\;\mathfrak{b}!\;\mathfrak{c}!}\cdot a^{\mathfrak{a}|r}\cdot b^{\mathfrak{b}|r}\cdot c^{\mathfrak{c}|r}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m};$$

$$\text{III.}\quad (a+b+c+d)^{m|r} = S\left[\frac{m!}{\mathfrak{a}!\;\mathfrak{b}!\;\mathfrak{c}!\;\mathfrak{d}!}\cdot a^{\mathfrak{a}|r}\cdot b^{\mathfrak{b}|r}\cdot c^{\mathfrak{c}|r}\cdot d^{\mathfrak{d}|r}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m};$$

u. s. w. f.;

welche Formeln aus §. 67. I.) genau so abgeleitet werden, wie in der Anmerkg. zu §. 64. für ähnliche Sätze gezeigt ist.

Anmerkung. Die Formeln I. II. III. rc. rc. heißen bezüglich: der binomische, der trinomische, der quatrinomische, und allgemein der polynomische Lehrsatz für ganze Faktoriellen.

§. 69.

Setzt man hier $r=-1$, und dividirt man dabei durch $m!$ (nach §. 55.), so erhält man:

$$1)\quad \frac{(a+b)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{\mathfrak{a}|-1}\cdot b^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\;\mathfrak{b}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m} = S\left[\frac{a^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m};$$

$$2)\quad \frac{(a+b+c)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{c^{\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{c}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=m};$$

$$3)\quad \frac{(a+b+c+d)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{c^{\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{c}!}\cdot\frac{d^{\mathfrak{d}|-1}}{\mathfrak{d}!}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m};$$

u. s. w. f.; d. h. (nach §. 14.)

$$\text{I.}\quad (a+b)_m = S\left[a_{\mathfrak{a}}\cdot b_{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m};$$

oder:

$$(a+b)_m = a_m + a_{m-1}\cdot b + a_{m-2}\cdot b_2 + a_{m-3}\cdot b_3 + \cdots + a_3 b_{m-3} + a_2 b_{m-2} + a b_{m-1} + b_m.$$

$$\text{II.} \quad (a+b+c)_m = S\left[\begin{matrix} a_{\mathfrak{a}} \cdot b_{\mathfrak{b}} \cdot c_{\mathfrak{c}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = m \end{matrix}\right];$$

$$\text{III.} \quad (a+b+c+d)_m = S\left[\begin{matrix} a_{\mathfrak{a}} \cdot b_{\mathfrak{b}} \cdot c_{\mathfrak{c}} \cdot d_{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = m \end{matrix}\right];$$

u. s. w. f.; alles unter der Voraussetzung, daß m Null oder eine absolute ganze Zahl, a, b, c, d, ꝛc. ꝛc. aber ganz beliebige Ausdrücke sind. — Dies sind aber sehr brauchbare Relationen zwischen den Binomial-Koeffizienten.

§. 70.

Setzt man in I.) $-a$ statt b, so hat man (nach §. 15. Nr. 5.), wenn m nicht Null, sondern eine absolute ganze Zahl ist:

$$0 = S\left[\begin{matrix} a_{\mathfrak{a}} \cdot (-a)_{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = m \end{matrix}\right];$$

oder

$$0 = a_m + a_{m-1} \cdot (-a) + a_{m-2} \cdot (-a)_2 + a_{m-3} \cdot (-a)_3 + \cdots$$
$$+ a_3 \cdot (-a)_{m-3} + a_2 \cdot (-a)_{m-2} + a \cdot (-a)_{m-1} + (-a)_m,$$

wo a einen ganz allgemeinen Ausdruck vorstellt, welcher eben so gut reell, als auch imaginär sein kann, wenn nur m eine ganze positive Zahl und nicht Null ist.

Zweite Abtheilung.

Von den Binomial-Produkten.

§. 71. Aufgabe.

Man soll das Produkt der μ Faktoren:

$$x+a_1, \quad x+a_2, \quad x+a_3, \quad x+a_4, \quad \cdots\cdots \; x+a_\mu,$$

wo $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots a_\mu$ beliebige Ausdrücke vorstellen, welche x nicht enthalten, — in eine nach Potenzen von x geordnete algebraische Summe umformen.

Auflösung. Man multiplizire zuerst $x+a_1$ mit $x+a_2$ so erhält man:

1) $(x+a_1)(x+a_2) = x^2+(a_1+a_2)x+a_1 \cdot a_2$.

Multiplizirt man diese Gleichung wieder mit $x+a_3$, so ergibt sich sogleich:

2) $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+$
$(a_1 \cdot a_2+a_1 \cdot a_3+a_2 \cdot a_3)x+a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$.

Und multiplizirt man hier wieder mit $x+a_4$, so ergibt sich noch:

3) $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3$
$+(a_1 \cdot a_2+a_1 \cdot a_3+a_1 \cdot a_4+a_2 \cdot a_3+a_2 \cdot a_4+a_3 \cdot a_4)x^2$
$+(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3+a_1 \cdot a_2 \cdot a_4+a_1 \cdot a_3 \cdot a_4+a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)x+a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$.

Betrachtet man nun diese Resultate zur Rechten, so findet man, daß die einzelnen Koeffizienten von x, nichts anders als die einzelnen Kombinations-Klassen sind, ohne Wiederholungen, aus den Elementen a_1 und a_2, — oder a_1, a_2 und a_3, — oder a_1, a_2, a_3 und a_4 entwickelt; und man kann also muthmaßen, daß das obige Produkt von μ Faktoren

$$= S[\overset{a}{C}_\mu \cdot x^{\mu-a}] \quad \cdots\cdots (A)$$

sein werde, unter $\overset{a}{C}_\mu$ die a^{te} Klasse der Kombinationen verstanden, ohne Wiederholungen, aus den μ Elementen $a_1, a_2, \cdots a_\mu$, entwickelt, die Verbindungen als Produkte angesehen und zu einander addirt; und unter $\overset{0}{C}_\mu$ die 1 verstanden.

Um nun diese Vermuthung zur Gewißheit zu erheben, zeige man nur wiederum, daß sich dieses Gesetz für $h+1$ statt μ bestätigt, so oft solches für h statt μ zutrifft, unter h nicht jeden, sondern einen einzigen Werth von μ verstanden.

Gesetzt also, es träfe zu, daß für einen einzigen Werth von h, wirklich sei:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_h) = S\left[\overset{a}{C}_h \cdot x^{h-a}\right]_{a+b=h},$$

die Kombinations-Klassen aus den h Elementen $a_1, a_2, \cdots a_h$ entwickelt, so multiplizire man diese Gleichung abermals mit $x+a_{h+1}$, und man erhält:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{h+1}) = S\Big[\overset{a}{C}_h \cdot x^{h+1-a} + a_{h+1}\cdot\overset{a}{C}_h\cdot x^{h-a}\Big]_{a+b=h}$$

$$= S\Big[\overset{a}{C}_h\cdot x^{h+1-a}\Big]_{a+b=h} + S\Big[a_{h+1}\cdot\overset{a}{C}_h\cdot x^{h-a}\Big]_{a+b=h}.$$

Sondert man aber in dem erstern Aggregat das erste Glied ab, dadurch, daß man zuerst $a=0$, dann $a+1$ statt a setzt, und sondert man in dem andern Aggregat das letzte Glied ab, dadurch, daß man $b=0$ und $b+1$ statt b setzt, und vereinigt man die entstehenden Aggregate, so findet sich dasselbe vorstehende Produkt (aus den $h+1$ Faktoren)

$$= x^{h+1} + S\Big[(\overset{a+1}{C}_h + a_{h+1}\cdot\overset{a}{C}_h)\cdot x^{h-a}\Big]_{a+b=h-1} + \overset{h}{C}_h\cdot a_{h+1} \quad \cdots (B).$$

Uebersieht man aber die Art und Weise, wie in den §§. 26. 27 die Entwicklung der Kombinations-Klassen stattgefunden hat, so erhellet leicht, daß die $(a+1)^{te}$ Klasse dieser Kombinationen, aus den $h+1$ Elementen:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_h,\ a_{h+1}$$

erhalten wird, wenn man dieselbe $(a+1)^{te}$ Klasse zuerst aus den h Elementen $a_1, a_2, \cdots a_h$, entwickelt, (dies giebt alle die Verbindungen, welche das letzte Element a_{h+1} nicht enthalten); dann aber allen Verbindungen der vorhergehenden a^{ten} Klasse (aus denselben h Elementen $a_1, a_2, \cdots a_h$ entwickelt) noch das letzte Element a_{h+1} hinzufügt (dies gibt alle die Verbindungen der gesuchten $(a+1)^{ten}$ Klasse, welche auch das letzte, $(h+1)^{te}$ Element a_{h+1} enthalten); also daß ist

$$\overset{a+1}{C}_h + \overset{a}{C}_h\cdot a_{h+1} = \overset{a+1}{C}_{h+1}.$$

Und bemerkt man zu gleicher Zeit, daß $\overset{h}{C}_h$ nichts weiter ist, als das Produkt aller h Elemente: $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4 \cdots\cdot a_h$, so fällt in

die Augen, daß $\overset{h}{C}_h \cdot a_{h+1}$ nichts weiter sein kann, als das Produkt aller $h+1$ Elemente: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_h \cdot a_{h+1}$, welches auch unter $\overset{h+1}{C}_{h+1}$ verstanden wird; so verwandelt sich obiges Produkt ...(B) in:

$$x^{h+1} + S\left[\overset{\mathfrak{a}+1}{C}_{h+1} \cdot x^{h-\mathfrak{a}} \atop \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = h-1\right] + \overset{h+1}{C}_{h+1},$$

welches Resultat sich sogleich wieder in:

$$S\left[\overset{\mathfrak{a}}{C}_{h+1} \cdot x^{h+1-\mathfrak{a}} \atop \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = h+1\right]$$

umwandelt, wenn man zweimal hinter einander den §. 50.) auf die Art in Anwendung bringt, wie solches im §. 54. in einem ähnlichen Falle zu sehen ist; und dieses Resultat geht offenbar aus A.) hervor, wenn $h+1$ statt μ gesetzt wird.

Also findet sich für alle ganzen Zahlen, welche nach und nach statt μ gesetzt werden, das Produkt von den μ Faktoren:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) \cdots (x+a_\mu) = S\left[\overset{\mathfrak{a}}{C}_\mu \cdot x^{\mu-\mathfrak{a}} \atop \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu\right],$$

unter $\overset{0}{C}_\mu$ die Einheit (1) und unter $\overset{\mathfrak{a}}{C}_\mu$ die $\mathfrak{a}^{te}$ Klasse der Kombinationen verstanden, ohne Wiederholungen aus den μ Elementen a_1, a_2, a_3, ... a_μ entwickelt, die Verbindungen als Produkte genommen und alle zu einander addirt.

Beispiele. So findet sich augenblicklich:

$$(x-1)(x+2)(x-4)(x+1) = x^4 + \overset{1}{C} \cdot x^3 + \overset{2}{C} \cdot x^2 + \overset{3}{C} \cdot x + \overset{4}{C}$$

die Kombinations-Klassen aus den Elementen: -1, $+2$, -4 und $+1$ entwickelt; so daß man hat:

$\overset{1}{C} = -1+2-4+1 = -2,$

$\overset{2}{C} = (-1)2+(-1)(-4)+(-1)(+1)+2(-4)+2(+1)+(-4)1 = -9,$

$\overset{3}{C} = (-1)2(-4)+(-1)2 \cdot 1+(-1)(-4)1+2(-4)1 = +2;$

und

$\overset{4}{C} = (-1)2(-4)1 = +8,$

also daß obiges Produkt $= x^4-2x^3-9x^2+2x+8$ wird.

Auf dieselbe Weise findet sich, die Kombinations-Klassen entwickelnd:

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = x^3-6x^2+11x-6,$$
$$(x+7)\cdot(x-5)\cdot(x-1) = x^3+x^2-37x+35,$$
$$(x-6)\cdot(x+4)\cdot(x+2) = x^3 \quad -28x-48,$$
$$(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x^4 \quad -10x^2+9.$$

§. 72.

Auf dieselbe Weise findet sich das Produkt der μ Faktoren:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_\mu) = S\left[(-1)^a\cdot \overset{a}{C}_\mu \cdot x^{\mu-a}\right]_{a+b=\mu},$$

wo die rechts vorgestellten Glieder mit dem (+)- und (−)-Zeichen abwechseln, so wie nach und nach für a, 0 und gerade Zahlen, oder ungerade Zahlen zu stehen kommen, weil im erstern Fall +1, im andern −1 statt $(-1)^a$ gesetzt wird.

Anmerkung. Werden die Elemente a_1, a_2, a_3, $a_4 \cdots a_\mu$ alle einander gleich, und alle $=a$, so erhält man aus den §§ 71. und 72.) sogleich wieder $(x\pm a)^\mu$, d. h. genau wieder den binomischen Lehrsatz für Potenzen.

Denkt man sich aber unter den Elementen:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots a_\mu,$$

bezüglich b, $b+r$, $b+2r$, $b+3r$, $\cdots$ $b+(\mu-1)r$, vorgestellt, so ist das Produkt der μ Faktoren im §. 71.) nichts anders als die Faktorielle $(x+b)^{\mu|r}$, so daß man noch hat:

$$(x+b)^{\mu|r} = S\left[\overset{a}{C}_\mu \cdot x^{\mu-a}\right]_{a+b=\mu}$$

unter $\overset{0}{C}_\mu$ die 1, und unter $\overset{a}{C}_\mu$ die a^{te} Klasse der Kombinationen verstanden, aus den μ Elementen: b, $b+r$, $b+2r$, $\cdots\cdot$ $b+(\mu-1)r$, entwickelt, ohne Wiederholungen, und die einzelnen Verbindungen als Produkte angesehen, welche alle zu einander addirt werden müssen; und wo μ eine positive ganze Zahl ist.

Beispiele. So findet sich:

$$(x+b)^{4|r} = x^4+(4b+6r)\cdot x^3+(6b^2+18br+11r^2)\cdot x^2$$
$$+(4b^3+18b^2r+22br^2+6r^3)\cdot x$$
$$+(b^4+6b^3r+11b^2r^2+6br^3);$$

und

$$(x-b)^{4|r} = x^4-(4b-6r)\cdot x^3+(6b^2-18br+11r^2)\cdot x^2$$
$$-(4b^3-18b^2r+22br^2-6r^1)\cdot x$$
$$+(b^4-6b^3r+11b^2r^2-6br^3);$$

u. s. w. f.

Fünftes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen eines einzigen veränderlichen Ausdrucks x.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Eigenschaften dieser ganzen Funktionen von x.

Vorerinnerung.

Wir haben zwar schon im I. Th. dieses Werkes (§. 116. seq.) von den ganzen Funktionen von x gesprochen, aber nur gleichsam beispielsweise, um die vorgetragenen Lehren der früheren Kapitel an einem recht anschaulichen Falle zur Anwendung bringen zu können. Hier folgt nun eine gründlichere Theorie dieser „ganzen Funktionen von x", der dieselbe Definition vorausgeht, welche wir im ersten Theile dieses Werkes der Bequemlichkeit wegen bereits gegeben haben.

§. 73. Erklärung.

Jeder Ausdruck von der Form

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m,$$

wo A, B, C, D ... Null oder beliebige andere, von x unabhängige Ausdrücke sind, heißt eine ganze Funktion von x, und zwar vom m^{ten} Grade, wenn M nicht Null ist; während die (von x unabhängigen) Ausdrücke A, B, C ... M, die Koeffizienten derselben genannt werden. Diese ganze Funktion von x, heißt steigend geordnet, wenn sie wie die obige ist, — fallend dagegen, wenn ihre Glieder in umgekehrter Ordnung geschrieben sind.

Diese ganze Funktion von x heißt eine reelle, wenn, während x noch jeden, sowohl reellen, als auch imaginären Werth

bedeutet, d. h. während x noch ganz allgemein ist, alle Koeffizienten reelle Zahlen sind; sie heißt imaginär, wenn diese Koeffizienten zum Theil oder alle imaginär sind; sie heißt endlich eine allgemeine, wenn die Koeffizienten (zum Theil oder alle) noch ganz allgemein sind, und eben sowohl noch reell, als imaginär werden können.

In einer solchen ganzen Funktion von x, heißt x der Veränderliche (Ausdruck), die Funktion selber dagegen, der von x abhängig veränderliche Ausdruck. — Jeder Ausdruck endlich, welcher x gar nicht enthält, also von x auf keine Weise abhängig ist (wie dies z. B. mit jedem der Koeffizienten der ganzen Funktion von x der Fall ist) heißt ein nach x konstanter, zuweilen auch schlechthin ein konstanter Ausdruck (eine Konstante).

Anmerkung 1. Werden in der ganzen Funktion von x, nämlich in $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m$ die Koeffizienten B, C, D, ꝛc. ꝛc. incl. des M, der Null gleich gedacht, so geht sie über in A allein, so daß sie nach x konstant wird. In solchem Falle heißt sie doch zuweilen noch eine ganze Funktion von x, aber vom nullten Grade.

Anmerkg. 2. Denkt man sich, daß in einer ganzen Funktion von x vom m^{ten} Grade, dieses x einen solchen Ausdruck repräsentirt, welcher die ganze Funktion der Null gleich macht, so hat man eine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade. (Vergl. I. Th. §. 96.)

§. 74.

Bezeichnet man die ganze Funktion vom m^{ten} Grade:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m,$$

durch P, und den Koeffizienten irgend einer Potenz x^ν durch P_ν, so ist diese ganze Funktion ausgedrückt durch:

$$S\left[\begin{matrix}P_a\cdot x^a\\ a+b=m\end{matrix}\right], \quad \text{oder durch} \quad S[P_a\cdot x^a],$$

ohne beschränkende Gleichung, wenn $P_{m+\mu}$ der Null gleich gedacht wird, welche ganze Zahl auch μ sein mag.

§. 75.

Es ist (S. I. Th. §. 96. zu Ende):

$$S\left[\begin{matrix} P_a \cdot x^a \\ a+b=m \end{matrix}\right] \times S\left[\begin{matrix} Q_c \cdot x^c \\ c+b=n \end{matrix}\right] = S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_c \cdot x^{a+c} \\ a+b=m,\ c+b=n \end{matrix}\right];$$

$$\text{auch } = S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_c \cdot x^f \\ a+b=m,\ c+b=n, \\ a+c=f \end{matrix}\right].$$

Beispiel. Sind nämlich die beiden ganzen Funktionen

$P_0+P_1 \cdot x+P_2 \cdot x^2+P_3 \cdot x^3+P_4 \cdot x^4$ und $Q_0+Q_1 \cdot x+Q_2 \cdot x^2+Q_3 \cdot x^3$,

wo P_0, P_1, P_2, ꝛc., eben so Q_0, Q_1, Q_2, ꝛc., ganz beliebige Koeffizienten sind, mit einander zu multipliziren, so zeigt sich der Koeffizient von x^ν des gesuchten Produkts:

$$= S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_c \\ a+c=\nu \end{matrix}\right],$$

wenn man a nie größer als 4, und c nie größer als 3 werden läßt. — Also findet sich z. B. der Koeffizient von x^5, weil $a+c=5$, die Werthe

a	0 1 2 3 4 5
c	5 4 3 2 1 0

zuläßt, $= P_2 \cdot Q_3+P_3 \cdot Q_2+P_4 \cdot Q_1$,

und das ganze Produkt findet sich

$$= P_0 \cdot Q_0+(P_1 \cdot Q_0+P_0 \cdot Q_1)x+(P_2 \cdot Q_0+P_1 \cdot Q_1+P_0 \cdot Q_2)x^2$$
$$+(P_3 \cdot Q_0+P_2 \cdot Q_1+P_1 \cdot Q_2+P_0 \cdot Q_3)x^3+(P_4 \cdot Q_0+P_3 \cdot Q_1+P_2 \cdot Q_2+P_1 \cdot Q_3)x^4$$
$$+(P_4 \cdot Q_1+P_3 \cdot Q_2+P_2 \cdot Q_3)x^5+(P_4 \cdot Q_2+P_3 \cdot Q_3)x^6+P_4 \cdot Q_3 \cdot x^7.$$

§. 76.

1) Die Addition, Subtraktion und die Multiplikation zweier ganzen Funktionen von x, giebt immer wieder eine ganze Funktion von x.

2) Ist der eine Faktor eine Funktion von x vom m^{ten} Grade, und der andere Faktor eine dergleichen vom n^{ten} Grade, so giebt das Produkt beider nothwendig eine ganze Funktion vom $(m+n)^{ten}$ Grade.

3) Ist daher für zwei ganze Funktionen P und Q von x,

wo P vom m^{ten} Grade und Q vom n^{ten} Grade ist, die Division von P durch Q in dem Sinne möglich, als der Quotient $\frac{P}{Q}$ selbst wieder eine ganze Funktion giebt, so ist letztere nothwendig vom $(m-n)^{ten}$ Grade. (S. I. Th. §. 117.)

4) Soll der Quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ zweier ganzen Funktionen von x, z. B.

$$\frac{10x^5+15x^4-24x^3+17x-12}{2x^2+3x-4}$$

wo möglich selbst wieder in eine ganze Funktion von x umgeformt werden, so kann dies nur durch wiederholte Anwendung der Formel §. 84. d. I. Th., nämlich der Formel

$$\frac{A}{B}=z+\frac{A-Bz}{B}$$

geschehen, aber auf eine doppelte Art, indem man nämlich Dividend $\mathfrak{A}$ und Divisor $\mathfrak{B}$ fallend ordnet, oder indem man beide steigend ordnet, jedesmal aber und bei jeder wiederholten Anwendung der Formel, statt des ersten Summanden z den Quotienten der ersten Glieder des jedesmaligen Dividenden und des Divisors nimmt. Dies wird so lange fortgesetzt, bis man, wenn der Dividend $\mathfrak{A}$ vom m^{ten} Grade, der Divisor $\mathfrak{B}$ aber vom n^{ten} Grade ist, ein Resultat $\mathfrak{C}$ vom $(m-n)^{ten}$ Grade gefunden hat. Ist dann $\mathfrak{R}$ der letzte Rest (die letzte der Differenzen A—Bz), so hat man

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=\mathfrak{C}+\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}};$$

ist aber $\mathfrak{R}=0$, so hat man $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=\mathfrak{C}$ und die verlangte Umwandlung ist dann möglich und ausgeführt. (Vgl. I. Th. §. 117.)

Beispiele. Man soll die ganze Funktion

$$10x^5+15x^4-24x^3+17x-12$$

durch die ganze Funktion $2x^2+3x-4$ dividiren.

Nach der einen Auflösung erhält man:

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{Divisor } \mathfrak{B} & \text{Dividend } \mathfrak{A} & \text{Quotient } \mathfrak{C} \\
2x^2+3x-4 & 10x^5+15x^4-24x^3+17x-12 & 5x^3-2x+3 \\
 & 10x^5+15x^4-20x^3 & \\ \hline
 & -4x^3+17x-12 & \\
 & -4x^3-6x^2+8x & \\ \hline
 & 6x^2+9x-12 & \\
 & 6x^2+9x-12 & \\ \hline
\text{letzter Rest } \mathfrak{R} = & 0+0+0. &
\end{array}$$

Nach der andern Auflösung hat man dagegen:

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{Divisor } \mathfrak{B} & \text{Dividend } \mathfrak{A} & \text{Quotient } \mathfrak{C} \\
-4+3x+2x^2 & -12+17x-24x^3+15x^4+10x^5 & 3-2x+5x^3 \\
 & -12+9x+6x^2 & \\ \hline
 & 8x-6x^2-24x^3+15x^4+10x^5 & \\
 & 8x-6x^2-4x^3 & \\ \hline
 & -20x^3+15x^4+10x^5 & \\
 & -20x^3+15x^4+10x^5 & \\ \hline
\text{letzter Rest } \mathfrak{R} = & 0+0+0. &
\end{array}$$

Ferner findet man, wenn $4x^5-2x^3+3x-5$ durch $2x^2-3x+4$ dividirt und das Resultat, nach der erstern Auflösung umgeformt wird, die ganze Funktion $2x^3+3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{27}{4}$, und dann bleibt noch ein Rest $-\frac{61}{4}x+22$. — Folglich ist:

$$\frac{4x^5-2x^3+3x-5}{2x^2-3x+4}=\left(2x^3+3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{27}{4}\right)+\frac{-\frac{61}{4}x+22}{2x^2-3x+4}.$$

Und dividirt man dieselben ganzen Funktionen beide steigend geordnet durcheinander, so erhält man nach der andern Auflösung:

Divisor $\mathfrak{B}$	Dividend $\mathfrak{A}$	Quotient $\mathfrak{C}$
$4-3x+2x^2$	$-5+3x-2x^3+4x^5$	$-\frac{5}{4}-\frac{3}{16}x+\frac{31}{64}x^2-\frac{11}{256}x^3$
	$-5+\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}x^2$	

$$-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}x^2-2x^3+4x^5$$

$$-\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{8}x^3$$

$$\frac{31}{16}x^2-\frac{13}{8}x^3+4x^5$$

$$\frac{31}{16}x^2-\frac{93}{64}x^3+\frac{31}{32}x^4$$

$$-\frac{11}{64}x^3-\frac{31}{32}x^4+4x^5$$

$$-\frac{11}{64}x^3+\frac{33}{256}x^4-\frac{11}{128}x^5$$

$$(\mathfrak{R}) = -\frac{215}{256}x^4+\frac{523}{128}x^5\ ;$$

so daß man hat:

$$\frac{-5+3x-2x^3+4x^5}{4-3x+2x^2} = \left(-\frac{5}{4}-\frac{3}{16}x+\frac{31}{64}x^2-\frac{11}{256}x^3\right)+\frac{-\frac{215}{256}x^4+\frac{523}{128}x^5}{4-3x+2x^2}.$$

Anmerkung. In der Folge wird stillschweigend immer vorausgesetzt, daß die erste Art der Division stattfindet; der Rest $\mathfrak{R}$ wird dann allemal von einem niedrigern Grade, als der Divisor $\mathfrak{B}$, so daß er nach x konstant wird, wenn $\mathfrak{B}$ nur vom ersten Grade ist. — Und weil man immer $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}+\mathfrak{R}$ hat, so folgt, daß für jeden Werth von x, welcher $\mathfrak{B}$ zu Null macht, auch allemal $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}$ werden müsse, daß also auch $\mathfrak{R}=0$ werden müsse, für jeden Werth von x, welcher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugleich zu Null macht.

Daraus folgt weiter, daß wenn $\mathfrak{A}$ für $x=\alpha$ Null wird, dann $\mathfrak{A}$ durch $x-\alpha$ ohne Rest dividirt werden könne, weil der bei der Division der $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}=x-\alpha$, bleibende Rest $\mathfrak{R}$, $=\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\mathfrak{C}=\mathfrak{A}-(x-\alpha)\mathfrak{C}=0$ wird für $x=\alpha$, (in so ferne, der Voraussetzung zu Folge, auch $\mathfrak{A}=0$ wird für $x=\alpha$),

während er vom niedrigern Grade als der Divisor $x-\alpha$, also konstant, d. h. von x unabhängig, mithin allemal Null sein muß.

Es fragt sich aber ferner, wenn man die Funktionen bald steigend, bald fallend geordnet, durch einander dividirt und nie ein letzter Rest bleibt, — ob in jedem der beiden Fälle, nothwendig allemal eine und dieselbe ganze Funktion als Resultat sich ergeben müsse.

So viel ist gewiß, daß beide Endresultate $=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, folglich auch einander gleich sein müssen. Es fragt sich daher nur noch, ob, wenn zwei ganze Funktionen von x einander gleich sind, dieselben auch in ihren einzelnen Koeffizienten mit einander übereinstimmen, d. h. durch gar nichts mehr von einander verschieden sein müssen.

Dies wird durch den nächsten Paragraphen entschieden werden.

§. 77.

1) Eine ganze Funktion von x von irgend einem Grade, kann als solche, d. h. während x ganz allgemein (als ein bloßer Träger der Operationszeichen) bleibt, nie einer Potenz von x gleich werden, deren Exponent größer ist als der Grad der Funktion, wie man auch die Koeffizienten annehmen möge.

So kann z. B. $a+bx$ nie $=x^2$, eben so $a+bx+cx^2$ nie $=x^3$ werden und eben so wenig kann man

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \quad \text{in} \quad x^5 \quad \text{umformen.}$$

Denn da die Koeffizienten der ganzen Funktion von x, von x unabhängig sein müssen und sind, ihrer Definition zufolge, so kann in keinem Gliede derselben eine höhere Potenz von x erscheinen als der Grad der Funktion anzeigt, also auch nicht in der Summe aller Glieder.

2) Wird daher von einer ganzen Funktion von x vom n^{ten} Grade behauptet, daß sie als solche, d. h. für jedes allgemeine

x, der Null gleich ist, so müssen alle ihre Koeffizienten einzeln der Null gleich sein.

Wäre nämlich in der Gleichung

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_{n-2}x^{n-2}+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n=0,$$

wenn sie für jedes allgemeine x gelten soll, — der Koeffizient A_n nicht der Null gleich, so würde aus ihr folgern

$$\left(\frac{-A_0}{A_n}\right)+\left(\frac{-A_1}{A_n}\right)x+\cdots+\left(\frac{-A_{n-1}}{A_n}\right)x^{n-1}=x^n,$$

was nach Nr. 1. unmöglich ist.

Ist aber $A_n=0$, so bleibt übrig

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_{n-2}x^{n-2}+A_{n-1}x^{n-1}=0$$

für jedes allgemeine x; folglich ist auch aus demselben Grunde wiederum $A_{n-1}=0$; und dann aus demselben Grunde auch $A_{n-2}=0$, u. s. w. f.

3) Daraus folgt aber, daß wenn zwei ganze Funktionen von x, als solche, d. h. für jedes allgemeine x, einander gleich sind, z. B.

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m=B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_mx^m,$$

dann auch die einzelnen Koeffizienten bezüglich einander gleich sein müssen; nämlich es muß dann sein $A_0=B_0$, $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, 2c. 2c. so wie zuletzt noch $A_m=B_m$.

Denn die Gleichung

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_m\cdot x^m=B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_mx^m$$

geht sogleich über in die Gleichung

$$(A_0-B_0)+(A_1-B_1)x+(A_2-B_2)x^2+\cdots+(A_m-B_m)x^m=0$$

und nun folgt das Uebrige aus der Nr. 2.

4) Ferner folgt daraus, daß wenn die Gleichung

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+x^n=0$$

gegeben ist, also nicht alle einzelnen Koeffizienten der Null gleich sind, sondern entweder bestimmte Ziffern-Werthe oder noch ganz

allgemein (bloße Träger der Operationszeichen), dann diese Gleichung nur unter der Beschränkung bestehen könne, daß x einen bestimmten von den Koeffizienten abhängigen Ausdruck vorstelle. Die Gleichung ist dann eine sogenannte „algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade", die, wenn $n>1$ ist, auch eine höhere algebraische Gleichung genannt wird. Den Ausdruck finden, den x in ihr vorstellt, nennt man dann das Auflösen dieser algebraischen Gleichung nach dem Unbekannten x. (Vergl. I. Th. §. 96.).

§. 78.

Man kann nun auch die Aufgabe des §. 76. Nr. 4, nämlich die ganze Funktion $\mathfrak{A}$ von x, vom m^{ten} Grade, durch die ganze Funktion $\mathfrak{B}$ von x, vom n^{ten} Grade zu dividiren, wie folgt lösen:

1) Man nehme eine ganze Funktion $\mathfrak{C}$ an, vom Grade $(m-n)$ mit unbestimmten (d. h. einstweilen durch beliebige Buchstaben, z. B. α, β, γ, δ, ... bezeichneten) Koeffizienten; welche dem Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ gleich sein soll.

2) Die Gleichung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$ liefert dann (nach §. 77. Nr. 2.) $m+1$ Gleichungen, zwischen den Koeffizienten von $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{B}$, und den $m-n+1$ Koeffizienten von $\mathfrak{C}$, welche Gleichungen alle in Bezug auf diese letztern α, β, γ, δ, 2c., nothwendig einfache Gleichungen sein müssen.

3) Aus diesen $m+1$ Gleichungen bestimme man durch Auflösung die $m-n+1$ Unbekannten α, β, γ, δ, ... Genügen dann diese für α, β, γ, ... gefundenen Werthe, allen $m+1$ Gleichungen, so ist die Aufgabe wiederum gelöset.

4) Würden aber diese $m+1$ Gleichungen gar nicht zur Bestimmung von α, β, γ, δ, ... taugen, in so ferne sie sich widersprechen; — oder genügten die aus einigen dieser Gleichungen gefundenen Werthe von α, β, γ, δ, ... nicht allen $m+1$ Gleichungen, so wäre die Aufgabe wiederum nicht möglich.

Beispiel. Für den Fall, daß

$$-12+17x-24x^3+15x^4+10x^5 \quad \text{durch} \quad -4+3x+2x^2$$

dividirt werden soll, müßte man also:

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$$

für den gesuchten Quotienten annehmen, und man hätte dann:

$$-12+17x-24x^3+15x^4+10x^5 = (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)(-4+3x+2x^2)$$
$$= -4\alpha-4\beta x-4\gamma x^2-4\delta x^3+3\alpha x+3\beta x^2+3\gamma x^3+3\delta x^4+2\alpha x^2+2\beta x^3+2\gamma x^4+2\delta x^5$$
$$= -4\alpha+\left\{\begin{matrix}3\alpha\\-4\beta\\ \end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}2\alpha\\+3\beta\\-4\gamma\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}2\beta\\+3\gamma\\-4\delta\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}2\gamma\\+3\delta\\-\end{matrix}\right\}x^4+2\delta x^5 \quad;$$

folglich (nach §. 77.):

$$-4\alpha = -12 \quad \text{oder} \quad \alpha = 3$$

$$3\alpha-4\beta = 17 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{3\alpha-17}{4} = -2$$

$$2\alpha+3\beta-4\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{2\alpha+3\beta}{4} = 0$$

$$2\beta+3\gamma-4\delta = -24 \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{2\beta+3\gamma+24}{4} = 5;$$

endlich noch:

$$2\gamma+3\delta = 15 \quad \text{und} \quad 2\delta = 10.$$

Und weil diesen beiden letztern Gleichungen, von den aus den erstern vier Gleichungen gefundenen Werthen von γ und δ wirklich genügt wird, so ist für diese Werthe von α, β, γ, δ, die ganze Funktion

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3,$$

d. h.

$$3+(-2)x+0x^2+5x^3,$$

oder

$$3-2x+5x^3,$$

nothwendig die gesuchte.

Bei diesem Verfahren, welches eine Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten ist, schließt man so:

„Wenn es eine ganze Funktion

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$$

„gibt, welche dem Quotienten der beiden gegebenen ganzen Funk-„tionen gleich ist, so müssen die sechs Gleichungen:

$$-4\alpha = -12, \quad 3\alpha-4\beta = 17, \quad 2\alpha+3\beta-4\gamma = 0,$$
$$2\beta+3\gamma-4\delta = -24, \quad 2\gamma+3\delta = 15, \quad 2\delta = 10,$$

„statt finden." — Würden also die aus vier dieser Gleichungen gefundenen Werthe der Unbekannten α, β, γ, δ, den beiden übrigen Gleichungen nicht genügen, so enthielten die sechs Gleichungen einen Widerspruch, in so ferne sie nicht alle sechs zugleich statt finden könnten, und es müßte daher auch die Annahme, aus der sie gefolgert sind, nothwendig einen Widerspruch enthalten, d. h. nicht statt finden; daher würde es dann keine ganze Funktion $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ geben, der die verlangte Eigenschaft zukäme. — Dasselbe wäre der Fall, wenn je vier der Gleichungen sich dergestalt widersprächen, daß sie gar nicht zur Bestimmung von α, β, γ, δ, tauglich wären; weil jeder Widerspruch in den Gleichungen sogleich die Voraussetzung aufhebt (d. h. als unstatthaft anzeigt), unter der diese Gleichungen erhalten worden sind.

Sollte z. B. eine dem Quotienten:

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots Px^m}{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots px^n}$$

gleiche ganze Funktion

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots+\pi x^{m-n}$$

gefunden werden, so erhielte man die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
a\alpha = A, & \text{daraus} & \alpha = A:a; \\
b\alpha+a\beta = B, & \text{daraus} & \beta = (B-b\alpha):a; \\
c\alpha+b\beta+a\gamma = C, & \text{daraus} & \gamma = (C-b\beta-c\alpha):a; \\
d\alpha+c\beta+b\gamma+a\delta = D, & & \text{u. s. w. f.} \\
\text{u. s. w. f.} & &
\end{array}$$

Wäre nun $a=0$, so diente die erste Gleichung $a\alpha=A$ nicht mehr zur Bestimmung von α; und enthielte überdies einen Widerspruch, wenn nicht auch $A=0$ wäre, und zeigte also im letztern Falle an (d. h. wenn nicht $A=0$ ist), daß es keine ganze Funktion gibt, welche dem Quotienten:

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots+Px^m}{bx+cx^2+\cdots+px^n}$$

gleich sein könnte.

Ist außer $a=0$, auch $A=0$, so taugt zwar die erste Gleichung $a\alpha=A$ nicht mehr zur Bestimmung von α, enthält aber auch keinen Widerspruch, und es hängt also noch von den übrigen Gleichungen ab, ob die Aufgabe möglich sein soll oder nicht.

Die zweite der Gleichungen gibt aber für $a=0$:

$$b\alpha = B \quad \text{oder} \quad \alpha = B:b,$$

dient also zur Bestimmung von α, wenn nicht $b=0$, und die Aufgabe kann in diesem Falle noch möglich sein. — Ist aber auch noch $b=0$ und nicht zugleich $B=0$, so enthält diese zweite Gleichung $b\alpha=B$ einen Widerspruch, und die Aufgabe ist unbedingt unmöglich. — Ist aber wieder außer $b=0$, auch noch $B=0$, so dient die Gleichung $b\alpha=B$ zwar nicht mehr zur Bestimmung von α, enthält aber auch keinen Widerspruch, und es hängt daher die Möglichkeit der Aufgabe wieder von den noch übrigen Gleichungen ab; u. s. w. f.

Anmerkung. Im Allgemeinen können aus den $m+1$ Gleichungen die $m-n+1$ Unbestimmten α, β, γ, 2c. 2c. eliminirt werden, und es bleiben dann n Gleichungen zwischen den Koeffizienten der gegebenen Funktionen übrig. — Sind diese Gleichungen von den gegebenen Koeffizienten A, B, C, 2c., a, b, c, 2c. nicht erfüllt, so ist die Aufgabe §. 76. Nr. 4. selbst unbedingt unmöglich.

§. 79. Erklärung.

Eine ganze Funktion $\mathfrak{A}$ *) ist durch eine andere ganze Funktion $\mathfrak{B}$ theilbar, und $\mathfrak{B}$ ist dann ein Theiler oder Faktor von $\mathfrak{A}$, wenn es eine dritte ganze Funktion $\mathfrak{C}$ gibt, so daß $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$ ist. Dabei ist der Theiler oder Faktor $\mathfrak{B}$ ein einfacher, doppelter, dreifacher u. s. w. f., je nachdem er vom Grade 1, 2, 3, u. s. w. ist. Der doppelte Faktor ax^2+bx+c heißt ein quadratischer, wenn $b^2=4ac$ ist, weil er dann die Form $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ annimmt. — Die ganze Funktion $\mathfrak{C}$ heiße die Maaßfunktion, während $\mathfrak{B}$ die Gemäßfunktion von $\mathfrak{A}$ genannt werden kann. Die Funktion $\mathfrak{A}$ selbst mag dann auch eine Vielfache-Funktion von $\mathfrak{B}$ heißen.

Ferner heiße die ganze Funktion $\mathfrak{P}$ der größte gemein-

*) Wenn nichts Besonderes bemerkt ist, so sind immer ganze Funktionen eines Veränderlichen x verstanden.

schaftliche Theiler mehrerer andern ganzen Funktionen 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc. ꝛc., wenn es keine ganze Funktion eines höheren Grades gibt, durch welche alle diese ganzen Funktionen 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc. ꝛc. zugleich getheilt werden könnten.

Dagegen heißt eine ganze Funktion 𝔙 die kleinste gemeinschaftliche Vielfache-Funktion mehrerer andern 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc., wenn es keine andere ganze Funktion von einem niedrigern Grade gibt, welche durch jede der Funktionen 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc. getheilt werden könnte.

Anmerkung. Sind 𝔄 und 𝔅 ganze Funktionen von x, und ist 𝔄 durch 𝔅 theilbar, (so daß $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C}$ wird), so ist auch P𝔄 durch Q𝔅 theilbar, wenn nur P und Q nicht x enthalten und nicht Null sind. — Denn es ist:

$$(P\mathfrak{A}):(Q\mathfrak{B}) = (P:Q)\cdot(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) = (P:Q)\cdot\mathfrak{C}.$$

§. 80. Lehrsatz und Erklärung.

Ist die ganze Funktion 𝔄 vom m^{ten} Grade durch die ganze Funktion 𝔅 vom n^{ten} Grade nicht theilbar, aber dabei $m \geqq n$, so gibt es immer eine ganze Funktion ℭ vom $(m-n)^{ten}$ Grade, und noch eine ganze Funktion ℜ von einem Grade, der niedriger ist als der n^{te}, und so daß:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}}.$$

Einen solchen Quotienten, wie $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ oder $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}}$, welcher keiner ganzen Funktion gleich ist, nennt man auch eine gebrochene Funktion von x, und zwar den erstern $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ eine unächt gebrochene, den andern $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}}$ dagegen eine ächt gebrochene.

Es folgt dies unmittelbar aus §. 76. Nr. 4. — Aus derselben Nr. 4. kann man auch das Verfahren absehen, durch wel-

ches eine unächt gebrochene Funktion z. B. $\frac{2x+3}{3x-2}$, oder $\frac{2x^2-x+4}{x-3}$, oder $\frac{4x^5-x^2+7x-1}{2x^2-1}$, rc. rc. in die Summe aus einer ganzen Funktion und einer ächt gebrochenen verwandelt wird.

Aber auch in diesem Falle kann man die im §. 78. erwähnte „Methode der unbestimmten Koeffizienten" anwenden, um, wenn $\mathfrak{A}$ (vom m^{ten} Grade) und $\mathfrak{B}$ (vom n^{ten} Grade) gegeben sind, dann $\mathfrak{C}$ (vom $(m-n)^{ten}$ Grade) und den Rest $\mathfrak{R}$ (welcher im Allgemeinen vom $(n-1)^{ten}$ Grade sein wird, aber von einem niedrigeren Grade sein kann) zu finden, wie wir an nachfolgendem Beispiele zeigen wollen.

Man setzt nämlich den umzuformenden Quotienten

$$\frac{x^5-4x^4+7x^3+6x^2-5x-3}{x^2-2x+4}=x^3+Ax^2+Bx+C+\frac{\mathfrak{R}}{x^2-2x+4}$$

multiplizirt mit dem Divisor x^2-2x+4 auf beiden Seiten und erhält

$$x^5-4x^4+7x^3+6x^2-5x-3$$
$$=x^5+\left\{\begin{matrix}A\\-2\\ \end{matrix}\right\}x^4+\left\{\begin{matrix}B\\-2A\\+4\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}C\\-2B\\+4A\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}\\-2C\\+4B\end{matrix}\right\}x+4C+\mathfrak{R}.$$

Nun setzt man links und rechts so viele Paare von Koeffizienten gleichnamiger und höchster Potenzen von x einander gleich, als unbestimmte Koeffizienten A, B, C (nämlich m—n) eingeführt worden sind, also

$$-4=A-2;\quad 7=B-2A+4;\quad 6=C-2B+4A;$$

bestimmt aus diesen Gleichungen die Koeffizienten, nämlich

$$A=-2,\quad B=-1\quad \text{und}\quad C=12;$$

substituirt diese Werthe statt A, B, C in dieselbe Gleichung (wodurch links und rechts alle Glieder mit x^2 oder höheren Potenzen von x, sich wegheben); und aus der übrig bleibenden Gleichung

$$-5x-3 = -28x+48+\mathfrak{R}$$

findet man dann vollends $\mathfrak{R}$, nämlich

$$\mathfrak{R} = 23x-51,$$

so daß man nun die unächt gebrochene Funktion

$$\frac{x^5-4x^4+7x^3+6x^2-5x-3}{x^2-2x+4}$$

umgeformt hat in die Summe

$$(x^3-2x^2-x+12)+\frac{23x-51}{x^2-2x+4}$$

aus einer ganzen Funktion von x und einer ächt gebrochenen.

Anmerkung. Wegen einer später folgenden Anwendung wollen wir noch die ganze Funktion

1) $A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+A_3x^{\mu-3}+A_4x^{\mu-4}+\cdots+A_\mu$

vom μ^{ten} Grade, (in welcher A_0, A_1, A_2, $\cdots$ A_μ beliebige Koeffizienten vorstellen) durch die ganze Funktion $x-\alpha$ vom 1^{ten} Grade, dividiren, d. h. die ganze Funktion

2) $B_0x^{\mu-1}+B_1x^{\mu-2}+B_2x^{\mu-3}+B_3x^{\mu-4}+B_4x^{\mu-5}+\cdots+B_{\mu-1}$

vom $(\mu-1)^{ten}$ Grade, welche sich als Resultat ergiebt, so wie den Rest $\mathfrak{R}$, welcher dasmal vom nullten Grade d. h. (nach x) konstant sein muß, finden (wobei sich offenbar $B_0 = A_0$ zeigen muß).

Nach der vorgeschriebenen Methode bekommt man als Resultat der Multiplikation mit $x-\alpha$, auf der linken Seite der Gleichung den Dividenden in 1.), auf der rechten Seite dagegen

3) $$B_0x^\mu+\left\{\begin{matrix}B_1\\-\alpha B_0\end{matrix}\right\}x^{\mu-1}+\left\{\begin{matrix}B_2\\-\alpha B_1\end{matrix}\right\}x^{\mu-2}+\left\{\begin{matrix}B_3\\-\alpha B_2\end{matrix}\right\}x^{\mu-3}+\cdots$$
$$+\left\{\begin{matrix}B_{\mu-1}\\-\alpha B_{\mu-2}\end{matrix}\right\}x+\left.\begin{matrix}\mathfrak{R}\\-\alpha B_{\mu-1}.\end{matrix}\right.$$

Vergleicht man nun die ersten Koeffizienten in 1.) und 3.) so giebt dies außer $B_0 = A_0$ noch $B_1-\alpha B_0 = A_1$;

$B_2-\alpha B_1 = A_2$; $B_3-\alpha B_2 = A_3$; ꝛc. ꝛc. ꝛc.

$$B_{\mu-2} - \alpha B_{\mu-3} = A_{\mu-2} \text{ und } B_{\mu-1} - \alpha B_{\mu-2} = A_{\mu-1} \text{ und}$$
$$\mathfrak{R} - \alpha B_{\mu-1} = A_{\mu},$$

woraus die Koeffizienten B_1, B_2, B_3, ⋯ $B_{\mu-1}$ und zuletzt der Rest $\mathfrak{R}$ ohne Weiteres gefunden werden und zwar durch folgendes praktische Verfahren:

a) Man schreibt die Koeffizienten des Dividenden hin, nämlich

$$A_0, \; A_1, \; A_2, \; A_3, \; A_4, \cdots A_{\mu-2}, \; A_{\mu-1} \text{ und } A_{\mu}.$$

b) Man findet nun die genau unter die ersteren geschriebenen Koeffizienten

$$B_0, \; B_1, \; B_2, \; B_3, \; B_4, \cdots B_{\mu-2}, \; B_{\mu-1} \text{ und } \mathfrak{R},$$

(z. B. B_4) dadurch, daß man den nächst vorhergehenden (B_3) mit α multiplizirt und den genau über den gesuchten (B_4) stehenden (A_4) dazu addirt, während zuletzt der Rest $\mathfrak{R}$ nach demselben Gesetze gefunden wird, in so ferne $\mathfrak{R} = \alpha B_{\mu-1} + A_{\mu}$ ist.

Beispiel. Soll also z. B. die ganze Funktion vom 8ten Grade

$$x^8 - 2x^7 + x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 1$$

durch $x - 1{,}2$ dividirt und auch der zuletzt bleibende Rest $\mathfrak{R}$, bestimmt werden, so erhält man nach dieser praktischen Regel:

(nach a)⋯	1,	−2,	1,	3,	−2,	−3,	5,	−6,	1
(nach b)⋯	B_0,	B_1,	B_2,	B_3,	B_4,	B_5,	B_6,	B_7,	$\mathfrak{R}$

und

$$B_0 = 0 \cdot (1{,}2) + 1 = 1;$$
$$B_1 = 1 \cdot (1{,}2) - 2 = -0{,}8;$$
$$B_2 = (-0{,}8) \cdot (1{,}2) + 1 = 0{,}04;$$
$$B_3 = (0{,}04) \cdot (1{,}2) + 3 = 3{,}048;$$
$$B_4 = (3{,}048) \cdot (1{,}2) - 2 = 1{,}6576;$$
$$B_5 = (1{,}6576) \cdot (1{,}2) - 3 = -1{,}01088;$$
$$B_6 = (-1{,}01088) \cdot (1{,}2) + 5 = 3{,}786944;$$
$$B_7 = (3{,}786944) \cdot (1{,}2) - 6 = -1{,}4556672$$

und zuletzt

$$\mathfrak{R} = (-1{,}4556672) \cdot (1{,}2) + 1 = -0{,}74680064;$$

und man hat nun gefunden

$$\frac{x^8-2x^7+x^6+3x^5-2x^4-3x^3+5x^2-6x+1}{x-(1,2)}$$
$$=x^7+B_1x^6+B_2x^5+B_3x^4+B_4x^3+B_5x^2+B_6x+B_7+\frac{-0,74680064}{x-(1,2)}$$

wo B_1 bis B_7 die so eben gefundenen (theils positiven theils negativen) Decimal-Brüche vorstellen.

Soll (als 2tes Beispiel)

$$x^5-3x^4-4x^3+2x^2-5x+8$$

durch $x+2$ dividirt werden (wo $\alpha=-2$ ist), so erhält man

(nach a)... 1, −3, −4, 2, −5, 8;
(nach b)... 1, −5, 6, −10, 15, −22;

und man hat nun gefunden

$$\frac{x^5-3x^4-4x^3+2x^2-5x+8}{x+2}=x^4-5x^3+6x^2-10x+15+\frac{-22}{x+2}.$$

§. 81.

Dividiren wir noch nach dieser praktischen Regel die ganze Funktion F_x vom m^{ten} Grade, nämlich

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\cdots+A_{m-1}x+A_m,$$

wo A_1, A_2, A_3, ... A_m wiederum ganz beliebige Koeffizienten vorstellen, durch $x-\alpha$, und suchen wir die ganze Funktion vom $(m-1)^{ten}$ Grade, welche sich ergiebt, und noch den Rest $\mathfrak{R}$, so nehmen wir

(nach a)... A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_{m-1}, A_m
(nach b)... B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, ... B_{m-1}, $\mathfrak{R}$

und finden

$$B_0=0\cdot\alpha+A_0=A_0;$$
$$B_1=A_0\alpha+A_1;$$
$$B_2=\alpha B_1+A_2=A_0\alpha^2+A_1\alpha+A_2;$$
$$B_3=\alpha B_2+A_3=A_0\alpha^3+A_1\alpha^2+A_2\alpha+A_3;$$
$$B_4=A_0\alpha^4+A_1\alpha^3+A_2\alpha^2+A_3a+A_4;$$
$$\vdots$$
$$B_\mu=A_0\alpha^\mu+A_1\alpha^{\mu-1}+A_2\alpha^{\mu-2}+\cdots+A_{\mu-1}\alpha+A_\mu;$$
$$\vdots$$
$$B_{m-1}=A_0\alpha^{m-1}+A_1\alpha^{m-2}+A_2\alpha^{m-3}+\cdots+A_{m-2}\alpha+A_{m-1}$$

und zuletzt

$$\mathfrak{R} = A_0\alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + A_2\alpha^{m-2} + A_3\alpha^{m-3} + \cdots + A_m$$

d. h. $\mathfrak{R} = F_\alpha$,

wenn wir durch F_α das bezeichnen, was aus F_x wird, sobald man α statt x setzt.

Man findet also

$$\frac{F_x}{x-\alpha} = B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \cdots + B_\mu x^{m-\mu-1} + \cdots$$
$$+ B_{m-1} + \frac{F_\alpha}{x-\alpha},$$

wo $B_0, B_1, B_2, B_3, \cdots B_\mu, \cdots B_{m-1}$ die so eben (in α und $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots A_{m-1}$ ausgedrückten) Werthe vorstellen.

Diese Gleichung läßt sehen:

I. Ist α ein Werth von x, welcher F_x der Null gleich macht, d. h. welcher F_α in Null verwandelt, so ist F_x durch $x-\alpha$ theilbar; und der Quotient $\frac{F_x}{x-\alpha}$ ist dann

$$= B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \cdots + B_{m-2}x + B_{m-1},$$

während $B_0, B_1, B_2, B_3, \cdots B_{m-1}$ die oben aufgefundenen Ausdrücke (in α, A_1, A_2, $\cdots A_{m-1}$) vorstellen. (Vergl. Anmerkg. zu §. 76.).

II. Ist F_α nicht $=0$, so ist auch F_x nicht durch $x-\alpha$ theilbar.

III. Das obige Resultat der Division der ganzen Funktion F_x durch $x-\alpha$, kann man auch so schreiben, nämlich

$$\frac{F_x}{x-\alpha} = S\left[A_a\alpha^b \cdot x^{m-1-c}\right]_{a+b=c,\ c+b=m-1} + \frac{F_\alpha}{x-\alpha}.$$

In dem Falle also, wo α ein Werth ist, der $F_x = 0$ macht, ist die durch das Aggregat ausgedrückte ganze Funktion von x allein, $= \frac{F_x}{x-\alpha}$. (Vergl. Anmerkg. zu §. 76.).

§. 82.

Vergleicht man die Erklärungen der §§. 79. und 80. mit denen im 3ten Kapitel des I. Th. gegebenen, so erhellet augenblicklich, daß sich hier ganz analoge Folgerungen ziehen lassen, wie dort, und wir wollen von dieser großen Menge von Sätzen hier nur folgende herausheben*):

1) Die Summe und die Differenz zweier durch eine ganze Funktion B theilbaren ganzen Funktionen, ist wiederum durch B theilbar.

2) Das Produkt, dessen einer Faktor durch B theilbar ist, ist ebenfalls durch B theilbar.

3) Ist A durch B und B wieder durch C theilbar, so ist auch A durch C theilbar.

4) Wird A durch B dividirt, so daß C der Quotient ist, und R der Rest; wird dann wieder B durch R dividirt, so daß C_1 der Quotient, und R_1 der Rest ist; wird dann wieder R durch R_1 dividirt, so daß C_2 der Quotient und R_2 der Rest ist; und fährt man so fort, nach dem Schema zu dividiren:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
B & A & C & & & & \\
 & \underline{CB} & & & & & \\
 & R & B & C_1 & & & \\
 & & \underline{C_1R} & & & & \\
 & & R_1 & R & C_2 & & \\
 & & & \underline{C_2R_1} & & & \\
 & & & R_2 & R_1 & C_3 & \\
 & & & & \underline{C_3R_2} & & \\
 & & & & R_3 & R_2 & C_4 \\
 & & & & & \underline{C_4R_3} & \\
 & & & & & R_4 &
\end{array}
$$

---

*) Es ist jedoch sehr interessant, alle Sätze des erwähnten dritten Kapitels auf ganze Funktionen übergetragen zu sehen, und wir empfehlen besonders den Anfängern, diese Uebertragung wirklich vorzunehmen, wenn auch, wo dort 1 steht, hier oft das Wort konstant (d. h. von x unabhängig) dafür gesetzt werden muß.

und findet man endlich, daß bei einem dieser Reste, z. B. bei $\mathfrak{R}_3$ die Division aufgeht, so nämlich, daß $\mathfrak{R}_4 = 0$ wird, so ist $\mathfrak{R}_3$ der größte gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Denn so oft a, b, c, r, solche ganze Funktionen sind, daß mit dem Divisor b in den Dividenden a dividirt, der nächstniedrigere Quotient c und der Rest r sich ergibt, so oft ist

$$r = a - bc \quad \text{und} \quad a = bc + r.$$

Jeder Theiler $\mathfrak{T}$ des Dividenden a und Divisor b, ist daher auch ein Theiler von r; und jeder Theiler $\mathfrak{U}$ des Restes r und des Divisors b, nothwendig auch ein Theiler vom Dividenden a; und endlich jeder größte gemeinschaftliche Theiler $\mathfrak{W}$ von r und b, auch der größte gemeinschaftliche Theiler von b und a; weil umgekehrt jeder größere gemeinschaftliche Theiler $\mathfrak{T}$ von b und a, auch r theilt, also auch gemeinschaftlicher Theiler von b und r wäre.

Nun ist $\mathfrak{R}_3$ nach der Annahme ein Theiler vom Divisor $\mathfrak{R}_2$, und der größte Theiler von sich selbst, also auch der größte gemeinschaftliche Theiler des Divisors $\mathfrak{R}_2$ und des Dividenden $\mathfrak{R}_1$. Und in der nächstvorhergehenden Division, ist $\mathfrak{R}_2$ der Rest, und $\mathfrak{R}_1$ der Divisor, also ist $\mathfrak{R}_3$ wiederum der größte gemeinschaftliche Theiler des Divisors $\mathfrak{R}_1$ und des Dividenden $\mathfrak{R}$. Aber weil in der nächstvorhergehenden Division, $\mathfrak{R}$ der Divisor und $\mathfrak{R}_1$ der Rest ist, so ist $\mathfrak{R}_3$ wieder der größte gemeinschaftliche Theiler des Divisors $\mathfrak{R}$ und des Dividenden $\mathfrak{B}$; und dann in der nächstvorhergehenden oder ersten Division, eben weil $\mathfrak{R}_3$ als der größte gemeinschaftliche Theiler des Dividenden $\mathfrak{B}$ und des Restes $\mathfrak{R}$ bereits erkannt worden ist, dieselbe ganze Funktion $\mathfrak{R}_3$ auch der größte gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$.

5) Soll daher zwischen zwei ganzen Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der größte gemeinschaftliche Theiler gefunden werden, so darf man nur das im dritten Kapitel des I. Th. für die ähnliche Aufgabe bei ganzen Zahlen, gelehrte praktische Verfahren unverändert anwenden; weil es aus den analogen Sätzen abgeleitet werden kann.

6) Man kann auch bei jeder der einzelnen Divisionen, welche dieses praktische Verfahren erfordert, den Dividenden oder den Divisor, oder beide, mit Ausdrücken P, Q, multipliziren, die nicht Null sind und zugleich unabhängig von dem Veränderlichen x, ohne daß dadurch dem Auffinden des größten gemeinschaftlichen Theilers ein Hinderniß erwüchse. Höch-

stens erhält man, wenn $\mathfrak{P}$ der (nach Nr. 5.) gefundene größte gemeinschaftliche Theiler ist, jetzt $R \cdot \mathfrak{P}$ zum größten gemeinschaftlichen Theiler, wo R nach x konstant und nicht Null ist. (§. 80.).

Man bedient sich aber dieses Vortheils, um bei dem praktischen Auffinden des größten gemeinschaftlichen Theilers, jeden gebrochenen Ausdruck der Koeffizienten zu vermeiden.

Beispiel. Es sei der den beiden ganzen Funktionen:

$$x^5-3x^4-3x^3+7x^2-10x-8 \quad \text{und} \quad x^4+x^3-17x^2+x+6$$

größte gemeinschaftliche Theiler zu finden.

Man erhält zuerst:

$$\begin{array}{r|l|l}
x^4+x^3-17x^2+x+6 & x^5-3x^4-3x^3+7x^2-10x-8 & x-4 \\
 & x^5+x^4-17x^3+x^2+6x & \\
\hline
 & -4x^4+14x^3+6x^2-16x-8 & \\
 & -4x^4-4x^3+68x^2-4x-24 & \\
\hline
\text{Erster Rest} & 18x^3-62x^2-12x+16 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
18x^3-62x^2-12x+16 & x^4+x^3-17x^2+x+6 & \frac{1}{18}x+\frac{20}{81} \\
 & x^4-\frac{31}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{9}x & \\
\hline
 & \frac{40}{9}x^3-\frac{49}{3}x^2+\frac{1}{9}x+6 & \\
 & \frac{40}{9}x^3-\frac{1240}{81}x^2-\frac{80}{27}x+\frac{320}{81} & \\
\hline
\text{Zweiter Rest} & -\frac{83}{81}x^2+\frac{249}{81}x+\frac{166}{81} &
\end{array}$$

Multiplizirt man diesen Rest mit $-\frac{81}{83}$, so erhält man x^2-3x-2, und das Geschäft wird weiter, wenn man den vorhergehenden Rest, als Dividenden, durch 2 dividirt (oder mit $\frac{1}{2}$ multiplizirt),

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2-3x-2 & 9x^3-31x^2-6x+8 & 9x-4 \\
 & 9x^3-27x^2-18x & \\
\hline
 & -4x^2+12x+8 & \\
 & -4x^2+12x+8 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0. &
\end{array}$$

Folglich ist x^2-3x-2 und dann auch $P(x^2-3x-2)$ der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Funktionen, wenn nur P nicht Null ist und unabhängig von x.

Wollte man aber die gebrochenen Ausdrücke ganz vermeiden, so mußte schon bei der zweiten Division (des ersten Divisors durch den ersten Rest) der Dividend $x^4+x^3-17x^2+x+6$ mit $(18)^2$ multiplizirt werden.

§. 83. Erklärung.

Ist F_x irgend eine ganze Funktion von x, so bezeichnen wir von nun an allemal durch

$$F_x^{I},\quad F_x^{II},\quad F_x^{III},\quad F_x^{IV},\ \dots\ F_x^{(n)}$$

diejenigen ganzen Funktionen von x, welche aus einander, d. h. jede aus der nächst voranstehenden und F_x^{I} aus F_x selbst, dadurch abgeleitet werden, daß man jedes Glied mit seinem Exponenten von x, multiplizirt und nachher den Exponenten selbst um eine 1 vermindert, dabei aber die beiden Glieder von der Form

$$Cx \text{ und } C$$

vorher in der Form

$$C\cdot x^1 \text{ und } Cx^0$$

geschrieben sich denkt.

Diese neuen ganzen Funktionen von x, nennen wir bezüglich die

$$1^{te},\quad 2^{te},\quad 3^{te},\quad 4^{te},\ \dots\ n^{te}$$

Ableitung oder Derivation von F_x.

Ist also z. B.

$$F_x = 2x^5 - 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 7x - 4,$$

so ist

$$F_x^{I} = 10x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 4x + 7,$$
$$F_x^{II} = 40x^3 - 36x^2 - 6x + 4,$$
$$F_x^{III} = 120x^2 - 72x - 6,$$
$$F_x^{IV} = 240x - 72,$$
$$F_x^{V} = 240;\quad F_x^{VI} = 0 = F_x^{VII} = \text{ rc. rc.}$$

Ist aber

1) $F_x = S\left[\begin{matrix} A_{\mathfrak{a}} x^{m-\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m \end{matrix}\right]$ *),

so ist

2) $F_x^{I} = S\left[\begin{matrix} (m-\mathfrak{a})A_{\mathfrak{a}} x^{m-1-\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1 \end{matrix}\right]$,

3) $F_x^{II} = S\left[\begin{matrix} (m-\mathfrak{a})^{2|-1}A_{\mathfrak{a}} x^{m-2-\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2 \end{matrix}\right]$,

4) $F_x^{III} = S\left[\begin{matrix} (m-\mathfrak{a})^{3|-1}A_{\mathfrak{a}} x^{m-3-\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3 \end{matrix}\right]$,

und allgemein, so lange $\mu \leqq m$ ist,

⊙)… $F_x^{(\mu)} = S\left[\begin{matrix} (m-\mathfrak{a})^{\mu|-1}A_{\mathfrak{a}} x^{m-\mu-\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-\mu \end{matrix}\right]$;

also auch (für $\mu = m-1$, also $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 1$, d. h. $\mathfrak{a} = 0$ und $\mathfrak{a} = 1$)

$$F_x^{(m-1)} = m^{m-1|-1} A_0 x + (m-1)!\, A_1$$

und namentlich noch (für $\mu = m$, wegen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 0$, also $\mathfrak{a} = 0$)

$$F_x^{(m)} = m^{m|-1} A_0 = m!\, A_0;$$

dagegen

$$F_x^{(m+1)} = 0 = F_x^{(m+2)} = \text{etc. etc.}$$

§. 84.

Bezeichnen wir durch F_{x+h} das, was aus einer gegebenen ganzen Funktion F_x wird, wenn man $x+h$ statt x setzt, so ist allemal

$$\text{I.}\quad F_{x+h} = F_x + F_x^{I}\cdot h + F_x^{II}\cdot\frac{h^2}{2!} + F_x^{III}\cdot\frac{h^3}{3!} + \cdots + F_x^{(m)}\cdot\frac{h^m}{m!},$$

während das letzte Glied $F_x^{(m)}\cdot\frac{h^m}{m!} = A_0\cdot h^m$ ist (nach §. 83.).

*) D. h. $= A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_\mu x^{m-\mu} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$.

Denn, da jedes Glied von F_x, die Form $A_\mu x^\mu$ hat, so ist das entsprechende Glied von F_{x+h}, $= A_\mu(x+h)^\mu$, während (nach §. 62bis.) die Glieder der Entwickelung von $A_\mu(x+h)^\mu$ (in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Summe) nach dem Gesetze gefunden werden, daß man den Koeffizienten des nächstvorhergehenden (z. B. mit $\frac{h^r}{r!}$ versehenen) Gliedes, mit seinem Exponenten von x multiplizirt, nachher aber den Exponenten um 1 vermindert (und den so erhaltenen neuen Koeffizienten zuletzt mit $\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}$ multiplizirt).

Dadurch und durch den Schluß des §. 62bis. ist aber die Richtigkeit der Gleichung I. außer Zweifel gestellt.

Setzt man in I. statt x den Werth α, so erhält man

$$\text{II.}\quad F_{\alpha+h} = F_\alpha + F^{\text{I}}_\alpha \cdot h + F^{\text{II}}_\alpha \cdot \frac{h^2}{2!} + F^{\text{III}}_\alpha \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ F^{(m-1)}_\alpha \cdot \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} + A_0 h^m,$$

wo h ganz allgemein gedacht ist und jeden denkbaren Ausdruck vorstellen kann.

Setzt man endlich in II. noch $x-\alpha$ statt h, so ergiebt sich eine Umformung von F_x, nämlich

$$\text{III.}\quad F_x = F_\alpha + F^{\text{I}}_\alpha \cdot (x-\alpha) + \frac{1}{2!} F^{\text{II}}_\alpha \cdot (x-\alpha)^2 + \frac{1}{3!} F^{\text{III}}_\alpha \cdot (x-\alpha)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}_\alpha \cdot (x-\alpha)^\mu + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} F^{(m-1)}_\alpha \cdot (x-\alpha)^{m-1} + \frac{1}{m!} F^{(m)}_\alpha (x-\alpha)^m,$$

während (nach §. 83. C) dieser letzte Koeffizient auch $= A_0$ ist.

§. 85.

Diese letztere Umformung der beliebig gegebenen ganzen Funktion F_x von x, in eine ganze Funktion von $x-\alpha$ (die mit F_x von demselben m^{ten} Grade ist), läßt aber sogleich eine Anzahl höchst interessanter Folgerungen zu, nämlich:

I. Dividirt man F_x durch $x-\alpha$, so kommt eine ganze Funktion vom $(m-1)^{ten}$ Grade, welche sich zur Linken in der Form

$$1)\quad B_0x^{m-1}+B_1x^{m-2}+B_2x^{m-3}+\cdots+B_{m-1},$$

zur Rechten aber in der Form

$$2)\quad F^{I}_{\alpha}+\frac{1}{2!}F^{II}_{\alpha}\cdot(x-\alpha)+\frac{1}{3!}F^{III}_{\alpha}\cdot(x-\alpha)^2+\cdots+A_0(x-\alpha)^{m-1}$$

ergiebt; und F_α bleibt zum Rest (S. Anmerkg. 2. zum §. 81.).

II. Dividirt man aber diese neue ganze Funktion 1.) wieder durch $x-\alpha$, so erhält man zwar zur Linken die Form

$$3)\quad C_0x^{m-2}+C_1x^{m-3}+C_2x^{m-4}+\cdots+C_{m-2},$$

zur Rechten aber (aus 2.) die ihr gleiche Form

$$4)\quad \frac{1}{2!}F^{II}_{\alpha}+\frac{1}{3!}F^{III}_{\alpha}(x-\alpha)+\frac{1}{4!}F^{IV}_{\alpha}\cdot(x-\alpha)^2+\cdots+A_0(x-\alpha)^{m-2};$$

und der zuletzt bleibende Rest ist $=F^{I}_{\alpha}$.

III. Fährt man so fort jede neue, durch die letzte Division mit $x-\alpha$ erhaltene ganze Funktion, immer auf's Neue durch $x-\alpha$ zu dividiren, bis man zuletzt eine ganze Funktion vom nullten Grade, d. h. eine bloße Konstante K (nach x) erhält, so sind die, bei jeder Division zuletzt bleibenden Reste (wie die jedesmalige Umformung auf der rechten Seite deutlich sehen läßt) bezüglich

$$\frac{1}{2!}F^{II}_{\alpha},\qquad \frac{1}{3!}F^{III}_{\alpha},\qquad \frac{1}{4!}F^{IV}_{\alpha},\quad \text{2c. 2c.}\quad \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}_{\alpha},$$

und die erhaltene Konstante K ist $=\frac{1}{m!}F^{(m)}_{\alpha}$ d. h. $=A_0$.

IV. Sind daher die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots A_m$ der gegebenen Funktion F_x vom m^{ten} Grade, in Ziffern gegeben, — ist α ebenfalls ein gegebener Ziffernwerth, und will man nun berechnen die Ziffernwerthe, welche die Funktionen

$$F_x,\quad F_x^{I},\quad \frac{1}{2!}F_x^{II},\quad \frac{1}{3!}F_x^{III},\quad \frac{1}{4!}F_x^{IV},\ \cdots\ \frac{1}{(m-1)!}F_x^{(m-1)}$$

annehmen, wenn man in ihnen den Ziffernwerth α statt x setzt, so darf man nur die gegebene Funktion F_x auf dem praktischen Wege, welcher im §. 81. angegeben sich findet, hinter einander fort durch $x-\alpha$ dividiren, also nur unter die gegebenen Koeffizienten

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4,\ \cdots\ A_{m-1},\quad A_m,$$

die neu berechneten

$$B_0,\quad B_1,\quad B_2,\quad B_3,\quad B_4,\ \cdots\ B_{m-2},\quad B_{m-1},\quad B_m = \mathfrak{R},$$

darunter wieder die aus B_0, B_1, B_2, ꝛc. ꝛc. neu berechneten

$$C_0,\quad C_1,\quad C_2,\quad C_3,\ \cdots\ C_{m-2},\quad C_{m-1} = \mathfrak{R}_1,$$

darunter wieder die (aus C_0, C_1, C_2, ꝛc. ꝛc.) neu berechneten

$$D_0,\quad D_1,\quad D_2,\quad D_3,\ \cdots\ D_{m-3},\quad D_{m-2} = \mathfrak{R}_2$$

darunter wieder die (aus D_0, D_1, D_2, ꝛc. ꝛc.) neu berechneten

$$E_0,\quad E_1,\quad E_2,\ \cdots\ E_{m-4},\quad E_{m-3} = \mathfrak{R}_3$$

u. s. w. f. schreiben, und die Reste $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, ꝛc. ꝛc. sind dann bezüglich die gesuchten Werthe jener Funktionen von x, also auch die Ziffernwerthe der Koeffizienten von h^0, h, h^2, h^3, ꝛc. ꝛc. in II. des §. 84., und auch die Ziffernwerthe der Koeffizienten von $(x-\alpha)^0$, $(x-\alpha)$, $(x-\alpha)^2$, $(x-\alpha)^3$, ꝛc. ꝛc. in der Gleichung III. ebendaselbst.

Beispiel. Ist

$$F_x = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 3x + 5,$$

so ist

$$F_x^{I} = 10x^4 - 12x^3 + 8x - 3;$$

$$F_x^{II} = 40x^3 - 36x^2 + 8, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2!}F_x^{II} = 20x^3 - 18x^2 + 4;$$

$$F_x^{III} = 120x^2 - 72x, \quad \text{also} \quad \frac{1}{3!}F_x^{III} = 20x^2 - 12x;$$

$$F_x^{IV} = 240x - 72, \quad \text{also} \quad \frac{1}{4!}F_x^{IV} = 10x - 3;$$

und $F_x^{V} = 240$, also $\frac{1}{5!}F_x^{V} = 2$.

Setzt man nun $x+h$ statt x, so daß man

1) $F_{x+h} = 2(x+h)^5 - 3(x+h)^4 + 4(x+h)^2 - 3(x+h) + 5$

hat, und will man die neue Form von F_{x+h}, nämlich

2) $F_x + F_x^{I} \cdot h + \frac{1}{2!}F_x^{II} \cdot h^2 + \frac{1}{3!}F_x^{III} \cdot h^3 + \frac{1}{4!}F_x^{IV} \cdot h^4 + \frac{1}{5!}F_x^{V} \cdot h^5$

für den Werth $x = \alpha = 3$ angeben, so nimmt man die Koeffizienten von F_x, nämlich

(A)... 2, −3, 0, 4, −3, 5,

und berechnet daraus für $\alpha = 3$ die neuen Koeffizienten

(B)... 2, 3, 9, 31, 90, 275,

daraus wieder die neuen Koeffizienten

(C)... 2, 9, 36, 139, 507,

daraus wieder

(D)... 2, 15, 81, 382,

daraus auf's Neue

(E)... 2, 21, 144,

daraus endlich

(F)... 2, 27,

daraus zu allerletzt

(G)... 2;

und nun sind die Zahlen am weitesten zur Rechten in (B) bis (G), nämlich

275, 507, 382, 144, 27 und 2

bezüglich die Werthe, welche die Funktionen

F_x, F_x^{I}, $\frac{1}{2!}F_x^{II}$, $\frac{1}{3!}F_x^{III}$, $\frac{1}{4!}F^{IV}$ und $\frac{1}{5!}F_x^{V}$

für den Werth 3 von x annehmen. Und in der That ergeben sich dieselben Resultate, wenn man jene Funktionen, wie oben geschehen ist, zuerst herstellt, dann aber in sie statt x den Werth 3 substituirt.

Man findet daher sogleich (aus §. 84. II.)

$$F_{3+h} = 275 + 507 \cdot h + 382 \cdot h^2 + 144 \cdot h^3 + 27 \cdot h^4 + 2 \cdot h^5$$

und (aus §. 84. III.)

$$F_x = 275 + 507 \cdot (x-3) + 382 \cdot (x-3)^2 + 144 \cdot (x-3)^3 + 27 \cdot (x-3)^4 + 2(x-3)^5.$$

§. 86.

Dieselbe Umformung III. des §. 84. kann man aber auch zur analogen Umformung der (ebenfalls ganzen) Funktionen F_x^{I}, F_x^{II}, F_x^{III}, 2c. 2c. benützen. Wird nämlich die μ^{te} Ableitung von F_x d. h. $F_x^{(\mu)}$ als die gegebene Funktion angesehen, so sind $F_x^{(\mu+1)}$, $F_x^{(\mu+2)}$, $F_x^{(\mu+3)}$, 2c. 2c. bezüglich ihre 1^{te}, 2^{te}, 3^{te}, 2c. 2c. Ableitung oder Derivation (nach §. 83.), also ist (genau nach §. 84. III.) auch noch

$$\text{IV.}\quad F_x^{(\mu)} = F_\alpha^{(\mu)} + F_\alpha^{(\mu+1)}(x-\alpha) + \frac{1}{2!}F_\alpha^{(\mu+2)}(x-\alpha)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(m-\mu)!}F_x^{(m)}(x-\alpha)^{m-\mu}.$$

Für $\mu = 0$ ist diese Gleichung IV. zu gleicher Zeit die Gleichung III. des §. 84., wenn man unter $F_x^{(0)}$ die Funktion F_x selbst versteht.

Daraus aber läßt sich auf's Neue folgern (und zwar aus dem bloßen Anblick der Gleichung IV.)

1) Ist $F_\alpha^{(\mu)} = 0$ aber nicht $F_\alpha^{(\mu+1)} = 0$, so ist $F_x^{(\mu)}$ durch $(x-\alpha)$, aber nicht durch eine höhere Potenz von $(x-\alpha)$ theilbar; und dieser Satz gilt auch umgekehrt.

2) Ist $F_\alpha^{(\mu)} = 0$ und $F_\alpha^{(\mu+1)} = 0$, aber nicht $F_\alpha^{(\mu+2)} = 0$, so ist $F_x^{(\mu)}$ durch $(x-\alpha)^2$ aber nicht durch eine höhere Potenz von $(x-\alpha)$ theilbar; und dieser Satz gilt auch umgekehrt.

3) Sind gleichzeitig $F_\alpha^{(\mu)} = 0$, $F_\alpha^{(\mu+1)} = 0$ und $F_\alpha^{(\mu+2)} = 0$, ist aber nicht auch noch $F_\alpha^{(\mu+3)} = 0$, so ist $F_x^{(\mu)}$ durch $(x-\alpha)^3$ theilbar, aber durch keine höhere Potenz von $(x-\alpha)$; und dieser Satz gilt auch umgekehrt.

4) Allgemein: Ist α ein Werth von x, welcher gleichzeitig $F_x^{(\mu)}$, $F_x^{(\mu+1)}$, $F_x^{(\mu+2)}$, ... bis $F_x^{(\mu+\nu-1)}$ der Null gleich macht,

aber nicht mehr $F_x^{(\mu+\nu)}$, so ist $F_x^{(\mu)}$ durch $(x-\alpha)^\nu$ theilbar, aber durch keine höhere Potenz von $(x-\alpha)$; und dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Und dies alles gilt für $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, ꝛc. ꝛc. d. h. für F_x, F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III}, ꝛc. ꝛc., wenn solche unter $F_x^{(\mu)}$ gedacht werden.

5) Ist daher F_x durch $(x-\alpha)^\nu$ theilbar, aber durch keine höhere Potenz von $(x-\alpha)$, — so sind die Ableitungen

F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III}, F_x^{IV}, ⋯ $F_x^{(\nu-1)}$ bezüglich durch $(x-\alpha)^{\nu-1}$, $(x-\alpha)^{\nu-2}$, $(x-\alpha)^{\nu-3}$, $(x-\alpha)^{\nu-4}$, ⋯ $(x-\alpha)$ theilbar und keine derselben durch eine höhere Potenz von $(x-\alpha)$; und die nächstfolgende Ableitung $F_x^{(\nu)}$ ist dann gar nicht mehr durch $(x-\alpha)$ theilbar.

Denn der Voraussetzung zufolge sind nach dem umgekehrten Satz von Nr. 4. (für $\mu=0$ genommen) alle Funktionen F_x, F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III} bis $F_x^{(\nu-1)}$ für $x=\alpha$ der Null gleich, aber nicht mehr $F_x^{(\nu)}$. Daher folgt aus 1.) (wenn man $\nu-1$ statt μ schreibt), unsere Behauptung für $F_x^{(\nu-1)}$; — und aus 2.) (wenn man $\nu-2$ statt μ setzt) unsere Behauptung für $F_x^{(\nu-2)}$; — und aus 3.) (wenn man $\nu-3$ statt μ setzt) unsere Behauptung für $F_x^{(\nu-3)}$; — und aus 4.) (wenn man nach und nach $\nu-4$, $\nu-5$, ⋯ 2, 1 und 0 statt μ, und gleichzeitig bezüglich 4, 5, ⋯ $\nu-2$, $\nu-1$ und ν statt des dortigen ν schreibt) unsere Behauptung für $F_x^{(\nu-4)}$, $F_x^{(\nu-5)}$, ⋯ F_x^{II}, F_x^I und F_x selbst.

Anmerkung. Ueber dies alles wird noch ein größeres Licht verbreitet, wenn man die in dem nun folgenden Paragraphen aufzustellenden einfachsten Grund-Eigenschaften der Derivationen oder Ableitungen gegebener ganzen Funktionen von x, näher kennen lernt.

§. 87.

I. Ist $F_x = \varphi_x \pm \psi_x$, so ist $F^I_x = \varphi^I_x \pm \psi^I_x$.

II. Ist $F_x = K \cdot \varphi_x$, so ist $F^I_x = K \cdot \varphi^I_x$.

III. Ist $F_x = \varphi_x \cdot \psi_x$, so ist $F^I_x = \psi_x \cdot \varphi^I_x + \varphi_x \cdot \psi^I_x$.

IV. Ist $F_x = (x-\alpha)^n$, so ist $F^I_x = n(x-\alpha)^{n-1}$.

Beweis von I. — Hat φ_x das Glied $B_r x^r$, und ψ_x das entsprechende Glied $C_r x^r$, so hat $\varphi_x \pm \psi_x$ das entsprechende Glied $(B_r \pm C_r) \cdot x^r$. — Die entsprechenden Glieder von $\varphi_x{}^I$, $\psi_x{}^I$ und $F_x{}^I$ sind nun bezüglich $rB_r \cdot x^{r-1}$, $rC_r \cdot x^{r-1}$ und $r(B_r \pm C_r) \cdot x^{r-1}$; und so fällt die Richtigkeit der Behauptung I. in die Augen.

Beweis von II. — Das Glied $B_r x^r$ von φ_x, giebt das entsprechende Glied $K \cdot B_r x^r$ von F_x; die diesen Gliedern entsprechenden Glieder von $\varphi_x{}^I$ und $F_x{}^I$, sind nun bezüglich $rB_r \cdot x^{r-1}$ und $rKB_r x^{r-1}$; und so leuchtet die Behauptung II. ein.

Beweis von III. — Denn da die Gleichung $F_x = \varphi_x \cdot \psi_x$ als eine identische, d. h. ganz unabhängig von irgend einen bestimmten Werth von x, vorausgesetzt wird, so muß sie auch noch eine richtige Gleichung liefern, wenn man $x+h$ statt x setzt, was auch h sein mag. Man hat also

1) $F_{x+h} = \varphi_{x+h} \cdot \psi_{x+h}$.

Nun ist aber (nach §. 84.)

2) $\varphi_{x+h} = \varphi_x + \varphi_x{}^I \cdot h +$ Glieder mit h^2, h^3, ꝛc. ꝛc.

3) $\psi_{x+h} = \psi_x + \psi_x{}^I \cdot h +$ Glieder mit h^2, h^3, ꝛc. ꝛc.

Multiplizirt man nun die beiden letztern Gleichungen mit einander, so ergiebt sich

4) $\varphi_{x+h} \cdot \psi_{x+h} = \varphi_x \cdot \psi_x + (\psi_x \cdot \varphi_x{}^I + \varphi_x \cdot \psi_x{}^I) \cdot h +$ Glieder mit h^2, h^3, ꝛc.

Auf der andern Seite ist (ebenfalls nach §. 84.)

5) $F_{x+h} = F_x + F_x{}^I \cdot h +$ Glieder mit h^2, h^3, ꝛc.

Da nun (nach 1.) die Ausdrücke in 4.) und 5.) zur Linken, einander gleich sind, so müssen auch die zur Rechten (in 4. und 5.), für jedes h einander

gleich sein und daher auch die beiden Koeffizienten einer und derselben Potenz von h, wodurch die III. erwiesen sich findet.

Beweis von IV. Aus $F_x = (x-\alpha)^n$ folgt, wenn man $x+h$ statt x setzt, sogleich

$$F_{x+h} = (x+h-\alpha)^n = [(x-\alpha)+h]^n,$$

also nach dem binomischen Lehrsatze auch

$$F_{x+h} = (x-\alpha)^n + n(x-\alpha)^{n-1}.h + \text{ Glieder mit } h^2,\ h^3, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Auf der andern Seite ist (nach §. 95.) auch

$$F_{x+h} = F_x + F_x^{I}\cdot h + \text{ Glieder mit } h^2,\ h^3, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Also müssen wiederum die beiden Reihen zur Rechten, für jedes h einander gleich sein, und deshalb auch die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von h; und daraus folgt nun die Behauptung IV. unabweislich.

§. 87^bis.

Setzt man nun in die III., $(x-\alpha)^n$ statt φ_x, so folgt (nach IV.) aus $\varphi_x = (x-\alpha)^n$, sogleich $\varphi_x^{I} = n(x-\alpha)^{n-1}$; und die III. liefert nun, für diesen Werth von φ_x das nachstehende Resultat, nämlich:

V. Ist $F_x = (x-\alpha)^n\cdot\psi_x$,

so ist allemal auch

$$F_x^{I} = n(x-\alpha)^{n-1}\cdot\psi_x + (x-\alpha)^n\cdot\psi_x^{I}$$
$$= (x-\alpha)^{n-1}\cdot[n\psi_x + (x-\alpha)\psi_x^{I}].$$

VI. Hat daher eine ganze Funktion F_x eine Anzahl n gleicher Faktoren $x-\alpha$; d. h. hat sie die Form $(x-\alpha)^n\cdot\psi_x$, wo ψ_x für $x=\alpha$ nicht mehr der Null gleich wird, d. h. wo wir voraussetzen, daß ψ_x den Faktor $x-\alpha$ nicht mehr hat; wenn also F_x nicht mehr als n gleiche Faktoren $x-\alpha$ hat; — so hat ihre (erste) Derivation F_x^{I} allemal $n-1$ gleiche Faktoren $x-\alpha$, nicht mehr und nicht weniger.

Denn da wir voraussetzen, daß der andere Faktor von F_x, nämlich ψ_x, den Faktor $x-\alpha$ nicht mehr hat, so hat auch der

andere Faktor von F^I_x, nämlich $n\psi_x + (x-\alpha)\psi^I_x$ diesen Faktor $x-\alpha$ nicht mehr, eben weil der zweite Summand $(x-\alpha)\cdot\psi^I_x$ denselben noch hat.

VII. Und weil F^{II}_x wieder die (erste) Derivation von F^I_x ist, und F^{III}_x wieder die (erste) Derivation von F^{II}_x, u. s. w. f., so folgt aus VI. noch:

Hat die ganze Funktion F_x vom m^{ten} Grade, nicht mehr als n mal den Faktor $x-\alpha$, so hat denselben Faktor $x-\alpha$

die ganze Funktion F^I_x vom $(m-1)^{ten}$ Grade, n—1 mal,
" " " F^{II}_x " $(m-2)^{ten}$ " , n—2 mal,
" " " F^{III}_x " $(m-3)^{ten}$ " , n—3 mal,
" " " F^{IV}_x " $(m-4)^{ten}$ " , n—4 mal,

u. s. f.; also hat denselben Faktor $x-\alpha$

die ganze Funktion $F^{(n-2)}_x$ vom $(m-n+2)^{ten}$ Grade, 2 mal
" " " $F^{(n-1)}_x$ " $(m-n+1)^{ten}$ " , nur 1 mal

und die folgenden Derivationen $F^{(n)}_x$, $F^{(n+1)}_x$, 2c. 2c. haben diesen Faktor $x-\alpha$ gar nicht mehr.

Dadurch ist aber auf die Behauptung 5.) des §. 86. das versprochene neue Licht geworfen.

§. 88.

1) Haben daher die beiden ganzen Funktionen F_x und F^I_x keinen gemeinschaftlichen Theiler, (§. 79.), so hat F_x keine zwei gleichen einfachen Faktoren.

2) Findet man aber (nach dem Verfahren des §. 82.) zwischen F_x und F^I_x einen größten gemeinschaftlichen Theiler G_x, existirt jedoch zwischen G_x und F^{II}_x kein gemeinschaftlicher Theiler mehr, so kommt jeder einfache Faktor von G_x in der ganzen Funktion F_x, zweimal als Faktor vor, nicht öfter und nicht

weniger oft. — Ist daher G_x nur vom ersten Grade, etwa $x-b$, so hat man zwei einfache Faktoren von F_x, nämlich $(x-b)^2$ bereits wirklich gefunden.

Findet sich jedoch zwischen G_x und F_x^{II} noch ein größter gemeinschaftlicher Theiler H_x, so ist diese Funktion H_x ein größter gemeinschaftlicher Theiler der drei Funktionen F_x, F_x^I und F_x^{II}; und wenn dann H_x mit F_x^{III} keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr hat, so kommt jeder einfache Faktor von H_x, in der ganzen Funktion F_x vom m^{ten} Grade, dreimal vor, nicht öfter und nicht weniger oft. — Ist dann H_x zugleich vom ersten Grade, etwa $x-b$, so hat F_x den Faktor $x-b$ dreimal.

3) Man kann aber, wenn die ganze Funktion F_x vom m^{ten} Grade, mehrere einfache Faktoren $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ꝛc. n mal, mehrere andere einfache Faktoren $(x-e)$, $(x-f)$, ꝛc., μ mal (wo $\mu<n$), noch andere z. B. $(x-g)$, ꝛc. ν mal (wo $\nu<\mu$) u. s. w. f. haben sollte, — die ganzen Funktionen

$\varphi=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$, $\psi=(x-e)(x-f)\cdots$, $\chi=(x-g)\cdots$

u. s. w. f. finden, welche den Produkten dieser einfachen Faktoren bezüglich gleich sind, so wie auch die ganze Funktion

$G_x=\frac{F_x}{\varphi^n\cdot\psi^\mu\cdot\chi^\nu\cdots}$; und es finden sich auch die Zahlen n, μ, ν, ꝛc. dazu, welche anzeigen, wie oft bezüglich jeder einfache Faktor von φ, von ψ, von χ, u. s. w. in der ganzen Funktion F_x vorkommt.

Wir wollen beispielsweise annehmen, daß man habe

$$F_x=\varphi^5\cdot\psi^4\cdot\chi^3\cdot\theta^2\cdot G_x,$$

wo θ das Produkt aller der einfachen Faktoren vorstellt, welche in F_x zweimal vorkommen, so folgt aus V. und VI. des §. 87.

$$F_x^I=\varphi^4\cdot\psi^3\cdot\chi^2\cdot\theta\cdot H_x;\qquad F_x^{II}=\varphi^3\cdot\psi^2\cdot\chi\cdot K_x;$$

$$F_x^{III}=\varphi^2\cdot\psi\cdot L_x;\qquad F_x^{IV}=\varphi\cdot M_x,$$

während F_x^V, F_x^{VI}, ꝛc. von den gleichen Faktoren in F_x, keinen

mehr enthalten, eben so wenig als die ganzen Funktionen G_x, H_x, K_x, L_x, M_x deren enthalten.

Sucht man nun (nach §. 82.) zwischen F_x und F_x^I den größten gemeinschaftlichen Theiler T_1; eben so zwischen F_x^I und F_x^{II} den größten gemeinschaftlichen Theiler T_2; ferner zwischen F_x^{II} und F_x^{III} den größten gemeinschaftlichen Theiler T_3; dann zwischen F_x^{III} und F_x^{IV} den größten gemeinschaftlichen Theiler T_4; und setzt man dies so lange fort, bis man (außer der Einheit) keinen gemeinschaftlichen Theiler zwischen zwei nächst auf einander folgenden der Derivationen von F_x, mehr findet (welches in unserem Beispiele jetzt der Fall ist, so wie hier T_4 als der letzte dieser größten gemeinschaftlichen Theiler sich zeigt, also $T_5 = 1$); — dann hat man (in unserem Beispiele)

$$T_5 = 1, \; T_4 = \varphi; \quad T_3 = \varphi^2 \cdot \psi; \quad T_2 = \varphi^3 \cdot \psi^2 \cdot \chi$$
$$\text{und} \quad T_1 = \varphi^4 \cdot \psi^3 \cdot \chi^2 \cdot \theta;$$

und hieraus findet sich

$$\varphi = T_4; \quad \psi = \frac{T_3 \cdot T_5}{T_4^2}; \quad \chi = \frac{T_2 \cdot T_4}{T_3^2} \quad \text{und} \quad \theta = \frac{T_1 \cdot T_3}{T_2^2},$$

wodurch φ, ψ, χ, θ gefunden sind, während dann die ganze Funktion $G_x = \dfrac{F_x}{\varphi_4 \cdot \psi_3 \cdot \chi^2 \cdot \theta}$ noch dazu gefunden wird.

Fassen wir nun das Verfahren ganz allgemein auf. — Denken wir uns eine ganze Funktion F_x gegeben, von deren Faktoren wir noch gar nichts wissen, und untersuchen wir nun, ob sie gleiche Faktoren hat und wieviele Faktoren sie zweimal, wieviele dreimal, wieviele sie viermal, u. s. w. f. hat.

Wir suchen zu dem Ende zwischen je zwei der auf einander folgenden Funktionen

$$F_x, \; F_x^I, \; F_x^{II}, \; F_x^{III}, \; F_x^{IV}, \ldots F_x^{(n-2)}, \; F_x^{(n-1)}, \; F_x^{(n)}, \; F_x^{(n+1)}, \; \text{2c. 2c.}$$

die größten gemeinschaftlichen Theiler

$$T_1, \; T_2, \; T_3, \; T_4, \; T_5, \ldots T_{n-1}, \; T_n, \; T_{n+1}, \; \text{2c. 2c.}$$

Findet sich nun schon $T_n = 1$ (oder nach x konstant) und T_{n-1} noch als eine Funktion von x, dann ist

T_{n-1} das Produkt der einfachen Faktoren, welche in F_x n mal,

$\frac{T_{n-2} \cdot T_n}{T_{n-1}^2}$ " " " " " , " " " (n–1)mal,

$\frac{T_{n-3} \cdot T_{n-1}}{T_{n-2}^2}$ " " " " " , " " " (n–2)mal,

$\frac{T_{n-4} \cdot T_{n-2}}{T_{n-3}^2}$ " " " " " , " " " (n–3)mal,

u. s. w. f., also auch

$\frac{T_2 \cdot T_4}{T_3^2}$ das Produkt der einfachen Faktoren, welche in F_x 3 mal,

endlich

$\frac{T_1 \cdot T_3}{T_2^2}$ das Produkt der einfachen Faktoren, welche in F_x 2mal

vorkommen; — und wenn einer dieser Ausdrücke z. B.

$\frac{T_{k-1} \cdot T_{k+1}}{T_k^2}$, $= 1$ (oder nach x konstant) wird, so ist dies ein Beweis, daß es nicht einen einzigen einfachen Faktor giebt, welcher in der gegebenen Funktion F_x gerade k mal vorkäme. — Dividirt man zuletzt die Funktion F_x durch das Produkt aller (Potenzen der) gleichen Faktoren und ist G_x die ganze Funktion, welche man als Quotient erhält, so ist man überzeugt, daß G_x keine zwei gleichen Faktoren mehr hat.

Durch dieses Verfahren wird also die gegebene ganze Funktion F_x auf die Form $\varphi_x^n \cdot \psi_x^\mu \cdot \chi_x^\nu \cdots G_x$ gebracht, wo φ_x, ψ_x, χ_x, $\cdots$ G_x gefundene ganze Funktionen von x sind, von denen man überzeugt ist, daß keine derselben zwei (oder gar mehr) gleiche einfache Faktoren enthält.

Zweite Abtheilung.

Von den Ziffernwerthen der ganzen Funktionen.

§. 89. Aufgabe.

Die Summe S der ganzen Funktion

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^m$$

zu finden, d. h. eine andere Form zu finden, welche dieser Summe gleich ist.

Auflösung. Man setze:

$$1)\quad 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m=S,$$

und multiplizire beide Seiten mit x, so erhält man:

$$2)\quad x+x^2+x^3+\cdots+x^m+x^{m+1}=x\cdot S.$$

Subtrahirt man nun diese Gleichung 2.) von 1.), so ergibt sich:

$$3)\quad 1-x^{m+1}=(1-x)\cdot S,$$

woraus

$$4)\quad \frac{1-x^{m+1}}{1-x}=S$$

folgt.

§. 90.

Demnach ist die Summe der ganzen Funktion:

$$P+Px+Px^2+Px^3+\cdots+Px^m, = P\cdot\frac{1-x^{m+1}}{1-x},$$

und dies ist zu gleicher Zeit die Summe einer jeden geometrischen Reihe, in so ferne die ganze Funktion von x zur Linken, gewöhnlich so genannt wird.

Man sagt nämlich: die Glieder P, Px, Px^2, Px^3, 2c. 2c. bilden eine geometrische Progression oder eine geometrische Reihe, von welcher P das erste, Px^m das m+1te Glied, x aber der Exponent der Reihe genannt wird; — und die so eben erwiesene Gleichung:

$$S\left[\begin{matrix} Px^a \\ a+b=m \end{matrix}\right] = P \cdot \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

bildet den wichtigsten Satz in der Lehre der geometrischen Reihen.

§. 91. Lehrsatz.

I. In einer reellen ganzen Funktion von x, nämlich in

$$A+Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m,$$

kann man dem x jedesmal einen solchen absoluten (d. h. nicht negativen) Werth geben, daß das erste Glied A, absolut genommen, größer ist, als die arithmetische und dann um so mehr größer als die wirkliche Summe aller übrigen Glieder, wenn auch darunter welche mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen sollten; und hat ein Werth von x diese Eigenschaft, so hat jeder (absolut genommene) kleinere, dieselbe Eigenschaft.

II. Man kann x immer so klein nehmen, daß die Summe $Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m$ unendlich klein wird, d. h. immer kleiner noch, als jede bereits noch so klein gedachte bestimmte Zahl.

Beweis. Denn es sei P der größte der übrigen Koeffizienten, so ist offenbar:

$$1) \quad P\cdot(x+x^2+x^3+\cdots+x^m) > Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m,$$

oder (nach §. 90.):

$$2) \quad P\cdot\frac{x-x^{m+1}}{1-x} > Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m \text{ *)}.$$

Soll nun A größer sein, als die arithmetische Summe rechts, so darf man nur nehmen:

$$A > P\cdot\frac{x-x^{m+1}}{1-x},$$

oder $x<1$ und $A(1-x) > P(x-x^{m+1})$,

d. h. $x<1$ und $A > [A+P(1-x^m)]x$,

d. h. $x<1$ und $\frac{A}{A+P(1-x^m)} > x$; oder $\frac{A}{A+P} > x$.

---

*) Wo alle Koeffizienten absolut genommen sein sollen.

Umgekehrt nämlich, nimmt man $x<\frac{A}{A+P}$ *), so ist $x<1$, also auch $P(1-x^m)<P$, $[A+P(1-x^m)]x<(A+P)x$; und weil $(A+P)x<A$ ist, so ist um so mehr dann $[A+P(1-x^m)]x<A$,

also
$$A-Ax>P(x-x^{m+1}),$$
folglich
$$A>P\cdot\frac{x-x^{m+1}}{1-x};$$
also
$$A>Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m,$$
wodurch die Behauptung I. erwiesen ist.

Um die Behauptung II. zu erweisen, schreibe man

$Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m$ zunächst so, nämlich:
$$x(B+Cx+Dx^2+\cdots+Mx^{m-1}).$$
Nun ist so eben bewiesen worden, daß $x<1$ und so genommen werden kann, daß $B>Cx+Dx^2+\cdots+Mx^{m-1}$ wird, wenn auch alle Koeffizienten als absolute (positive) Zahlen gedacht werden, und daß für jeden (absolut) noch kleinern Werth von x, solches um so mehr der Fall sein müsse. Folglich kann man x so klein nehmen, daß
$$B+Cx+Dx^2+\cdots+Mx^{m-1}<2B,$$
demnach
$$Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m<2Bx$$
wird, während 2Bx selbst jede noch so kleine Zahl k an Kleinheit noch übertrifft, wenn man $x<\frac{k}{2B}$ nimmt.

§. 92.

I. Ordnet man die reelle ganze Funktion fallend, d. h. nimmt man
$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+Sx^2+Tx+U, \qquad (=F_x)$$
so kann man auch immer dem x einen solchen absoluten (d. h. nicht negativen) Werth geben, daß das erste Glied Ax^m, absolut genommen, größer wird, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder; und hat ein Werth von x diese Eigenschaft, so hat sie auch jeder absolut größere.

---

*) Immer nur die absolut genommenen Koeffizienten verstanden.

Denn man setze $\frac{1}{z}$, statt x, so erhält man, indem mit z^m multiplizirt wird, $z^m \cdot F_x =$

$$A+Bz+Cz^2+\cdots+Sz^{m-2}+Tz^{m-1}+Uz^m.$$

Da nun ein Werth $\frac{1}{a}$ für z möglich ist (und dann jeder kleinere), für welchen A größer wird, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder, so gibt es wegen $z=\frac{1}{x}$, auch einen Werth a von x, der >1 ist, und welcher

$$A>B\frac{1}{x}+C\frac{1}{x^2}+\cdots+U\frac{1}{x^m},$$

also auch $Ax^m>Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+U$

macht; und so wie für z ein noch kleinerer Werth gesetzt wird, so erhält man für x einen noch größeren, der dieselbe Eigenschaft haben muß.

II. Man kann auch den Werth von x immer so groß nehmen, daß das absolut genommene erste Glied Ax^m, die arithmetische und deshalb auch die wirkliche Summe der übrigen Glieder $Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+Tx+U$ um mehr noch übersteigt, als jede noch so groß gedachte bestimmte Zahl $\triangle$, d. h. daß Ax^m unendlich groß wird.

Denn, denken wir uns alle Koeffizienten positiv (oder vielmehr absolut), so ist

1) $Ax^m-(Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+U)$

$$=x^{m-1}\left[Ax-\left(B+C\frac{1}{x}+\cdots+U\frac{1}{x^{m-1}}\right)\right].$$

Da man nun x groß genug, nämlich $\frac{1}{x}$ klein genug nehmen kann (nach §. 91. II.), daß $C\frac{1}{x}+\cdots U\frac{1}{x^{m-1}}$ unendlich klein wird, so kann man jedenfalls x so groß nehmen, daß für diesen und dann auch für jeden noch größern Werth von x,

$$B+C\frac{1}{x}+\cdots+U\cdot\frac{1}{x^{m-1}}<2B$$

wird, so daß die vorstehende Gleichung 1.) in die Ungleichung

$$2)\quad Ax^m-(Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+U)>x^{m-1}(Ax-2B)$$

übergeht. Da nun x so groß genommen werden kann, daß $Ax-2B>\triangle$ wird, weil man dazu nur $x>\frac{\triangle+2B}{A}$ zu nehmen braucht, so wird dann um so mehr $x^{m-1}(Ax-2B)$ und dann wieder um so mehr die Differenz in 2.) zur Linken, $>\triangle$ werden, wie groß auch $\triangle$ gedacht sein mag.

Anmerkung. Ist daher P der größte aller Koeffizienten, so darf man nur $x\geqq\frac{P}{A}+1$ machen, wenn das erste Glied Ax^m größer sein soll, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder. Und eben so darf man nur $x\geqq\frac{\triangle+2B}{A}$ nehmen, um zu bewirken, daß das erste Glied Ax^m die Summe aller übrigen Glieder um mehr als jede bereits noch so groß gedachte Zahl $\triangle$ übersteigt. — Dabei muß man aber ja nicht unterlassen zu bemerken, daß hier immer nur von dem absolut Größern und Kleinern die Rede ist.

§. 93.

Hieraus folgt:

1) Man kann in der reellen ganzen Funktion:

$$A+Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m,$$

dem x jedesmal einen solchen Werth geben, daß die ganze Funktion selbst, einer positiven oder einer negativen Zahl gleich ist, je nachdem A positiv oder negativ. Und findet dies für einen bestimmten Werth von x statt, so findet dasselbe für jeden absolut kleinern Werth von x ebenfalls statt (§. 91. I.). — Und nimmt man x unendlich klein, so ist der Werth der ganzen Funktion, von dem Werthe A nur um ein Unendlich-Kleines verschieden.

2) Man kann aber auch in der reellen ganzen Funktion:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Sx^2 + Tx + U,$$

dem x einen solchen reellen Werth geben, daß die gegebene ganze Funktion selbst, einer positiven oder negativen Zahl gleich wird, je nachdem das erste Glied x^m einer positiven oder einer negativen Zahl gleich ist; und findet dies statt für irgend einen Werth von x, so muß solches auch für jeden absolut größern Werth von x statt finden. — Und nimmt man x positiv oder negativ aber an sich unendlich groß, so wird der Werth dieser ganzen Funktion ebenfalls positiv oder negativ unendlich groß, je nachdem das erste Glied x^m positiv oder negativ wird.

3) Man kann daher immer statt x eine solche absolute (positive) Zahl setzen, daß die reelle ganze Funktion

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + U$$

einer positiven Zahl gleich wird, und dies ist allemal der Fall, wenn $x \overline{\overline{>}} P+1$ genommen wird, wo P der größte aller Koeffizienten ist. Es ist aber auch allemal der Fall, wenn $x \overline{\overline{>}} S+1$ genommen wird, wo S der größte unter den negativen Koeffizienten ist.

4) Man kann aber auch immer statt x eine solche negative Zahl setzen, daß die reelle ganze Funktion

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + U$$

einer positiven Zahl gleich wird, wenn m gerade ist, und einer negativen Zahl gleich wird, wenn m ungerade ist.

Anmerkung. Dies letztere versteht man darunter, wenn man sagt, daß diese ganze Funktion $= +\infty$ werde für $x = +\infty$, dagegen $= \pm\infty$ werde für $x = -\infty$, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Man vergleiche sorgfältig damit die im ersten Theile dieses Werkes (§. 45.) gegebenen Begriffe des Größern und Kleinern.

§. 94. Erklärung.

Wenn in der Folge gesagt werden wird: eine Funktion F_x von x, ändere sich stetig, mit den stetig sich ändernden reellen Werthen von x, so verstehe man darunter: daß der Unterschied:

$$F_{x+h}-F_x,$$

welcher die Aenderung von F_x genannt wird, absolut genommen, kleiner werde, je kleiner h gedacht wird, und daß diese Aenderung kleiner werden könne, als jede noch so kleine aber gegebene Zahl D; und zwar für jeden Werth von x. — Sagt man aber, daß F_x sich für x zwischen α und β stetig ändere, so gilt das von dem Unterschied

$$F_{x+h}-F_x$$

Gesagte nur, in so ferne x einen, zwischen α und β liegenden Werth hat. — Die Zahl h heißt dabei die Aenderung von x.

§. 95.

Ist F_x eine reelle ganze Funktion von x, so ändert sich solche mit den reellen Werthen von x stetig (§. 24.).

Denn es ist (nach §. 84. I.)

$$1)\quad F_{x+h}=F_x+F_x^{I}\cdot h+F_x^{II}\cdot\frac{h^2}{2!}+F_x^{III}\cdot\frac{h^3}{3!}+ \text{ ꝛc. ꝛc.},$$

also

$$2)\quad F_{x+h}-F_x=h\cdot\left(F_x^{I}+F_x^{II}\cdot\frac{h}{2!}+F_x^{III}\cdot\frac{h^2}{3!}+ \text{ ꝛc. ꝛc.}\right).$$

Nun kann (nach §. 90.) h immer klein genug gedacht werden, daß auch für jeden noch kleinern Werth von h, der eingeklammerte Faktor zur Rechten, kleiner als der absolute Werth von $2F_x^{I}$, daß also auch

$$3)\quad F_{x+h}-F_x < \text{ als der absolute Werth von } 2F_x^{I}\cdot h$$

wird, während das letztere Produkt $2F_x^{I}\cdot h$ stets kleiner werden

kann als jeder noch so kleine Werth D, weil man nur $h < \pm \frac{D}{2F^{I}_{x}}$ zu nehmen braucht, wo das ± Zeichen nur den absoluten Werth dieses Quotienten anzeigen soll.

Sollte an einer Stelle d. h. für einen gewissen Werth von x, $F^{I}_{x} = 0$ werden, so würde

$$F_{x+h} - F_x = h^2 \cdot \left(F^{II}_{x} \cdot \frac{1}{2!} + F^{III}_{x} \cdot \frac{h}{3!} + F^{IV}_{x} \cdot \frac{h^2}{4!} + \cdots\right)$$

sein und dadurch ist unsere Behauptung auch für diese (Ausnahms-) Werthe von x, außer Zweifel gestellt.

Anmerkung. Man sieht hier denselben Satz für alle ganzen Funktionen von x allgemein bewiesen, der bereits im ersten Theiles dieses Werkes (§§. 157. 158. 176. 198.) für die ganzen Funktionen der vier ersten Grade bewiesen sich findet.

§. 96.

Zugleich ist die Aenderung von F_x, für ein so kleines absolutes h, positiv oder negativ, je nachdem der erste Koeffizient F^{I}_{x} positiv oder negativ ist.

Dagegen ist, wenn die Aenderung h von x negativ, aber absolut so sehr klein ist, die Aenderung von F_x nothwendig negativ oder positiv, je nachdem dieser erste Koeffizient F^{I}_{x} positiv oder negativ ist.

Anmerkung. Jede ganze Funktion F_x hat daher die Eigenschaft, daß sie sich für auf einander folgende Werthe von x, die alle von einander nur um eine sehr kleine Zahl h verschieden sind, ebenfalls nur unmerklich ändert, und daß man die auf einander folgenden Werthe von x so nahe nehmen kann, daß auch die auf einander folgenden Werthe der Funktion F_x einander so nahe kommen, als man nur immer will.

Während aber die auf einander folgenden Werthe von x, mmer größer und größer werden, muß die Funktion F_x nicht

nothwendig ebenfalls immer größer und größer werden, sondern sie kann abwechselnd größer und kleiner werden, in so ferne solches, für so klein gedachte h davon abhängt, ob F^{I}_{x} positiv oder negativ ist, während dieses letztere wieder von dem jedesmaligen Werthe von x abhängt.

§. 97.

Denkt man sich dem x in F_x, nach und nach alle stetig wachsenden reellen Werthe gegeben, von $-\infty$ an bis zu $+\infty$ hin, so wachsen (nach §. 96.) die Werthe von F_x mit denen von x zugleich stetig, so lange dieselben den ersten Koeffizienten F^{I}_{x} [in der Entwickelung (des §. 84.) von F_{x+h} nach Potenzen von h] positiv machen; dagegen nehmen die Werthe von F_x ab, während die von x immerfort wachsen, sobald man zu solchen Werthen von x gelangt ist, welche F^{I}_{x} negativ machen. Und dazwischen liegt einer der reellen Werthe von x, welcher F^{I}_{x}, $=0$ macht, und dieser Werth von x bildet also in Bezug auf den Gang der reellen Werthe von F_x einen Wendepunkt, so daß für ihn diese Funktion F_x ein Kleinstes oder ein Größtes wird, je nachdem sie hier vom Abnehmen zum Wachsen, oder vom Wachsen zum Abnehmen übergeht.

Das letztere hängt aber wieder ab von dem zweiten Koeffizienten F^{II}_{x} jener Entwickelung von F_{x+h}. Machen die in Rede stehenden reellen Werthe von x, welche F^{I}_{x} zu Null machen, F^{II}_{x} positiv, so gehen die Werthe von F_x, nachdem sie bisher abgenommen haben, jetzt zum Wachsen über, und im Wendepunkt ist F_x ein Kleinstes. Wird aber F^{II}_{x} negativ, so ist im Wendepunkt, F_x ein Größtes. — Und wird auch zugleich $F^{II}_{x}=0$ und nicht F^{III}_{x}, so findet gar kein Wendepunkt statt für diesen Werth von x, obgleich er $F^{I}_{x}=0$ macht; und nur erst, wenn derselbe Werth von x, F^{I}_{x}, F^{II}_{x}, und zugleich F^{III}_{x},

nicht aber F_x^{IV} zu Null macht, findet für diesen Werth von x, in dem Gange der reellen Werthe ein Wendepunkt statt, an welchem F_x ein Kleinstes oder ein Größtes ist, je nachdem F_x^{IV} für denselben Werth von x positiv oder negativ wird. — Man erkennt leicht, wie diese Untersuchung im Speziellen weiter verfolgt werden kann.

§. 98.

Denkt man sich abermals dem x nach und nach alle auf einander folgenden stetig wachsenden Werthe, von $-\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin, gegeben, während F_x die reelle ganze Funktion

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

vorstellt, so sind alle zugehörigen Werthe von F_x nothwendig ebenfalls reell, und dabei stetig sich ändernd, und

von $+\infty$ anfangend und mit $+\infty$ aufhörend, wenn m eine gerade Zahl ist;

dagegen

von $-\infty$ anfangend und mit $+\infty$ aufhörend, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Im erstern Falle, wenn m eine gerade Zahl, kann die Funktion F_x, eben weil sie sich stetig nur ändert, entweder gar nicht bis zur Null hinkommen, oder, geht sie einmal durch 0 hindurch in das Negative, so muß sie noch einmal durch Null hindurch zurückkehren, um mit $+\infty$ aufhören zu können. Ueberhaupt kann sie nur 2, 4, 6, d. h. eine gerade Anzahl mal, vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven, durch Null hindurch gehen, so daß unter allen reellen Werthen von x, entweder keiner, oder 2, oder 4, oder 6, oder überhaupt eine gerade Anzahl derselben diese ganze Funktion F_x zu Null machen. — Im andern Falle, wenn m eine ungerade Zahl ist, muß F_x einmal wenigstens durch Null hindurchgehen, sie kann aber wieder durch Null vom Negativen zum Positiven zurückkehren, und

geht dann 3 mal durch Null hindurch. Eben so kann sie 5, 7, ꝛc. mal, überhaupt eine ungerade Anzahl mal, vom Positiven in das Negative oder vom Negativen in das Positive, durch Null hindurchgehen, während nämlich dem x nach und nach alle reellen und stetig abnehmenden Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin, gegeben gedacht werden.

Anmerkung. Es erleiden jedoch diese Folgerungen in allen den Fällen eine Ausnahme, in welchen der Gang der Funktion sie gerade bis zu Null hinführt, und von da sogleich wieder auf dieselbe Seite zurück.

§. 99.

Und ist m eine gerade Zahl, dagegen das letzte Glied A_m der ganzen Funktion F_x, negativ, so wird F_x

$$+\infty, \qquad \text{negativ}, \qquad +\infty,$$

während

$$x = -\infty, \qquad x = 0, \qquad x = +\infty$$

genommen wird; also gehen dann die reellen Werthe von F_x, — während dem x alle reellen Werthe, von $-\infty$ bis zu $+\infty$ stetig abnehmend gedacht, gegeben werden, — von $+\infty$ in das Negative hinüber und zu $+\infty$ zurück, mithin wenigstens zwei mal durch Null hindurch. Unter den reellen Werthen von x existiren also dann nothwendig zwei, welche F_x zu Null machen, d. h. der (höheren) Gleichung $F_x = 0$ genügen, ein positiver und ein negativer.

§. 100.

Wird dieselbe ganze Funktion F_x, für $x = \alpha$ positiv, dagegen für $x = \beta$ negativ, während α und β reelle Zahlen sind, so liegt zwischen α und β wenigstens ein, vielleicht aber auch mehr als ein reeller Werth von x, welcher F_x zu Null macht, d. h. der Gleichung $F_x = 0$ genügt, eben weil, während dem x alle stetig neben einander liegenden reellen Werthe zwischen

α und β gegeben gedacht werden, F_x nur stetig sich ändert, also nur durch Null hindurch vom Positiven zum Negativen übergehen kann.

Dieser Werth von x, welcher $F_x = 0$ macht, ist dagegen vielleicht rational, vielleicht irrational, immer aber doch als eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl anzusehen, wenn er nicht Null ist. (Man vergleiche §. 4. d. I. Th.).

Anmerkung. Kann diese irrationale Zahl aber auch nicht angegeben werden, so können doch unendlich viele angebbare Näherungs-Werthe gedacht werden, die von ihr selbst um weniger verschieden sind, als jede noch so kleine aber gegebene Zahl.

Schluß-Note.

Alles dies letztere, und was bereits im ersten Theile dieses Lehrbuches über den Gang der reellen Werthe der ganzen Funktionen der vier ersten Grade gesagt sich findet, läßt sich auch, wenn man geometrische Betrachtungen anwenden will, noch räumlich versinnlichen. — Denkt man sich nämlich eine unbegrenzte gerade Linie (Fig. 6.) X′AX, in ihr irgendwo einen Punkt A, und von diesem Punkte A aus nach und nach alle Werthe von x hingetragen ($AP_1 = 1$, $AP_2 = 2$, $AP_3 = 3$, u. s. w. aber auch alle Zwischen-Werthe von x, von denen einer durch AP selbst vorgestellt sein mag); denkt man sich ferner durch die Endpunkte dieser Abscissen AP_1, AP_2, AP_3, ꝛc. ꝛc., AP, Linien auf X′AX senkrecht errichtet, und auf diesen von X′X aus die, zu $x = AP_1$, $x = AP_2$, $x = AP_3$, ꝛc. ꝛc., $x = AP$, gehörigen Werthe von F_x hingetragen, nach oben oder nach unten, je nachdem solche positiv oder negativ sind, etwa $F_x = -P_1M_1$, $F_x = -P_2M_2$, $F_x = -P_3M_3$, ꝛc. ꝛc., $F_x = -PM$, so bilden diese Ordinaten P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ꝛc. ꝛc., PM, Endpunkte M_1, M_2, M_3, M_4, ꝛc. ꝛc. M, welche dicht neben einander liegen werden, wenn man die Abscissen AP selbst stetig nur größer genommen sich denkt, so daß man den Gang der reellen Werthe der Funktion F_x in einer krummen Linie $M_4M_3M_2M_1$ versinnlicht dargestellt findet, und zwar vollkommen, sobald man noch die negativen Werthe von x, von A aus links hin auf AX′ als Abscissen abträgt, und die zugehörigen Werthe von F_x wieder senkrecht aufträgt, nach oben hin, oder nach unten hin, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

Auf diese Weise erblickt man bei bloßer Anschauung der Figur, alles in den (§§. 94.–100.) vorgetragene versinnlicht. In den Punkten P_5, P_6, P_7, P_8

(Fig. 8.), wo die Kurve, der Axe X'AX begegnet, da finden sich die Werthe von x, nämlich $-AP_5$, AP_6, AP_7, $-AP_8$, 2c. 2c., (positiv oder negativ genommen, je nachdem die Punkte P_5, P_6, P_7, P_8, 2c. 2c. rechts oder links von A liegen), für welche $F_x = 0$ wird. — Die Kurve trifft die Axe X'AX nur dann, wenn ihre Ordinate F_x vom Positiven in das Negative, oder vom Negativen in das Positive übergeht. Der Abscissen-Werth x, für den Punkt, den die Kurve mit der Axe X'AX gemein hat, liegt also zwischen den Werthen von x, für welche die zugehörigen Punkte auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, für welche also F_x einmal positiv das anderemal negativ geworden ist. — Ist F_x eine ganze Funktion vom geraden Grade, so wird sie positiv für $x = +\infty$ und auch für $x = -\infty$; die Kurve wird also dann links und rechts oberhalb X'AX in's Unendliche fortlaufen, aber eben deshalb, wenn sie die Axe trifft, solche 2, 4, 6, 2c., überhaupt eine gerade Anzahl mal treffen, oder gar nicht, wie in Fig. 6., 7., 8.) zu sehen, dagegen ausnahmsweise auch in fünf Punkten (Fig. 11.), wo man jedoch sich vorstellt, daß die Kurve in H, eben wie sie unter die Axe gehen will, sich befindet, und nun noch einmal durch denselben Punkt H wieder nach oben hin geht, so daß die Axe in H zweimal von der Kurve geschnitten wird; dann kommen sechs Durchschnittspunkte heraus. — Ist dagegen F_x vom ungeraden Grade, so wird solche mit x zugleich $+\infty$ und $-\infty$; die Kurve geht dann links unterhalb der Axe, rechts aber oberhalb der Axe in's Unendliche fort; also nothwendig einmal, vielleicht aber 3, 5, 7, 2c. mal durch die Axe hindurch.

Sechstes Kapitel.

Von den unendlichen Reihen.

Erste Abtheilung.

Von den unendlichen Reihen im Allgemeinen.

§. 101. Erklärung.

Eine ganze Funktion von x, die man sich in's Unendliche fortgesetzt denkt, so daß ihr Grad kein bestimmter, sondern größer ist, als jede noch so große denkbare Zahl; eine ganze Funktion also, die nie wirklich darstellbar ist, sondern nur in der Idee in uns lebt, nämlich:

$$A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \cdots \text{ in infinit.},$$

heißt eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende (fortschreitende) unendliche Reihe. — Der Buchstabe x heiße der Fortschreitungsbuchstabe. — Die ganze Funktion von x von einem bestimmten Grade, mag dann eine endliche Reihe genannt werden.

Eine ganze Funktion zweier Veränderlichen x und y, oder dreier Veränderlichen x, y und z, oder überhaupt von m Veränderlichen, deren Glieder nach jedem der Veränderlichen geordnet, ins Unendliche fortgehend gedacht werden, heiße eine unendliche Reihe der zweiten Ordnung, oder der dritten Ordnung, oder der m^{ten} Ordnung. — Obige unendliche Reihe kann dann, zum Unterschied, eine unendliche Reihe der ersten Ordnung genannt werden.

Die unendliche Reihe nenne man eine allgemein-numerische, wenn die Koeffizienten in ihren bestimmten Ziffernwerthen von der Form $p+qi$ (die also theils reell, theils imaginär sein können) gleich sind; sie heiße konvergent, wenn der Fortschreitungsbuchstabe ebenfalls einen solchen Werth erhalten hat, und wenn die Summe von n ersten Gliedern derselben einen Ausdruck $P+Qi$ gibt, in welchem P und Q Ausdrücke sind, die nicht unbestimmt, also auch nicht unendlich werden, sondern einen endlichen reellen Werth annehmen, so oft $n=\infty$ genommen wird*). — Im entgegengesetzten Falle heiße die Reihe divergent.

Beispiel. So ist z. B. jeder Dezimalbruch mit ohne Ende fortgehenden Dezimalstellen, allemal eine unendliche konvergente numerische Reihe. — Denn es ist z. B.

$$0,\,761395\;423511\;233276\;5\cdots\cdots\cdots \text{ in inf.}$$

offenbar kleiner als

$$0,\,999999\;999999\;999999\;9\cdots\cdots\cdots \text{ in inf.}$$

während letzterer Dezimalbruch

$$=9(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+\cdots \text{ in inf.}),$$

ist, für $x=\frac{1}{10}$ gedacht. — Nun ist aber die Summe von n Gliedern der letzten Reihe (nach §. 89.)

$$=9\cdot\frac{x-x^{n+1}}{1-x},$$

und für

$$x=\frac{1}{10},$$

$$=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n=1-\frac{1}{10^n},$$

---

*) Man sagt: eine Funktion f_n von n (d. h. ein Ausdruck, in welchem n vorkommt) nehme den bestimmten Werth A an für $n=\infty$, so oft für gewisse Werthe von n, der Unterschied $A-f_n$ kleiner werden kann, als jede noch so klein gegebene, aber bestimmte Zahl D, und wenn für jeden größern Werth von n derselbe Unterschied immer noch kleiner wird.

welcher Werth, je größer n gedacht wird, desto näher der 1 rückt, ohne jedoch die Einheit je erreichen, also noch weniger größer als 1 werden zu können.

Anmerkung. Da hier zunächst nur immer von diesen unendlichen Reihen die Rede sein wird, in so ferne andere noch nicht definirt sind, so wird man das „nach ganzen Potenzen von x fortschreitend" nicht immer hinzuzusetzen nöthig haben. So oft also in der Folge von unendlichen Reihen nach x die Rede sein wird, andere aber als diese, noch nicht erklärt sein sollten, müssen immer die hiesigen, und nie andere, noch nicht definirte, verstanden werden.

§. 102.

Jede endliche Reihe ist auch zugleich eine unendliche; weil man zu jeder solchen endlichen Reihe noch Glieder von der Form $0 \cdot x^n$, die selber der Null gleich sind, hinzugefügt denken kann, ins Unendliche fort. Dagegen ist nicht umgekehrt jede unendliche Reihe zugleich auch eine endliche.

Die unendliche Reihe ist daher der allgemeinere Begriff, und die endliche Reihe ein besonderer Fall der unendlichen Reihe. Da aber der besondere Begriff immer alle Merkmale des allgemeinern Begriffs haben muß, so wird man die Merkmale des allgemeinern Begriffs, aus denen des besondern erhalten müssen, wenn man diejenigen, die dem besondern, als solchen, eigenthümlich sind, wegläßt, und die übrigen in den allgemeinen Begriff vereinigt.

§. 103.

1) Was daher von den endlichen Reihen (von den ganzen Funktionen) im Allgemeinen gilt, unabhängig von einer bestimmten Gliederzahl derselben und unabhängig von ihrem numerischen Werth, das muß auch nothwendig von den unendlichen Reihen gelten, im Allgemeinen.

2) Was dagegen von den endlichen Reihen (von den gan=

zen Funktionen) nur in so ferne gilt, als sie besondern Ziffern-Ausdrücken gleich gedacht werden, doch aber noch unabhängig von jeder Gliederzahl, das kann von den unendlichen Reihen nur unter der Voraussetzung gelten, daß solche konvergent sind (d. h. daß solche selbst noch bestimmten Ziffernwerthen gleich gedacht sind); muß aber auch nothwendig gelten, sobald diese Bedingung wirklich erfüllt ist.

3) Was endlich von einer ganzen Funktion nur in so ferne gilt, als ihre Gliederzahl eine völlig bestimmte ist, darf für die unendlichen Reihen nicht unbedingt beibehalten werden.

Anmerkung. Wir glauben insbesondere noch auf vorstehende Nr. 2.) aufmerksam machen zu müssen, weil man bei numerischen Reihen äußerst leicht in Gefahr kommen kann, sich in endlose Widersprüche zu verwickeln, wenn man nicht genau darauf sieht, daß die (numerischen) Reihen, ehe man sie gleich den übrigen endlichen Zahlen-Ausdrücken behandelt, auch wirklich die, letztern zukommende Eigenschaft haben, d. h. konvergent sind (im Sinne des §. 101.).

§. 104.

Hieraus und aus §. 77. folgen sogleich nachstehende Sätze:

1) Ist eine nach x fortlaufende unendliche Reihe der Null gleich, für jeden Werth von x, so sind auch die Koeffizienten derselben einzeln der Null gleich.

2) Sind zwei nach x fortlaufende unendliche Reihen einander gleich, für jeden Werth von x, so sind auch bezüglich die Koeffizienten derselben Potenz von x in beiden einander gleich.

3) Ist eine unendliche Reihe höherer Ordnung der Null gleich, für jeden Werth der Fortschreitungs-Buchstaben x, y, 2c., so sind auch die Koeffizienten derselben alle einzeln der Null gleich.

4) Sind zwei unendliche Reihen höherer Ordnungen für jeden Werth der Fortschreitungs-Buchstaben x, y, 2c., einander

gleich, so sind auch nothwendig die Koeffizienten, welche dieselben Potenzen $x^m \cdot y^n$ rc. affiziren, einander gleich.

5) Stellt in einer unendlichen Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

das x einen oder mehrere solche bestimmte Werthe vor, daß sie selbst, für diese bestimmten (aber nicht für alle beliebigen) Werthe von x, der Null gleich wird, so hat man eine Gleichung von der Form der höhern Gleichungen, aber von einem unendlichen Grade. Eine solche Gleichung

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

deren Koeffizienten alle die Form $p + q \cdot i$ haben, kann daher möglicher Weise für x unendlich viele Wurzelwerthe von der Form $p + q \cdot i$ geben; allein, in so ferne die Anzahl der Koeffizienten dieser Gleichung unendlich groß ist, so können diese Wurzelwerthe zum Theil oder alle von der Art sein, daß p oder q (oder p und q zugleich) selbst unendlich große Zahlen werden, d. h. Zahlen, die größer sind, als jede gegebene absolute Zahl, die daher nur in der Idee vorhanden, nie aber wirklich darstellbar sind, und die deshalb auch nie im Kalkul gebraucht werden können.

6) Jede unendliche Reihe

$$(P) \cdots \quad a + bx + cx^2 + dx^3 \cdots \text{ in inf.}$$

kann durch das kombinatorische Aggregat

$$S[P_a \cdot x^a]$$

ausgedrückt werden, wenn man nur statt a nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, in inf. gesetzt denkt, und wenn P_a den Koeffizienten von x^a vorstellt.

7) Jede unendliche Reihe der zweiten Ordnung kann ausgedrückt werden durch das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\underset{a+b=c}{P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b}\right],$$

oder auch blos durch

$$S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b],$$

wenn man sich in ersterem statt c, in beiden aber statt a und statt b, nach und nach alle möglichen Verbindungen der Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ in inf. gesetzt denkt und dabei unter $P_{m,n}$, den Koeffizienten von $x^m \cdot y^n$ versteht.

8) Leicht ist es einzusehen, daß auch die Aggregate

$$S[P_{a,b,c} \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c] \quad \text{u. s. w. f.},$$

unendliche Reihen der dritten und höhern Ordnung ausdrücken werden.

§. 105. Erklärung.

„**Einen gegebenen** aus unendlichen Reihen (die auch „**endliche** sein können) oder andern Ausdrücken beliebig zusam„mengesetzten **Ausdruck nach** x **entwickeln**", soll nichts weiter heißen, als man soll eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe angeben, welche dem gegebenen Ausdruck gleich ist.

§. 106.

Soll aber irgend ein Ausdruck F_x in eine unendliche Reihe nach x entwickelt werden, so daß

$$F_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots$$

wird, so ist klar, daß der erste Koeffizient α allemal gleich ist dem, was aus F_x wird, wenn man in F_x, Null statt x setzt, **sobald nur die Entwicklung möglich** ist. — Es ist also dann allemal $\alpha = F_0$.

Denn die Gleichung soll ja für jeden Werth von x existiren, also auch für $x = 0$, wofür aber auf der rechten Seite α sich ergibt.

§. 107.

Das Addiren und Subtrahiren zweier unendlichen Reihen geschieht nach den Formeln

1) $S[P_a \cdot x^a] \pm S[Q_b \cdot x^b] = S[(P_a \pm Q_a) \cdot x^a]$,

2) $S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b] \pm S[Q_{c,b} \cdot x^c \cdot y^b] = S[(P_{a,b} \pm Q_{a,b}) \cdot x^a \cdot y^b]$;

u. s. w. f.

Und weil jede endliche Reihe zugleich auch als eine unendliche Reihe, und auch jede Reihe irgend einer niedrigern Ordnung, zugleich als eine Reihe jeder höhern Ordnung gedacht werden kann; so dienen dieselben Formeln, um auch Reihen verschiedener Ordnungen zu addiren, oder von einander zu subtrahiren, sie mögen alle unendliche sein oder zum Theil auch endliche.

§. 108. Lehrsatz.

Das Multipliziren zweier unendlichen Reihen der ersten Ordnung geschieht dagegen nach der Formel

$$S[P_a \cdot x^a] \times S[Q_a \cdot x^a] = S[P_a \cdot Q_b \cdot x^{a+b}],$$

oder

$$= S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_b \cdot x^c \\ a+b=c \end{matrix}\right];$$

so daß im Resultat der Koeffizient von der Potenz x^n ausgedrückt sein wird, durch

$$S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_b \\ a+b=n \end{matrix}\right].$$

Auf dieselbe Weise hat man für die Multiplikation von drei gegebenen Reihen, die Formel

$$S[P_a \cdot x^a] \times S[Q_a \cdot x^a] \times S[R_a \cdot x^a] = S[P_a \cdot Q_b \cdot R_c \cdot x^{a+b+c}],$$

oder

$$= S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_b \cdot R_c \cdot x^b \\ a+b+c=b \end{matrix}\right],$$

so daß der Koeffizient von x^n ausgedrückt ist durch:

$$S\left[\begin{matrix} P_a \cdot Q_b \cdot R_c \\ a+b+c=n \end{matrix}\right].$$

Aehnliche Formeln lassen sich für die Multiplikation von beliebig viel unendlichen Reihen leicht angeben.

Beispiel. Man soll den Koeffizienten von x^3 finden von dem Produkt der 4 Reihen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \cdots$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots$$

Zu dem Ende bildet man die 4 Skalen

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 0, & 1, & 2, & 3 \cdots \\
P & a, & b, & c, & d \cdots \\
Q & A, & B, & C, & D \cdots \\
R & \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D} \cdots \\
T & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \cdots
\end{array}$$

und hat für den gesuchten Koeffizienten, das Aggregat

$$S\left[\begin{array}{c}P_{\mathfrak{a}} \cdot Q_{\mathfrak{b}} \cdot R_{\mathfrak{c}} \cdot T_{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = 3\end{array}\right].$$

Um nun die einzelnen Glieder dieses Aggregats zu erhalten, muß man die Gleichung

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = 3$$

auflösen, und erhält:

𝔞	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	2,	2,	2,	3
𝔟	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	2,	3,	0,	0,	0,	1,	1,	2,	0,	0,	1,	0
𝔠	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	0,	1,	0,	0,	1,	2,	0,	1,	0,	0,	1,	0,	0
𝔡	3,	2,	1,	0,	2,	1,	0,	1,	0,	0,	2,	1,	0,	1,	0,	0,	1,	0,	0,	0

und der gesuchte Koeffizient wird daher:

$$aA\mathfrak{A}\delta+aA\mathfrak{B}\gamma+aA\mathfrak{C}\beta+aA\mathfrak{D}\alpha+aB\mathfrak{A}\gamma+aB\mathfrak{B}\beta+aB\mathfrak{C}\alpha+$$
$$+aC\mathfrak{A}\beta+aC\mathfrak{B}\alpha+aD\mathfrak{A}\alpha+bA\mathfrak{A}\gamma+bA\mathfrak{B}\beta+bA\mathfrak{C}\alpha+bB\mathfrak{A}\beta+bB\mathfrak{B}\alpha+bC\mathfrak{A}\alpha$$
$$+cA\mathfrak{A}\beta+cA\mathfrak{B}\alpha+cB\mathfrak{A}\alpha+dA\mathfrak{A}\alpha.$$

Auf dieselbe Weise kann man den Koeffizienten jeder andern Potenz von x in dem Produkte dieser 4 Reihen angeben.

§. 109.

Für die Multiplikation unendlicher Reihen der zweiten Ordnung hat man die Formeln:

1) $S[P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x^{\mathfrak{a}} \cdot y^{\mathfrak{b}}] \times S[Q_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \cdot x^{\mathfrak{c}} \cdot y^{\mathfrak{d}}] = S[P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot Q_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \cdot x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}} \cdot y^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}}]$,

oder $= S\left[\begin{array}{c}P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot Q_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \cdot x^{\mathfrak{e}} \cdot y^{\mathfrak{f}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=\mathfrak{e},\ \mathfrak{b}+\mathfrak{d}=\mathfrak{f}\end{array}\right]$.

2) $S[P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x^{\mathfrak{a}} \cdot y^{\mathfrak{b}}] \times S[Q_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x^{\mathfrak{a}} \cdot y^{\mathfrak{b}}] \times S[R_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot x^{\mathfrak{a}} \cdot y^{\mathfrak{b}}]$

$= S\left[\begin{array}{c}P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot Q_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \cdot R_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}} \cdot x^{\mathfrak{g}} \cdot y^{\mathfrak{h}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\mathfrak{e}=\mathfrak{g},\ \mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}=\mathfrak{h}\end{array}\right]$;

u. s. w. f.,

nach welchen man den Koeffizienten jedes beliebigen Gliedes $x^m \cdot y^n$ des Produkts ohne weiteres entwickeln kann.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise können auch unendliche Reihen höherer Ordnungen mit einander multiplizirt, und von dem Produkt, der Koeffizient eines jeden beliebigen Gliedes ohne weiteres angegeben werden.

§. 110. Aufgabe.

Eine unendliche Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

durch eine zweite unendliche Reihe

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots$$

zu dividiren, d. h. eine neue unendliche Reihe von derselben Form zu finden, welche mit der zweiten multiplizirt, genau die erste wiedergibt.

Auflösung. Man nehme die gesuchte unendliche Reihe mit unbestimmten Koeffizienten an, z. B.

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2 \text{ in inf.},$$

und multiplizire solche mit dem Divisor $A+Bx+Cx^2+\cdots$; so soll das Produkt dem Dividenden $a+bx+cx^2+\cdots$ gleich sein. Dann sind aber auch die Koeffizienten einzeln bezüglich einander gleich (§. 104. Nr. 2.), und man erhält dadurch unendlich viele, in Bezug auf die unbekannten Koeffizienten α, β, γ, δ rc. einfache Gleichungen, aus deren jeder, einer der Koeffizienten α, β, γ, δ rc. bestimmt werden kann; im Allgemeinen. — Diese einzelnen Gleichungen sind nämlich

$$a = A\alpha;$$
$$b = A\beta+B\alpha;$$
$$c = A\gamma+B\beta+C\alpha;$$
$$d = A\delta+B\gamma+C\beta+D\alpha;$$

u. s. w. in's Unendliche fort; und die erste gibt α, die zweite β, die dritte γ, u. s. w., so daß jede folgende Gleichung auch einen der folgenden Koeffizienten bestimmt, in's Unendliche fort.

§. 111.

Diese Aufgabe ist, wie man sieht, immer möglich, so lange nicht $A = 0$. Ist aber $A = 0$, so muß auch $a = 0$ sein, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Ueberhaupt sind n der ersten Koeffizienten des Divisors $= 0$, so müssen wenigstens eben so viele erste Koeffizienten des Dividenden ebenfalls der Null gleich sein, wenn es eine unendliche Reihe (nach ganzen Potenzen von x fortschreitend und nur von solchen ist hier die Rede) geben soll, die mit dem Divisor multiplizirt, den Dividenden gibt. — (Vergl. §. 76. und Anmerkung).

Anmerkung. Man muß hier nicht übersehen, daß es, im Falle A nicht Null, allemal eine unendliche Reihe gibt, die mit dem Divisor multiplizirt, ein Produkt hervorbringt, dessen Koeffizienten ohne Aufhören mit denen des Dividenden zusammenfallen; daß aber, eben weil diese Reihe unendlich ist, nicht behauptet werden kann, daß eine endliche Reihe (etwa wenn man von der unendlichen Reihe eine Anzahl erster Glieder nehmen wollte) dieselbe Eigenschaft habe. — Statt der unendlichen Reihe, die dem Quotienten der beiden gegebenen unendlichen Reihen gleich ist, darf daher nie eine endliche Reihe gesetzt werden, als dem Quotienten gleich; und wenn man eine solche endliche Reihe dennoch anwenden wollte, so müßte man sich ein (in der Regel unbekanntes) Ergänzungsglied, welches im Allgemeinen selbst eine unendliche Reihe wieder sein muß, noch hinzudenken, um einen, dem gegebenen Quotienten gleichen Ausdruck zu haben.

§. 112.

Weil jede endliche Reihe zugleich auch eine unendliche ist (aber nicht umgekehrt), so kann man mittelst derselben Auflösung (§. 111.) auch den Quotienten zweier Reihen erhalten, von denen entweder die eine nur unendlich ist, oder die alle beide endlich sind, und aus beliebig viel, ja auch nur aus einem einzigen

Glieder bestehen können. — Wendet man aber das Verfahren (des §. 111.) auf die Quotienten

$$\frac{A}{1+ax},\ \frac{A}{1+ax+bx^2},\ \frac{A}{1+ax+bx^2+cx^3},\ \frac{A}{1+ax+bx^2+cx^3+dx^4}$$

u. s. w. an, so erhält man bemerkenswerthe Resultate.

Wird nämlich wieder zuerst

$$\frac{A}{1+ax}=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots$$

gesetzt, so findet man

$$\alpha=A;$$
$$\beta=-a\alpha=-a\cdot A;$$
$$\gamma=-a\beta=+a^2\cdot A;$$
$$\delta=-a\gamma=-a^3\cdot A;$$

u. s. w. f.; und man sieht, daß jeder Koeffizient der gesuchten unendlichen Reihe, aus seinem zunächst vorhergehenden, durch Multiplikation mit $-a$ entsteht: so daß, wenn P und Q zwei auf einander folgende dieser Koeffizienten sind, nothwendig

$$Q=-a\cdot P$$

sein muß.

Setzt man den zweiten Quotienten

$$\frac{A}{1+ax+bx^2},=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\cdots,$$

so erhält man

$$\alpha=A;$$
$$\beta=-a\alpha=-aA;$$
$$\gamma=-a\beta-b\alpha;$$
$$\delta=-a\gamma-b\beta;$$
$$\varepsilon=-a\delta-b\gamma;$$

u. s. w. f.; so daß, wenn N, P, Q, drei auf einander folgende der Koeffizienten sind, ein jeder durch die beiden vorhergehenden mittelst der Gleichung

$$Q = -aP - bN$$

gefunden werden kann.

Wird ferner der dritte Quotient

$$\frac{A}{1+ax+bx^2+cx^3}, = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+ \cdots$$

gesetzt, so findet man

$$\alpha = A;$$
$$\beta = -a\alpha;$$
$$\gamma = -a\beta - b\alpha;$$
$$\delta = -a\gamma - b\beta - c\alpha;$$
$$\varepsilon = -a\delta - b\gamma - c\beta;$$

u. s. w. f.; so daß jeder Koeffizient durch die drei vorhergehenden gefunden wird, mittelst der Gleichung

$$Q = -aP - bN - cM,$$

wo M, N, P, Q, vier auf einander folgende, übrigens beliebige Koeffizienten der gesuchten unendlichen Reihe sind.

Es ist hieraus leicht einzusehen, daß wenn man den Quotienten

$$\frac{A}{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}$$
$$= P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

setzt, dann allemal sein müsse

$$P_m = -a_1\cdot P_{m-1} - a_2\cdot P_{m-2} - a_3\cdot P_{m-3} - a_4\cdot P_{m-4} - \cdots$$
$$- a_{n-1}\cdot P_{m-n+1} - a_n\cdot P_{m-n},$$

so daß jeder Koeffizient der Reihe, durch die n zunächst vorhergehenden Koeffizienten ausgedrückt ist. — Ferner kann man sich leicht durch die Ausführung des Verfahrens des §. 110.) auch überzeugen, daß man dieses Gesetz noch für die erstern Koeffizienten P_1, P_2, P_3 ꝛc. gelten lassen könne, wenn man sich die Vorstellung macht, als ginge dem P_0 eine beliebige Anzahl Koeffizienten, die Null sind, vorher. — Der Koeffizient P_0 selbst aber, muß sich ergeben, wenn man in dem gegebenen Quotien-

ten Null statt x setzt (§. 107.). Es muß daher hier jedesmal $P_0 = A$ sein.

§. 113. Erklärung.

Jede unendliche Reihe, die einem solchen Quotienten

$$\frac{A}{1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}$$

gleich ist, oder gleich gedacht wird, nennt man eine **rekurrente** oder **wiederkehrende Reihe**. — Die Koeffizienten der ganzen Funktion von x im Divisor

$$1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

mit Ausnahme des ersten 1, alle in ihrer Ordnung, aber mit dem entgegengesetzten (+)- oder (−)-Zeichen (die etwanigen Null-Koeffizienten nicht ausgenommen) neben einander geschrieben, und durch Kommata getrennt, also:

$$-a_1,\quad -a_2,\quad -a_3,\ \cdots\ -a_{n-1},\quad -a_n,$$

geben die **Beziehungs-Skale** der rekurrenten Reihe.

§. 114.

Weiß man von einer Reihe

$$P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\cdots,$$

daß sie eine rekurrente ist, — kennt man dabei ihr erstes Glied P_0 und ihre Beziehungs-Skale

$$-a_1,\quad -a_2,\quad -a_3,\ \cdots\ -a_{n-1},\quad -a_n,$$

so kann man sogleich alle folgenden Glieder dieser Reihe ohne weiteres hinschreiben, indem man sich die gesuchten Koeffizienten so geschrieben denkt

$$\cdots 0,\ 0,\ 0,\ P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ \text{etc.} \cdots$$

und nun von P_0 ab, jeden folgenden Koeffizienten dadurch findet, daß man die der Reihe nach vorhergehenden, mit den Gliedern der Beziehungs-Skale, wie sie in ihrer Reihe folgen, multiplizirt, und zuletzt alle diese Produkte addirt.

Auch kann die Beziehungs-Skale unendlich viele Glieder haben.

Beispiel. Man soll die dem Quotienten

$$\frac{3}{1-x+2x^3-x^4-2x^5}$$

gleiche unendliche Reihen hinschreiben.

Der gegebene Quotient wird $=3$ für $x=0$; also ist der erste Koeffizient P_0 der gesuchten Reihe, $=3$.

Ferner ist die Beziehungs-Skale

$$1,\ 0,\ -2,\ 1,\ 2,$$

und daher:

$$P_0=3;$$
$$P_1=1\cdot3=3;$$
$$P_2=1\cdot P_1+0\cdot P_0=3;$$
$$P_3=1\cdot P_2+0\cdot P_1+(-2)\cdot P_0=-3;$$
$$P_4=1\cdot P_3+0\cdot P_2+(-2)\cdot P_1+1\cdot P_0=-6;$$
$$P_5=1\cdot P_4+0\cdot P_3+(-2)\cdot P_2+1\cdot P_1+2\cdot P_0=-3;$$
$$P_6=1\cdot P_5+0\cdot P_4+(-2)\cdot P_3+1\cdot P_2+2\cdot P_1=12;$$

u. s. w. f.;

und die gesuchte unendliche Reihe ist demnach

$$=3+3x+3x^2-3x^3-6x^4-3x^5+12x^6+\cdots$$

Anmerkung. Man wäre noch leichter zum Ziele gelangt, wenn man den Quotienten

$$\frac{1}{1-x+2x^3-x^4-2x^5}$$

entwickelt, und selbigen dann mit 3 multiplizirt hätte, weil

$$\frac{A}{1+ax+bx^2+\cdots}=A\cdot\frac{1}{1+ax+bx^2+\cdots}$$

ist.

§. 115.

Hat ein gegebener Quotient, der in eine unendliche Reihe verwandelt werden soll, die Form

$$\frac{A}{1+ax^m+bx^{2m}+cx^{3m}+\cdots},$$

so ist es weit bequemer, z statt x^m zu setzen, den Quotienten

$$\frac{A}{1+az+bz^2+cz^3+\cdots}$$

in eine Reihe nach z zu entwickeln, und nachgehends x^m wiederum statt z zu substituiren.

Beispiel. Es sei der Quotient

$$\frac{1}{1-2x^2-4x^4+x^8-3x^{10}}$$

in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

Man setze $x^2 = z$, so wird der gegebene Quotient

$$=\frac{1}{1-2z-4z^2+z^4-3z^5},$$

und von der, diesem Quotienten gleichen unendlichen Reihe nach z, ist das erste Glied $=1$, so wie die Beziehungs-Skale

$$2,\quad 4,\quad 0,\quad -1,\quad 3;$$

daher die Reihe selbst

$$1+2z+8z^2+24z^3+79z^4+255z^5+824z^6+\cdots;$$

folglich die gesuchte Reihe in x

$$1+2x^2+8x^4+24x^6+79x^8+255x^{10}+824x^{12}+\cdots \text{ in inf.},$$

welche dem gegebenen Quotienten

$$\frac{1}{1-2x^2-4x^4+x^8-3x^{10}}$$

gleich ist.

§. 116.

Man kann aber nun auch die allgemeine Aufgabe des §. 110.) auf eine bequemere Art lösen. — Da nämlich

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots}{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots}=\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}x^2+\frac{D}{a}x^3+\cdots\right)$$
$$\times\frac{1}{1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots}$$

ist, so darf man nur den letzten Quotienten mittelst der Beziehungs-Skale

$$-\frac{b}{a}, \quad -\frac{c}{a}, \quad -\frac{d}{a}, \quad \text{rc.}$$

in eine unendliche Reihe verwandeln und nachgehends diese unendliche Reihe

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots$$

wo $\alpha=1$, mit der andern

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}x^2+\frac{D}{a}x^3+\cdots$$

(nach §. 108.) multipliziren (so daß der Koeffizient von x^n im Produkte ebenfalls sogleich hingeschrieben werden kann) und dieses Produkt, welches eine nach x fortgehende unendliche Reihe ist, muß dann die, dem gegebenen Quotienten

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots}{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots}$$

gleiche unendliche Reihe sein.

Beispiel. Man kann dieses allgemeine Beispiel, wie folgt, ausführen. — Man bezeichnet die Reihe, welche

$$=\frac{1}{1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots}$$

sein soll, durch

$$S\left[P_a \cdot x^a\right],$$

so wird

$P_0=1;$

$P_1=-\frac{b}{a};$

$P_2=-\frac{b}{a}\cdot P_1-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-ac}{a^2};$

$P_3=-\frac{b}{a}\cdot P_2-\frac{c}{a}P_1-\frac{d}{a}=-\frac{b^3-abc}{a^3}+\frac{bc}{a^2}-\frac{d}{a}=\frac{-b^3+2abc-a^2d}{a^3};$

$P_4=-\frac{b}{a}\cdot P_3-\frac{c}{a}P_2-\frac{d}{a}P_1-\frac{e}{a}P_0=\frac{b^4-3ab^2c+2a^2bd+a^2c^2-a^3e}{a^4};$

u. s. w. f.

Nun bildet man sich für die andere Reihe

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}x^2+\frac{D}{a}x^3+\cdots$$

die Skale

$$Q\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\ \frac{A}{a}, & \frac{B}{a}, & \frac{C}{a}, & \frac{D}{a}, & \frac{E}{a}, & \cdots \end{matrix}\right\},$$

und hat dann für den Koeffizienten von x^n des gesuchten Produkts der beiden Reihen, das Aggregat

$$S\left[\begin{matrix} Q_{\mathfrak{a}}\cdot P_{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n \end{matrix}\right],$$

d. h. die Summe

$$Q_n\cdot P_0+Q_{n-1}\cdot P_1+Q_{n-2}\cdot P_2+Q_{n-3}\cdot P_3+\cdots+Q_2\cdot P_{n-2}+P_1\cdot P_{n-1}+Q_0\cdot P_n,$$

in welcher man nur statt der Ausdrücke $P_n, \cdots P_0$ und $Q_n, \cdots Q_0$, die oben in den Skalen stehenden Ausdrücke setzen darf.

Wollte man z. B. den Koeffizienten von x^3 haben, in der gesuchten Reihe, so hätte man für ihn

$$S\left[\begin{matrix} Q_{\mathfrak{a}}\cdot P_{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=3 \end{matrix}\right],$$

oder $$Q_3\cdot P_0+Q_2\cdot P_1+Q_1\cdot P_2+Q_0\cdot P_3,$$

oder, wenn man die Skalen

$$\begin{matrix} & 0, & 1, & 2, & 3, \cdots\cdots \\ P & 1, & -\frac{b}{a}, & \frac{b^2-ac}{a^2}, & \frac{-b^3+2abc-a^2d}{a^3}\cdots \\ Q & \frac{A}{a}, & \frac{B}{a}, & \frac{C}{a}, & \frac{D}{a}\cdots\cdots \end{matrix}$$

zu Hilfe nimmt:

$$\frac{D}{a}-\frac{b}{a}\cdot\frac{C}{a}+\frac{b^2-ac}{a^2}\cdot\frac{B}{a}-\frac{b^3-2abc+a^2d}{a^3}\cdot\frac{A}{a},$$

oder $$\frac{a^3D-a^2bC+ab^2B-a^2cB-b^3A+2abcA-a^2dA}{a^4}.$$

Eben so kann nun aber auch jeder andere Koeffizient der gesuchten unendlichen Reihe entwickelt werden.

Anmerkung. In der Geschichte der mathematischen Analysis erscheinen diese eben behandelten unendlichen Reihen offenbar deshalb unter dem Namen der „rekurrenten" oder „wieder-

kehrenden", weil nach ihrer Entstehungsweise mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten, das Gesetz sich ergeben hatte, durch welches jeder folgende Koeffizient, durch (den oder) die nächst vorhergehenden Koeffizienten ausgedrückt sich sieht. Man hielt dies Rückgehen auf die vorhergehenden Koeffizienten für ein charakteristisches Kennzeichen dieser Reihen und benannte sie deshalb nach demselben.

Im 8ten Theile dieses Werkes ist aber gezeigt, daß man bei jeder unendlichen Reihe unterscheiden kann 1) das „independente" Gesetz derselben, nach welchem jeder Koeffizient unabhängig von den vorhergehenden, also beliebig außer der Ordnung gefunden wird; und 2) das „rekurrente" Gesetz derselben, durch welches jeder folgende Koeffizient in einen oder mehrere, oder in alle vorhergehende Koeffizienten ausgedrückt sich sieht. — Deshalb ist der hier gebrauchte Name nicht ganz passend, wenn auch gebräuchlich.

§. 117. Aufgabe.

Eine gegebene unendliche Reihe

$$P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\cdots,$$

oder

$$S[P_a\cdot x^a],$$

mit einer absoluten ganzen Zahl m zu potenziren.

Auflösung I. und Beweis. Es ist nach dem polynomischen Lehrsatze (§. 65.)

$$(P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+\cdots\cdots)^m$$

$$=S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\,d!\cdots}\cdot(P_0)^a\cdot(P_1\cdot x)^b\cdot(P_2\cdot x^2)^c\cdot(P_3\cdot x^3)^d\cdots\right]_{a+b+c+d+\cdots=m}$$

$$=S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\,d!\cdots}\cdot P_0^a\cdot P_1^b\cdot P_2^c\cdot P_3^d\cdots\cdots x^p\right]_{\substack{a+b+c+d+\cdots=m\\ b+2c+3d+\cdots=p}}.$$

Also ist der Koeffizient von x^n in dieser m^{ten} Potenz:

$$= S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\,d!\cdots}\cdot P_0^a\cdot P_1^b\cdot P_2^c\cdot P_3^d\cdots\cdots\right]_{\substack{a+b+c+d+\cdots=m\\ b+2c+3d+\cdots=n}},$$

wo aber die beiden beschränkenden Gleichungen unendlich viele Unbekannte enthalten. — Bedenkt man indeß, daß wegen der zweiten Gleichung

$$b+2c+3d+\cdots\cdots=n,$$

oder $$b+2c+3d+\cdots+n\cdot n+(n+1)o+\cdots=n,$$

alle nach n folgenden Unbekannten nur den Werth Null haben können, und daß daher im allgemeinen Gliede, welches ein Produkt von unendlich vielen Faktoren zu sein scheint, die nach den $n+1$ ersten folgenden dieser Faktoren $=1$ werden und als Faktoren außer Acht gelassen werden können, so folgt, daß die beiden beschränkenden Gleichungen

$$a+b+c+d+\cdots=m$$

und $$b+2c+3d+\cdots=n,$$

mit scheinbar unendlich vielen Unbekannten, sich reduziren auf die beiden andern

$$a+b+c+d+\cdots+n=m,$$
$$b+2c+3d+\cdots+nn=n;$$

weshalb der Koeffizient von x^n gerade so wird, nämlich

$$= S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\cdots p!}\cdot P_0^a\cdot P_1^b\cdot P_2^c\cdots\cdots P_n^n\right]_{\substack{a+b+c+\cdots+n=m\\ b+2c+3d+\cdots nn=n}}.$$

Auflösung II. Man findet den Koeffizienten von x^n auch noch auf folgende Art:

1) Man bilde sich den Zeiger

$$\left[\begin{matrix}0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\cdots\\ P_0, & P_1, & P_2, & P_3, & P_4, & P_5, & P_6, & P_7\cdots\end{matrix}\right].$$

2) Man entwickle die m^{te} Kombinationsklasse mit Wiederholungen zur Summe n, aus den unendlich vielen Elementen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$$

3) In jeder Verbindung setze man statt jedes Elementes, den im Zeiger gerade unter diesem Elemente stehenden Koeffizienten der gegebenen unendlichen Reihe, betrachte die so entstehenden Verbindungen als Produkte, setze einer jeden noch deren Versetzungszahl als Faktor vor, und addire alle diese Produkte: so hat man den verlangten Koeffizienten.

Beweis. Man kann nämlich die m^{te} Potenz der Reihe als ein Produkt von m gleichen Faktoren ansehen; und solches ist (nach §. 108.)

$$= S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}\cdots+\mathfrak{m}=\mathfrak{p}}{P_{\mathfrak{a}} \cdot P_{\mathfrak{b}} \cdot P_{\mathfrak{c}} \cdots\cdots P_{\mathfrak{m}}\, x^{\mathfrak{p}}}\right],$$

wo die Zahl der Durchlaufenden $= m$ ist; folglich ist der Koeffizient von x^n in dieser Potenz

$$= S\left[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{m}=n}{P_{\mathfrak{a}} \cdot P_{\mathfrak{b}} \cdot P_{\mathfrak{c}} \cdots\cdots P_{\mathfrak{m}}}\right].$$

Wollte man nun dieses Aggregat wirklich entwickeln, so müßte man die beschränkende Gleichung

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots+\mathfrak{m}=n$$

auflösen, d. h. die m^{te} Variationsklasse zur Summe n mit Wiederholungen, aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ⋯ entwickeln, und diese Werthe statt der durchlaufenden Buchstaben in das allgemeine Glied setzen. Weil sich aber das allgemeine Glied durch Versetzung der durchlaufenden Buchstaben gar nicht ändert, so kann man besser, statt der Variationsklasse, die Kombinationsklasse entwickeln, und jedem aus dem allgemeinen Gliede hervorgehenden Produkte noch dessen Versetzungszahl als Faktor vorsetzen.

Beispiel. Es sei von der 5ten Potenz der unendlichen Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+hx^7+\cdots$$

der Koeffizient x^7 zu finden.

Nach der ersten Auflösung

darf man nur das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}+\mathfrak{f}+\mathfrak{g}+\mathfrak{h}=5\\ \mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+4\mathfrak{e}+5\mathfrak{f}+6\mathfrak{g}+7\mathfrak{h}=7}}{\frac{m!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\,\mathfrak{e}!\,\mathfrak{f}!\,\mathfrak{g}!\,\mathfrak{h}!} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{b}} \cdot c^{\mathfrak{c}} \cdot d^{\mathfrak{d}} \cdot e^{\mathfrak{e}} \cdot f^{\mathfrak{f}} \cdot g^{\mathfrak{g}} \cdot h^{\mathfrak{h}}}\right]$$

entwickeln. Man löset aber die beiden beschränkenden Gleichungen

$$a+b+c+d+e+f+g+h=5,$$
$$b+2c+3d+4e+5f+6g+7h=7,$$

(nach §. 78.) auf und erhält für die 5 ersten Kombinations-Klassen zur Summe 7, aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sogleich:

		0	1	2	3	4	5	6	7
		a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h
7	hieraus	4	0	0	0	0	0	0	1
1 6		3	1	0	0	0	0	1	0
2 5		3	0	1	0	0	1	0	0
3 4	aber	3	0	0	1	1	0	0	0
1 1 5		2	2	0	0	0	1	0	0
1 2 4		2	1	1	0	1	0	0	0
1 3 3	die Auflösungen	2	1	0	2	0	0	0	0
2 2 3		2	0	2	1	0	0	0	0
1 1 1 4		1	3	0	0	1	0	0	0
1 1 2 3	rechts	1	2	1	1	0	0	0	0
1 2 2 2		1	1	3	0	0	0	0	0
1 1 1 1 3		0	4	0	1	0	0	0	0
1 1 1 2 2		0	3	2	0	0	0	0	0,

und daher der gesuchte Koeffizient von x^7 in der 5ten Potenz der gegebenen Reihe:

$$= 5a^4h+20a^3bg+20a^3cf+20a^3de+30a^2b^2f+60a^2bce+30a^2bd^2$$
$$+30a^2c^2d+20ab^3e+60ab^2cd+20abc^3+5b^4d+10b^3c^2.$$

Nach der zweiten Auflösung

hätte man dagegen die 5te Kombinations-Klasse zur Summe 7, mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, ... zu entwickeln, nämlich

0 0 0 0 7
0 0 0 1 6
0 0 0 2 5
0 0 0 3 4
0 0 1 1 5
0 0 1 2 4
0 0 1 3 3
0 0 2 2 3
0 1 1 1 4
0 1 1 2 3
0 1 2 2 2
1 1 1 1 3
1 1 1 2 2

$$ {}^7\overset{5}{C} \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & \dots \end{pmatrix} $$

also der gesuchte Koeffizient

$$= 5a^4h+20a^3bg+20a^3cf+20a^3de+30a^2b^2f+60a^2bce+30a^2bd^2 +30a^2c^2d+20ab^3e+60ab^2cd+20abc^3+5b^4d+10b^3c^2;$$

derselbe, wie vorher.

Anmerkung 1. Man erhält namentlich auf demselben Wege

1) $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\cdots)^2$

$$= a^2+2abx+\left\{\begin{matrix}2ac\\+b^2\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}2ad\\+2bc\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}2ae\\+2bd\\+c^2\end{matrix}\right\}x^4+\cdots$$

2) $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\cdots)^3$

$$= a^3+3a^2bx+\left\{\begin{matrix}3a^2c\\+3ab^2\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}3a^2d\\+6abc\\+b^3\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}3a^2e\\+6abd\\+3ac^2\\+3b^2c\end{matrix}\right\}x^4+\cdots$$

Anmerkung 2. Den ersten Koeffizienten in der Entwickelung von $(a+bx+cx^2+\cdots)^m$ erhält man (nach §. 107.), wenn man in dem zu entwickelnden Ausdruck $x=0$ setzt. — Es ist daher solcher $= a^m$.

§. 118.

Wäre die mit m zu potenzirende Reihe eine endliche (eine ganze Funktion), wären also von einem bestimmten Koeffizienten ab, alle folgenden $=0$, so kann man bei der Entwickelung des Koeffizienten von x^n in der m^{ten} Potenz der Reihe, sogleich diejenigen Verbindungen übergehen, in denen Elemente vorkommen, die jenen spätern Null-Koeffizienten entsprechen.

Beispiel. Wäre in dem Beispiel des §. 117.) nur die endliche Reihe $a+bx+cx^2+dx^3$ mit 5 zu potenziren, und der Koeffizient von x^7 zu finden, so würde man (nach der Auflösung I.) nur haben

	0, 1, 2, 3
	a, b, c, d
1 3 3	2, 1, 0, 2
2 2 3	2, 0, 2, 1
1 1 2 3	1, 2, 1, 1
1 2 2 2	1, 1, 3, 0
1 1 1 1 3	0, 4, 0, 1
1 1 1 2 2	0, 3, 2, 0

und der gesuchte Koeffizient wäre

$$= 30a^2bd^2 + 30a^2c^2d + 60ab^2cd + 20abc^3 + 5b^4d + 10b^3c^2.$$

Dagegen würde man nach der Auflösung II.) blos haben den Zeiger:

$$\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3 \\ a, & b, & c, & d; \end{matrix}$$

daher auch nur:

0 0 1 3 3	
0 0 2 2 3	${}^7\overset{5}{C}$
0 1 1 2 3	$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & 3 \\ a, & b, & c, & d \end{pmatrix}$
0 1 2 2 2	
1 1 1 1 3	
1 1 1 2 2;	

folglich der gesuchte Koeffizient von x^7 in der 5ten Potenz von

$$a + bx + cx^2 + dx^3,$$

$$= 30a^2bd^2 + 30a^2c^2d + 60ab^2cd + 20abc^3 + 5b^4d + 10b^3c^2.$$

§. 119.

Wäre gegeben die unendliche Reihe

$$a + bx^q + cx^{2q} + dx^{3q} + \text{ꝛc.} \cdots$$

und sollte solche mit m potenzirt werden, so würde es viel bequemer sein, hier erst z statt x^q zu setzen, die Reihe

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots$$

mit m zu potenziren, und in der neuen nach Potenzen von z fortlaufenden Reihe, wiederum x^q statt z zu setzen.

Beispiele. Es kann dies aber angewandt werden auf die Potenzirung der Reihen

$$a+bx^2+cx^4+dx^6+ex^8+\cdots$$
$$a+bx^3+cx^6+dx^9+ex^{12}+\cdots$$
$$a+bx^4+cx^8+dx^{12}+ex^{16}+\cdots$$

u. s. w. f.

§. 120.

Ist dagegen die mit der absoluten ganzen Zahl m zu potenzirende Reihe folgende:

$$ax^p+bx^{p+q}+cx^{p+2q}+dx^{p+3q}+\cdots,$$

so wird man leichter das Potenziren verrichten, wenn man den Satz anwendet:

$$(ax^p+bx^{p+q}+cx^{p+2q}+dx^{p+3q}+\cdots)^m$$
$$=[x^p\cdot(a+bx^q+cx^{2q}+dx^{3q}+\cdots)]^m$$
$$=x^{pm}\cdot(a+bx^q+cx^{2q}+dx^{3q}+\cdots)^m,$$

und nun erst die Reihe

$$a+bx^q+cx^{2q}+dx^{3q}+\cdots$$

(nach §. 118.) mit m potenzirt, dann aber diese Potenz noch mit x^{pm} multiplizirt.

Beispiele. Es kann dies aber angewandt werden bei der Potenzirung der Reihen

$$ax^2+bx^4+cx^6+dx^8+\cdots$$
$$ax^2+bx^5+cx^8+dx^{11}+\cdots$$
$$ax^5+bx^9+cx^{13}+dx^{17}+\cdots$$

u. s. w. f.

§. 121.

Man kann indeß die unendliche Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

auch noch auf folgende Art allgemein mit der absoluten ganzen Zahl m potenziren. Man setze

$$Rx=bx+cx^2+dx^3+\cdots,$$

oder

$$R=b+cx+dx^2+\cdots;$$

und hat dann (nach §. 61.)

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots)^m=(a+Rx)^m$$
$$=a^m+m\cdot a^{m-1}\cdot Rx+m_2\cdot a^{m-2}\cdot R^2\cdot x^2+m_3\cdot a^{m-3}\cdot R^3\cdot x^3+\cdots$$

Nun ist aber

$$R\ =b+cx+dx^2+ex^3+\cdots$$
$$R^2=b^2+2bcx+\begin{bmatrix}2bd\\+c^2\end{bmatrix}x^2+\begin{bmatrix}2be\\+2cd\end{bmatrix}x^3+\cdots$$
$$R^3=b^3+3b^2cx+\begin{bmatrix}3b^2d\\+3bc^2\end{bmatrix}x^2+\cdots$$

u. s. w. f.;

folglich, wenn man diese Werthe substituirt:

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\cdots)^m$$
$$=a^m+ma^{m-1}bx+\begin{Bmatrix}m\ \cdot a^{m-1}c\\+m_2\cdot a^{m-2}b^2\end{Bmatrix}x^2+\begin{Bmatrix}m\ \cdot a^{m-1}d\\+2m_2\cdot a^{m-2}bc\\+\ m_3\cdot a^{m-3}b^3\end{Bmatrix}x^3+$$
$$\begin{Bmatrix}m\ \cdot a^{m-1}e\\+2m_2\cdot a^{m-2}bd\\+\ m_2\cdot a^{m-2}c^2\\+3m_3\cdot a^{m-3}b^2c\end{Bmatrix}x^4+\cdots$$

Diese allgemeine Entwickelung für jede beliebige absolute ganze Zahl m gibt aber die Auflösung I.) des §. 117.) weit leichter, indem man den dort gefundenen Koeffizienten von x^n in der m^{ten} Potenz von

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots,$$

so schreibt:

$$S\left[\frac{m^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots+\mathfrak{p})|-1}}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!\ \mathfrak{d}!\cdots\mathfrak{p}!}\cdot P_0^{m-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots+\mathfrak{p})}\cdot P_1^{\mathfrak{b}}\cdot P_2^{\mathfrak{c}}\cdot P_3^{\mathfrak{d}}\cdots P_n^{\mathfrak{p}}\right]_{\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+\cdots+n\mathfrak{p}=n},$$

welches immer erlaubt ist, weil, sobald

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots+\mathfrak{p}>m$$

wird, dann wegen

$$m^{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots+\mathfrak{p})|-1} = 0$$

die Glieder, welche negative Potenzen von P_0 enthalten könnten, der Null gleich werden.

§. 122.

Soll die Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

mit der negativen ganzen Zahl $-m$ potenzirt werden, so wendet man den Satz an:

$$R^{-m} = \frac{1}{R^m},$$

potenzirt also die gegebene Reihe erst (nach §. 117.) mit der absoluten ganzen Zahl m, und dividirt dann die 1 durch diese Potenz

$$a^m+ma^{m-1}bx+\cdots,$$

welches eine rekurrente Reihe gibt, die (nach §. 114.) leicht hingeschrieben werden kann.

Damit aber diese Aufgabe möglich ist, darf a^m nicht Null sein, und also auch a nicht Null (§. 112.); d. h. sobald $a=0$, so gibt es nicht mehr eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe, die der Potenz $(a+bx+cx^2+\cdots)^{-m}$ gleich sein könnte.

Das Verfahren des §. 120.) liefert aber für diesen Fall ein der Potenz R^{-m} gleiches Produkt, dessen einer Faktor $\frac{1}{x^{pm}}$, und dessen anderer Faktor eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe ist.

§. 123. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung

1) $x = by+cy^2+dy^3+ey^4+\cdots$ in inf.

Man soll die Koeffizienten β, γ, δ, ε 2c. der Gleichung

2) $y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots$ in inf.

so bestimmen, daß diese unendliche Reihe rechts, statt y in obige Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

gesetzt, selbige identisch macht.

Auflösung. Man hat:

$$y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots$$

daraus
$$y^2 = \beta^2 x^2 + 2\beta\gamma x^3 + \left[\begin{matrix} 2\beta\delta \\ + \gamma^2 \end{matrix}\right] x^4 + \left[\begin{matrix} 2\beta\varepsilon \\ +2\gamma\delta \end{matrix}\right] x^5 + \cdots$$

$$y^3 = \beta^3 x^3 + 3\beta^2\gamma x^4 + \left[\begin{matrix} 3\beta^2\delta \\ +3\beta\gamma^2 \end{matrix}\right] x^5 + \cdots$$

$$y^4 = \beta^4 x^4 + 4\beta^3\gamma x^5 + \cdots$$

$$y^5 = \beta^5 x^5 + \cdots;$$

und diese Werthe in obige gegebene Gleichung 2.) bezüglich statt y, y^2, y^3, y^4, ꝛc. gesetzt, geben:

$$x = b\beta x + \left\{\begin{matrix} b\gamma \\ +c\beta^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} b\delta \\ +2c\beta\gamma \\ + d\beta^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} b\varepsilon \\ +2c\beta\delta \\ + c\gamma^2 \\ +3d\beta^2\gamma \\ + e\beta^4 \end{matrix}\right\} x^4 + \cdots$$

Damit nun diese Gleichung identisch ist, müssen die Koeffizienten einzeln einander gleich, folglich die rechts nach dem ersten folgenden, der Null gleich sein. Es wird daher

$$1 = b\beta,$$
$$0 = b\gamma + c\beta^2,$$
$$0 = b\delta + 2c\beta\gamma + d\beta^3,$$
$$0 = b\varepsilon + 2c\beta\delta + c\gamma^2 + 3d\beta^2\gamma + e\beta^4,$$

u. s. w. f.:

woraus die Koeffizienten β, γ, δ, ε ꝛc., einzeln gefunden werden können. Man erhält aber

$$\beta = \frac{1}{b},$$

$$\gamma = -\frac{c}{b^3},$$

$$\delta = \frac{-db+2c^2}{b^5} = \frac{2c^2-bd}{b^5},$$

$$\varepsilon = \frac{-eb^2+5dbc-5c^3}{b^7} = -\frac{5c^3-5bcd+b^2e}{b^7},$$

u. s. w. f.

Zugleich erhellet, daß für $b=0$, die Aufgabe selbst unmöglich ist.

Anmerkung 1. Man könnte verlangen: die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \cdots$ so zu bestimmen, daß

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots$$

statt y gesetzt, die Gleichung

$$x = by+cy^2+dy^3+ey^4+\cdots$$

zur identischen macht. Man erhielte dann auf demselben Wege zur Bestimmung von α, β, rc., die Gleichungen

$$b\alpha+c\alpha^2+d\alpha^3+e\alpha^4+\cdots = 0,$$
$$\beta(b+2\alpha c+3\alpha^2 d+4\alpha^3 e+\cdots) = 1,$$

u. s. w.

Der ersten dieser Gleichungen wird genügt, indem man $\alpha=0$ setzt; allein es kann ihr möglicher Weise auch noch durch unendlich viele andere Werthe von α genügt werden; und weil die übrigen Gleichungen in Bezug auf β, γ, δ, rc., einfache sind, so kann zu jedem Werth von α jedesmal ein zugehöriger Werth von β, und einer von γ, und einer von δ u. s. w. gefunden werden, und es kann daher unendlich viele Reihen nach y geben, die alle die verlangte Eigenschaft haben. Die eine, die sich für $\alpha=0$ ergibt, ist dann wieder die in der vorliegenden Aufgabe gesuchte und in der Auflösung derselben gefundene.

Anmerkung 2. Es hätte auch noch allgemeiner die Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x + \cdots \text{ in inf.}$$

gesucht werden können, welche der Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

ein Genüge leistet. — Dasselbe Verfahren liefert zur Bestimmung von α, β, γ, δ, ꝛc., die Gleichungen

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \cdots = 0,$$
$$\beta(b + 2\alpha c + 3\alpha^2 d + 4\alpha^3 e + \cdots) = 1;$$

u. s. w. f.

Die erste dieser Gleichungen kann wiederum für α unendlich viele Werthe geben, während die übrigen Gleichungen zu jedem Werth von α, zugehörige Werthe von β, γ, ꝛc. geben, so daß es im Allgemeinen wiederum unendlich viele Reihen gibt, welche die verlangte Eigenschaft haben.

§. 124.

Ist gegeben die Gleichung

$$by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots \text{ in inf.} = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \cdots \text{ in inf.}$$

und soll man die Koeffizienten der Reihe

$$\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots$$

finden, welche statt y gesetzt, die gegebene Gleichung identisch macht, so erhält man auf demselben Wege

$$B = b\beta,$$
$$C = b\gamma + c\beta^2,$$
$$D = b\delta + 2c\beta\gamma + d\beta^3,$$
$$E = b\varepsilon + 2c\beta\delta + c\gamma^2 + 3d\beta^2\gamma + e\beta^4,$$

u. s. w. f.;

woraus β, γ, δ, ε ⋯ bestimmt werden können.

Ist $b = 0$ aber nicht $B = 0$, so ist die Aufgabe nicht möglich. Ist aber $b = 0$ und zugleich $B = 0$, so erhält man

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{C}{c}\right)},$$

und aus den übrigen Gleichungen zu jedem Werth von β, einen zugehörigen Werth von γ, von δ, ꝛc., so daß dann zwei Reihen gefunden werden, welche alle beide die verlangte Eigenschaft haben; wenn nur nicht $c = 0$ ist. — Ist außer $B = b = 0$, noch $c = 0$ und nicht $C = 0$, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Ist aber außer $B = b = 0$ noch $c = 0$ und zugleich $C = 0$, so erhält man 3 Reihen, welche alle 3 die verlangte Eigenschaft haben; u. s. w. f.

Anmerkung 1. Man könnte wieder die Reihe verlangen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots,$$

welche der Gleichung

$$by + cy^2 + dy^3 + \cdots = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots,$$

oder der allgemeinern Gleichung

$$a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$

ein Genüge leistete, und man würde wieder zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten α, β, γ, δ, $\varepsilon \cdots$, Gleichungen erhalten, deren erste auf der einen Seite eine nach α fortgehende unendliche Reihe wäre, und deshalb im Allgemeinen für α unendlich viele Werthe geben könnte, während die übrigen Koeffizienten vermöge der übrigen Gleichungen, zu jedem dieser Werthe von α, einen einzigen Werth erhalten, so daß es unendlich viele Reihen gibt, welche alle dieselbe verlangte Eigenschaft haben.

Anmerkg. 2. Die Aufgaben des §. 123. und des §. 124. gehören zu denen, die unter dem Namen der „Aufgaben über die Umkehrung der Reihen“ bekannt sind, und die man auch Reversionsprobleme nennt.

Anmerkg. 3. Die Auflösung der Aufgabe (§. 123.) gilt auch noch, wenn die gegebene Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots$$

rechts eine endliche Reihe vom Grade m enthält; in welchem Falle diese Gleichung in Bezug auf y eine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade wird, wo x oder vielmehr $-x$ der letzte Koeffizient ist.

Anmerkung. Man erhält sonach in diesem Fall unendliche Reihen für die Wurzelwerthe der höhern Gleichung vom m^{ten} Grade in y, welche für eine numerische Gleichung die numerischen Wurzelwerthe geben, sobald sie konvergent sind, oder konvergent gemacht werden können.

§. 125. Aufgabe.

Es ist gegeben die unendliche Reihe

$$P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots,$$

oder

$$S[P_a \cdot x^a],$$

die durch F_x bezeichnet sein mag. Man soll F_{x+h}, d. h. das was aus F_x wird, wenn man $x+h$ statt x setzt, in eine nach ganzen Potenzen von h fortgehende unendliche Reihe verwandeln.

1te Auflösung. Es ist (nach §. 61.):

$$F_{x+h} = S[P_a \cdot (x+h)^a] = S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!} \cdot P_a \cdot x^b \cdot h^c \atop b+c=a\right]$$

$$= S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!} \cdot P_{b+c} \cdot x^b \cdot h^c\right] = S\left[\frac{(b+c)^{c|-1}}{c!} \cdot P_{b+c} \cdot x^b \cdot h^c\right],$$

welches die verlangte unendliche Reihe ist.

2te Auflösung. Man bildet aus der unendlichen Reihe F_x, die neue F^{I}_x, aus dieser letztern wieder die neue F^{II}_x, und so weiter die neuen Reihen F^{III}_x, F^{IV}_x, ꝛc. ꝛc. jede aus der vorhergehenden dadurch, daß man jedes Glied mit seinem Exponenten von x multiplizirt und in dem Produkt, 1 von demselben Exponenten subtrahirt; und man hat dann

$$F_{x+h} = F_x + F^{I}_x \cdot h + F^{II}_x \cdot \frac{h^2}{2!} + F^{III}_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \quad \text{in inf.},$$

wie solches aus der Form $N \cdot x^n$ der Glieder von F_x, in Verbindung mit §. 62[bis]. und nach dem Muster der §§. 83.-84. augenblicklich hervorgeht.

Zweite Abtheilung.

Von den numerischen unendlichen Reihen und ihrer Konvergenz.

§. 126. Lehrsatz.

Die mit lauter gleichen reellen Koeffizienten versehene, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe

$$A + Az + Az^2 + Az^3 + Az^4 + Az^5 + \cdots \text{ in inf.}$$

konvergirt allemal, wenn $z<1$, divergirt aber allemal, wenn $z \geqq 1$.

Beweis. Weil die gegebene unendliche Reihe nichts weiter ist, als das Produkt aus A und dieser andern Reihe

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+ \cdots\cdots \text{ in inf.};$$

so darf man blos von dieser letztern die n erstern Glieder addiren (nach §. 89.), und man erhält für ihre Summe

$$\frac{1-z^n}{1-z}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}.$$

Da nun z^n für $z<1$ der Null bis auf den Moment des Verschwindens nahe rückt*), während dasselbe z^n, $=\infty$ wird, so oft $z>1$, so folgt (nach

---

*) Daß $z^n = 0$ oder $=\infty$ wird, je nachdem $z<1$ oder >1 ist, kann, wie folgt, noch besonders bewiesen werden. Ist nämlich $z<1$, so ist $z = \frac{1}{1+q}$, wo q zwischen 0 und ∞ liegt und positiv ist. Dann ist

§. 101.), daß diese Reihe konvergirt für $z<1$; divergirt dagegen für $z>1$. — Für $z=1$ wird sie

$$= 1+1+1+1+1+1 \cdots \text{ in inf.},$$

folglich divergent.

Anmerkung 1. Wir sagen, daß der Werth der gegebenen numerischen unendlichen Reihe $=\frac{A}{1-z}$ ist, so oft $z<1$, d. h. so oft die Reihe konvergirt. Dies ist dahin zu deuten, daß die Summe der erstern Glieder der Reihe, dem $\frac{A}{1-z}$ desto näher rückt, je mehr Glieder man nimmt, und daß bei einer immer größern Anzahl von Gliedern, der Unterschied zwischen ihrer Summe und $\frac{A}{1-z}$ zuletzt in den Moment des Verschwindens rückt, d. h. kleiner noch wird, als jede bereits noch so klein gedachte bestimmte Zahl.

Anmerkung 2. Eine numerische unendliche Reihe ist konvergent, wenn sie von irgend einem m^{ten} Gliede ab, konvergent wird.

Denn die Summe der ersten m Glieder, so groß auch m sein mag, ist doch immer endlich (wenn vielleicht auch sehr groß).

$z^n = \frac{1}{(1+q)^n}$; aber $(1+q)^n = 1+nq+n_2 \cdot q^2+n_3 \cdot q^3+\cdots$ (nach §. 61.); folglich $(1+q)^n>1+nq$ und $\frac{1}{(1+q)^n}<\frac{1}{1+nq}$. Für $n=\infty$ wird aber $1+nq$ ebenfalls ∞; also ist dann $\frac{1}{1+nq}$ im Moment des Verschwindens, mithin ist z^n für $n=\infty$ im Moment des Verschwindens, wenn nämlich $z<1$.

Ist aber $z>1$, so ist $z=1+q$, wo q positiv und zwischen 0 und ∞ liegt; und $z^n = 1+nq+n_2 \cdot q^2+n_3 \cdot q^3+\cdots$, d. h. $z^n>1+nq$, mithin $z^n=\infty$ für $n=\infty$.

§. 127. Lehrsatz.

Stellt P eine numerische unendliche Reihe mit reellen und positiven Gliedern vor, deren Konvergenz außer Zweifel gesetzt ist; und ist Q eine zweite Reihe, welche von einem gewissen Gliede ab, nach der Ordnung, bezüglich dieselben oder kleinere Glieder hat als die erstere P, mögen sonst ihre Glieder alle positiv oder zum Theil negativ sein, so ist Q nothwendig ebenfalls konvergent.

Beispiel. So ist z. B. die unendliche Reihe

$$1+\frac{3}{1}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}+\frac{3^7}{7!}+\frac{3^8}{8!}+\frac{3^9}{9!}+\cdots$$

nothwendig konvergent, weil von dem Gliede $\frac{3^8}{8!}$ an, welches $=\frac{6561}{6720}$, also kleiner als 1 ist, ihre Glieder gegen die Glieder dieser andern Reihe

$$1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots,$$

deren Konvergenz (nach §. 125.) feststeht, bezüglich kleiner sind, in so ferne jedes folgende Glied im Zähler den Faktor 3, im Nenner dagegen die Faktoren 10, 11, 12, 13 2c. 2c. mehr bekommt, also jedes folgende Glied, das $\frac{3}{10}$-, $\frac{3}{11}$-, $\frac{3}{12}$-, $\frac{3}{13}$-, $\frac{3}{14}$- 2c. 2c.-fache des vorhergehenden, also kleiner ist, als wenn es jedesmal das $\frac{1}{3}$-fache des vorhergehenden wäre.

Um so mehr ist aber konvergent die unendliche Reihe

$$1-\frac{3}{1}+\frac{3^2}{2!}-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}-\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}-\cdots$$

Beweis fällt in die Augen.

§. 128.

Hieraus folgt ohne Weiteres:

1) Ist irgend eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

mit reellen Koeffizienten für irgend einen absoluten Werth, $x=\alpha$

konvergent, so ist sie allemal für jeden noch kleinern Werth von α um so sicherer konvergent.

2) Ist in der unendlichen Reihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+\cdots \text{ in inf.}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ der größte unter den Quotienten je zweier auf einander folgender Koeffizienten; so ist diese unendliche Reihe für jeden Werth α von x konvergent, der $<\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ist.

Denn es ist dann

$$\alpha<\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{und} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}}\alpha<1.$$

Nun ist aber das $(n+1)^{te}$ Glied der Reihe, das $\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\alpha$ fache des nächstvorhergehenden, und jedes der übrigen Glieder kleiner, als das $\frac{a_n}{a_{n-1}}\alpha$ fache des vorhergehenden (weil z. B. $\frac{a_3}{a_2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}$, also auch $\frac{a_3}{a_2}\alpha<\frac{a_n}{a_{n-1}}\alpha$), während $\frac{a_n}{a_{n-1}}\alpha<1$ ist: folglich ist die Reihe selbst für diesen Werth α von x, konvergent.

3) Wird der Quotient des $(n+1)^{ten}$ Koeffizienten durch den n^{ten}, größer, je größer n wird; geschieht aber das Größerwerden nach einem solchen Gesetz, daß keiner dieser Quotienten eine bestimmte Zahl $\frac{Q}{P}$ übersteigen kann, so darf man nur $x<\frac{P}{Q}$ nehmen, und die Reihe muß für jeden solchen Werth von x allemal konvergent sein, wie unmittelbar aus Nr. 2.) hervorgeht.

4) Es gibt daher auch Reihen, welche für jeden reellen Werth von x konvergent sind. Dahin gehört z. B.

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right], \text{ d. h. } 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \text{ in inf.}$$

Denn dividirt man das $n+1^{te}$ Glied $\frac{x^n}{n!}$, durch das n^{te} Glied $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, so erhält man $\frac{x}{n}$, und dieses $\frac{x}{n}$ ist, wie groß auch x genommen werden mag (in so ferne n immer noch größer werden kann) von einem gewissen n^{ten} Gliede ab, allemal kleiner als 1, und dann immer kleiner, je weiter die Glieder genommen werden. Also konvergirt die gegebene Reihe von diesem n^{ten} Gliede ab, schneller als die geometrische

$$\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{x}{n}\right)^3+\left(\frac{x}{n}\right)^4+\cdots,$$

deren Konvergenz (nach §. 126.) bereits feststeht.

5) Dahin gehören aber deswegen auch z. B. diese vier andern unendlichen Reihen

$$S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] \quad \text{oder} \quad x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots \text{ in inf.},$$

$$S\left[(-1)^a\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] \quad \text{oder} \quad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \text{ in inf.},$$

$$S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] \quad \text{oder} \quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots \text{ in inf.},$$

$$S\left[(-1)^a\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] \quad \text{oder} \quad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \text{ in inf.},$$

welche für jeden reellen Werth von x konvergent sind.

§. 129. Lehrsatz.

Setzt man in der unendlichen Reihe

$$p+pz+pz^2+pz^3+\cdots \text{ in inf.},$$

wo p reell ist und absolut, $z<\frac{1}{2}$, so wird das erste Glied p größer als die Summe aller übrigen unendlich vielen Glieder der gegebenen Reihe.

Denn es ist der Werth der gegebenen Reihe, für $z<1$, $=\frac{p}{1-z}$. Ist daher $z<\frac{1}{2}$, so ist $1-z>\frac{1}{2}$ und $\frac{p}{1-z}<2p$; daher der Lehrsatz erwiesen.

§. 130.

Hieraus folgt:

1) Ist in einer numerischen Reihe jedes folgende Glied kleiner als die Hälfte des vorhergehenden, und sind dabei alle Glieder reell, so ist das erste Glied dieser Reihe jedesmal größer, als die arithmetische Summe aller übrigen (unendlich vielen) Glieder derselben Reihe.

2) Eine solche Reihe ist daher einer positiven oder negativen Zahl gleich, je nachdem das erste Glied derselben positiv oder negativ ist.

3) Ist $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ der größte der Quotienten je zweier auf einander folgender Koeffizienten der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \text{ in inf.},$$

so ist das erste Glied dieser Reihe, d. h. a_0, größer, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder, für jeden Werth α von x, der gleich oder kleiner ist als die Hälfte dieses größten Quotienten $\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Denn es ist jedes folgende Glied gleich oder kleiner, als das $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \alpha$fache des vorhergehenden. Da nun $\alpha \overset{=}{<} \frac{a_{n-1}}{2a_n}$ ist, so ist $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \alpha \overset{=}{<} \frac{1}{2}$, also jedes folgende Glied kleiner, als die Hälfte des vorhergehenden (Nr. 1.).

4) Wird der Quotient $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ größer, je größer n ist, doch so, daß er nie eine gewisse Grenze $\frac{Q}{P}$ überschreiten kann, so ist das erste Glied a_0 dieser Reihe größer, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder für jeden Werth α von x, der $\overset{=}{<} \frac{P}{2Q}$ ist.

Denn es ist dann auch jedes folgende Glied gleich oder kleiner, als die Hälfte des vorhergehenden (Nr. 1.).

§. 131.

Hat man, wenn F_x eine beliebige unendliche Reihe mit reellen Koeffizienten ist, F_{x+h} (nach §. 125. 2te Auflösung) in eine Reihe nach h entwickelt, hat man also gefunden

$$F_{x+h} = F_x + F_x^I \cdot h + F_x^{II} \cdot \frac{h^2}{2!} + F_x^{III} \cdot \frac{h^3}{3!} + \text{ in inf.},$$

wo die Koeffizienten F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III}, ꝛc. ꝛc. aus F_x und aus einander nach dem §. 125. gefunden werden, so folgt noch:

1) Sind alle diese unendlich vielen Koeffizienten F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III}, in inf., welche ebenfalls unendliche Reihen nach x sind, mit F_x selbst, für jeden reellen Werth von x, der zwischen α und β liegt (wo α und β beliebig positiv, negativ oder auch Null sind) konvergent, so geht die unendliche Reihe F_x zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$, stetig fort, d. h. für je zwei sehr nahe liegende Werthe von x, zwischen α und β, ist der Unterschied H der zugehörigen Werthe der Reihe F_x, von dem Unterschiede h der beiden Werthe von x, dergestalt abhängig, daß H desto kleiner wird, je kleiner man h nimmt, und daß H kleiner werden kann, als jede noch so kleine aber gegebene Zahl D.

Beweis. Es ist nach dem obigen

$$H = F_{x+h} - F_x = \left(F_x^I + F_x^{II} \cdot \frac{h}{2!} + F_x^{III} \cdot \frac{h^2}{3!} + \text{ in inf.}\right) \cdot h.$$

Man kann nun, wegen der Voraussetzungen, h klein genug nehmen, daß (nach §§. 129. 130.), wenn man nur die absoluten Werthe sich denkt,

$$F_x^I > F_x^{II} \cdot h + F_x^{III} \cdot h^2 + F_x^{IV} \cdot h^3 + \text{ in inf.},$$

daß daher auch

$$H = F_{x+h} - F_x < 2F_x^I \cdot h$$

wird. Nimmt man nun $h \overset{=}{<} \frac{D}{2F_x^I}$, so wird auch $H<D$, für jeden Werth von x, der zwischen α und β liegt.

2) Sind daher F_x, F^I_x, F^{II}_x, F^{III}_x, 2c. 2c. in inf. für jeden reellen Werth von x konvergent, so geht F_x mit den sich stetig ändernden Werthen von x, beständig stetig fort.

Anmerkung. Daher sind auch die Reihen des §. 128. NNr. 4. und 5.) nicht blos für jeden Werth von x konvergent, sondern sie ändern sich auch stetig mit den stetig sich ändernden Werthen von x zugleich.

Denn es ist, wenn z. B.

$$F_x = S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

gedacht wird, dann

$$F^I_x = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right];$$

$$F^{II}_x = S\left[\frac{x^{2a-1}}{(2a-1)!}\right],$$

wo a den Werth 0 nicht haben darf, also, wenn $a+1$ statt a gesetzt wird;

$$F^{II}_x = S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

$$F^{III}_x = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right],$$

$$F^{IV}_x = S\left[\frac{x^{2a-1}}{(2a-1)!}\right] = S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2+1)!}\right],$$

$$F^{V}_x = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

u. s. w. f. — Es sind also alle Koeffizienten F_x, F^I_x, F^{II}_x, F^{III}_x, 2c. 2c. für jeden reellen Werth von x, konvergent.

§. 132.

Es kann aber der Werth einer unendlichen Reihe F_x bald größer, bald kleiner werden, während x selbst von $-\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin stetig wächst, und es hängt

solches für ein sehr kleines h vom Zeichen des Koeffizienten F_x^I ab, wenn

$$F_{x+h}-F_x = F_x^I \cdot h + F_x^{II} \cdot \frac{h^2}{2!} + F_x^{III} \cdot \frac{h^3}{3!} + \text{ in inf.}$$

nach dem vorstehenden Paragraphen (oder nach §. 125.) in eine nach Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt worden ist.

1) Sind nämlich alle Koeffizienten F_x, F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III}, rc. rc. entweder für jeden reellen Werth von x, oder doch für alle reellen Werthe von x konvergent, die zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegen, so kann man h immer klein genug nehmen (nach §. 130.), daß für diesen Werth von h, und dann auch für jeden noch kleineren, das erste Glied $F_x^I \cdot h$ größer wird (absolut genommen) als die Summe aller übrigen unendlich vielen Glieder der Entwickelung. Also wächst F_x mit x zugleich, so lange F_x^I positiv ist; dagegen nimmt F_x ab, während x wächst, sobald F_x^I negativ wird.

2) Für die Werthe von x, welche $F_x^I = 0$ machen, ist $F_{x+h}-F_x$ mit F_x^{II} zugleich positiv, oder zugleich negativ für ein so klein gedachtes h, und zwar man mag h positiv oder negativ sich denken, so daß $x+h>x$ oder $x+h<x$ ist.

Ist daher $F_x^I = 0$ und für denselben Werth von x, F_x^{II} positiv, so geht eben die Funktion F_x vom Abnehmen zum Wachsen über; sie hat jetzt einen (relativ) kleinsten Werth, ein Minimum. — Ist aber $F_x^I = 0$ und F_x^{II} negativ, so geht für diesen Werth von x, die Reihe F_x eben vom Wachsen zum Abnehmen über; sie hat jetzt eben einen (relativ) größten Werth; ihr Werth ist jetzt ein Maximum.

3) Mit einem Worte: Alles was im §. 97. Von dem Gange der reellen Werthe einer reellen ganzen Funktion gesagt sich findet, gilt unverändert auch noch für eine, nach ganzen

Potenzen von x fortlaufenden Reihe, so lange nur die Koeffizienten F_x, F_x^{I}, F_x^{II}, F_x^{III}, 2c. 2c. bestimmte reelle Werthe haben, d. h. konvergente numerische Reihen sind.

§. 133.

Geht eine unendliche Reihe F_x oder

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ 2c. 2c. in inf.},$$

mit den zwischen α und β stetig sich ändernden Werthen von x stetig fort, und wird dabei F_x für $x = \alpha$ positiv und $= +A$, dagegen für $x = \beta$ negativ und $= -B$, so liegt zwischen α und β wenigstens ein reeller (rationaler oder irrationaler) Werth, der statt x gesetzt, die unendliche Reihe zu Null macht.

Beweis. Denn da F_x für die Werthe von x, welche zwischen α und β liegen, stetig sich ändert, so gehen ihre Werthe von $+A$ zu $-B$ stetig fort, also nothwendig durch Null hindurch, während dem x alle reellen Werthe zwischen α und β beigelegt werden.

Anmerkung. Wir müssen aber am Schlusse dieses Kapitels nochmals besonders bemerken, daß das Arbeiten mit unendlichen Reihen nach den vorstehenden Prinzipien Nothwendigkeit der Resultate gewähren muß, wenn man nur nicht vergißt, sich jedesmal zu versichern, daß die Koeffizienten der allgemeinen Reihen nicht divergente numerische Reihen, sondern bestimmte Ziffernwerthe sind, und daß überhaupt wenn von den Werthen numerischer Reihen die Rede ist, letztere immer konvergent sein müssen. — Wir wollen daher hier noch einige der einfacheren Sätze der Konvergenz hinstellen, wegen der weiteren Kennzeichen der Konvergenz aber auf den 8ten Theil dieses Werkes verweisen.

§. 134. Lehrsatz.

Eine numerische Reihe mit reellen Gliedern und abwechselnden Vorzeichen ist allemal konvergent, so oft die Glieder bis ins

Unendliche fort stets abnehmen, wenn auch noch so wenig, aber doch um etwas bestimmtes.

Beweis. Denn eine solche Reihe

1) $R = a_0 - a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 +$ in inf.

läßt sich einmal so schreiben:

2) $R = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots,$

so daß alle ihre Glieder positiv sind, der Voraussetzung zu Folge. Dann aber läßt sie sich auch so schreiben:

3) $R = a_0 - [(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots]$

in welcher Form die in den eckigen Klammern befindliche Reihe lauter positive Glieder hat.

Da nun (nach der Form Nr. 2.) der Werth von R nicht negativ werden kann, so ist nicht bloß die in den eckigen Klammern (in der Form Nr. 3.) befindliche unendliche Reihe konvergent, sondern ihr Werth ist auch nothwendig $< a_0$, und deshalb hat nun auch R selbst einen bestimmten Werth, der ebenfalls $< a_0$ ist.

§. 135. Lehrsätze.

1) Sind A und B zwei nach Potenzen von x fortlaufende Reihen, z. B.

$$A = S[K_a \cdot x^a] \quad \text{und} \quad B = S[L_a \cdot x^a]$$

und verwandelt man nun die Summe $A + B$ und die Differenz $A - B$ derselben, jedesmal wieder in neue, nach Potenzen von x fortlaufende Reihen, welche wir bezüglich durch Σ und durch D bezeichnen wollen, so daß man also

$$\Sigma = S[(K_a + L_a) \cdot x^a] \quad \text{und} \quad D = S[(K_a - L_a) x^a]$$

hat, so sind diese letztern beiden Reihen Σ und D jedesmal für denselben Werth von x convergent, für welchen die erstern beiden Reihen A und B convergent werden.

Denn, bezeichnet man die Summe der ersten Glieder der Reihen A, B, Σ und D, bis zur Potenz x^n, bezüglich durch A_n, B_n, Σ_n und D_n, so hat man nach den Regeln der Addition und Subtraktion auch

$$\Sigma_n = A_n + B_n \quad \text{und} \quad D_n = A_n - B_n.$$

Da nun der Voraussetzung und der Definition des §. 101. zu Folge, A_n und B_n für $n = \infty$, bestimmte Werthe annehmen, so ist dies, den letztern Gleichungen zu Folge auch mit Σ_n und D_n der Fall.

2) Verwandelt man das Produkt der beiden Reihen A und B ebenfalls in eine neue nach Potenzen von x geordnete Reihe, welche durch P bezeichnet sein mag, so daß man

$$P = A \cdot B$$

hat, so ist die Reihe P ebenfalls für jeden positiven Werth von x convergent, welcher die Reihen A und B convergent macht, sobald nur letztere lauter positive Koeffizienten haben.

Denn bezeichnet man wieder durch A_n, B_n und P_n die Summe der erstern Glieder dieser Reihen bis zur Potenz x^n hin, so ist allemal

$$P_n < A_n \cdot B_n,$$

in so ferne das Produkt $A_n \cdot B_n$ (nach den Regeln der Multiplikation) alle Glieder von P_n hat und dann noch Glieder bis zur Potenz x^{2n} hin, welche der letztern Bedingung gemäß, alle positiv sind. Und da nun A_n und B_n für $n = \infty$, bestimmte Werthe haben, so muß P_n für $n = \infty$ auch einen bestimmten Werth haben, da P_n immer kleiner noch als $A_n \cdot B_n$ ist, wenn auch P_n gerade für $n = \infty$, von $A_n \cdot B_n$ nur um unendlich wenig noch verschieden sein kann.

3) Verwandelt man aber den Quotienten $\frac{A}{B}$ zweier solcher Reihen in eine neue, nach Potenzen von x fortlaufende Reihe Q, so läßt sich aus der Konvergenz der Reihen A und B durchaus nicht auf die Konvergenz der Reihe Q schließen.

Das einfachste Beispiel ist

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ in inf.},$$

wo links der Dividend 1 und der Divisor $1-x$ für jeden Werth von x als convergente unendliche Reihen angesehen werden können, deren Koeffizienten

bis in's Unendliche fort, der Null gleich sind, während die unendliche Reihe rechts nur für $x<1$ convergent ist, d. h. einen bestimmten Werth hat.

4) Die Gleichung $\frac{A}{B} = Q$ sagt also weiter nichts, als daß die unendliche Reihe rechts die Eigenschaft des Quotienten links hat, nämlich mit B multiplizirt A zu geben. Haben sie nun alle dreie für einen gewissen Werth von x, bestimmte Werthe, so hat der Werth von Q dieselbe Eigenschaft; er ist also dem Quotienten der Werthe von A und B nothwendig gleich. — Hat aber für einen andern Werth von x, die Reihe Q gar keinen Werth (d. h. ist sie divergent), so dient natürlich die Gleichung $\frac{A}{B} = Q$ auch nicht dazu den Werth von $\frac{A}{B}$ zu geben, auch wenn letzterer existirt. Die Gleichung ist jetzt nicht mehr brauchbar, weil zur Rechten jetzt eine im Kalkul unzulässige Form (wie früher z. B. die Form $\frac{1}{0}$ nicht zugelassen werden durfte) angenommen hat.

5) Verwandelt man die m^te^ Potenz der Reihe A in eine neue, nach Potenzen von x geordnete Reihe, so ist letztere jedesmal mit A zugleich convergent, so oft m positiv ist, x positiv genommen worden und die Reihe A lauter positive Koeffizienten hat. (Aus Nr. 3.).

Ist aber m negativ, so kann man (wegen Nr. 4.) aus der Konvergenz von A auf die Konvergenz der neuen Reihe nicht schließen.

Siebentes Kapitel.

Fortsetzung der Lehre der unendlichen Reihen. Der binomische Lehrsatz für Differenz-Potenzen. Potenz-Reihen.

§. 136. Aufgabe.

Man soll $(1+b)^{-n}$ in eine unendliche Reihe verwandeln, die nach ganzen Potenzen von b fortläuft, unter der Voraussetzung, daß n eine positive, also $-n$ eine negative ganze Zahl ist.

Auflösung. Es ist (nach §. 61.):

$$(1+b)^{-n} = \frac{1}{(1+b)^n} = \frac{1}{1+n_1 \cdot b + n_2 \cdot b^2 + n_3 \cdot b^3 + \cdots \text{ in inf.}},$$

weil die Reihe, welche der binomische Lehrsatz für $(1+b)^n$ (nach §. 61.) liefert, bis in's Unendliche genommen werden kann, in so ferne jeder Binomial-Koeffizient n_α der Null gleich wird, so oft man $\alpha > n$ selbst nimmt.

Um nun die Einheit durch diese unendliche Reihe zu dividiren, kann man sich der praktischen Regeln aus der Lehre der rekurrenten Reihen bedienen, und man erhält, wenn man die gesuchte Reihe durch

$$1 + A_1 \cdot b + A_2 \cdot b^2 + A_3 \cdot b^3 + A_4 \cdot b^4 + \cdots$$

vorstellt, unter $(-n)_\alpha$ aber den Quotienten

$$\frac{(-n)^{\alpha|-1}}{\alpha!}, \text{ d. h. } \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \alpha}$$

versteht, (nach §. 114.)

$A_1 = -n_1 = -n = (-n)_1$,

$A_2 = -n_1 \cdot A_1 - n_2 = -n_1 \cdot (-n)_1 - n_2 = (-n)_2$ (nach §. 69. I.),

$A_3 = -n_1 \cdot A_2 - n_2 \cdot A_1 - n_3 = -n_1 \cdot (-n)_2 - n_2 \cdot (-n)_1 - n_3$
$= (-n)_3$,

und dies ist wiederum nach §. 69. I.

$A_4 = -n_1 \cdot A_3 - n_2 \cdot A_2 - n_3 \cdot A_1 - n_4$
$= -n_1 \cdot (-n)_3 - n_2 \cdot (-n)_2 - n_3 \cdot (-n)_1 - n_4$

und dies ist wiederum nach §. 69. I. $= (-n)_4$

u. s. w. f.; also findet sich

$$(1+b)^{-n}$$
$$= 1 + (-n)_1 \cdot b + (-n)_2 \cdot b^2 + (-n)_3 \cdot b^3 + (-n)_4 \cdot b^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

oder $$(1+b)^{-n} = S[(-n)_a \cdot b^a],$$

wo $(-n)_a$ den Quotienten $\frac{(-n)^{a|-1}}{a!}$ bedeutet.

Nachdem in der eben statt gefundenen Auflösung das verlangte Resultat gefunden worden ist, thut man wohl, sowohl der Eleganz, als auch der größern Gründlichkeit wegen, solches synthetisch zu erweisen.

Multiplizirt man aber die beiden Reihen

$$S[n_a \cdot b^a] \quad \text{und} \quad S[(-n)_a \cdot b^a]$$

mit einander, so erhält man (nach §. 109.) zum Produkt die Reihe

$$S[n_a \cdot (-n)_b \cdot b^{a+b}] \quad \text{oder} \quad S\left[n_a (-n)_b \cdot b^c \atop a+b=c\right],$$

in welcher der Koeffizient von b^c das Aggregat

$$S\left[n_a (-n)_b \atop a+b=c\right]$$

ist. — Dieses letztere ist aber, unter der Voraussetzung, daß

$$n_a = \frac{n^{a|-1}}{a!} \quad \text{und} \quad (-n)_b = \frac{(-n)^{b|-1}}{b!}$$

gedacht wird, (nach §§. 69.—71.) allemal $= 0$, so oft c nicht 0 ist, und $= 1$, so oft $c = 0$, so daß sich also findet

$$S[n_\alpha \cdot b^\alpha] \cdot S[(-n)_\alpha \cdot b^\alpha] = 1.$$

In diesem Produkt ist nun der erste Faktor, so oft n eine positive ganze Zahl ist, $= (1+b)^n$; also wenn man vorstehende Gleichung durch ihn wegdividirt,

$$S[(-n)_\alpha \cdot b^\alpha] = \frac{1}{(1+b)^n} = (1+b)^{-n}.$$

§. 137.

Es mag also x die ganze positive Zahl n oder die ganze negative Zahl $-n$ vorstellen, oder auch 0, also eine beliebige Differenz ganzer Zahlen, so ist doch immer

$$(1+b)^x = S[x_\alpha \cdot b^\alpha], \quad \text{wo} \quad x_\alpha = \frac{x^{\alpha|-1}}{\alpha!}.$$

Multiplizirt man hier mit a^x links und rechts, nachdem vorher $\frac{b}{a}$ statt b gesetzt worden ist, und denkt man daran, daß

$$a^x \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^x = (a+b)^x$$

gefunden wird, so erhält man:

$$(a+b)^x = S[x_\alpha \cdot a^{x-\alpha} \cdot b^\alpha] = S\left[\frac{x^{\alpha|-1}}{\alpha!} \cdot a^{x-\alpha} \cdot b^\alpha\right];$$

woraus hervorgeht, daß der binomische Lehrsatz (des §. 62.) auch noch gilt, wenn x eine beliebige Differenz ganzer Zahlen ist, wenn man nur die Reihe rechts als eine unendliche nimmt (deshalb auch unter das Aggregat keine, die durchlaufenden Werthe von α beschränkende Gleichung setzt).

Anmerkung 1. Man kann aber, wenn $x = -n$ sein sollte, auch noch folgende Umwandlungen vornehmen. Da nämlich

$$(-n)_\alpha = \frac{(-n)^{\alpha|-1}}{\alpha!} \quad \text{und} \quad (-n)^{\alpha|-1} = (-1)^\alpha \cdot n^{\alpha|1}$$

ist, so erhält man auch

$$(a+b)^{-n} = S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{n^{\mathfrak{a}|1}}{\mathfrak{a}!} \cdot a^{-n-\mathfrak{a}} b^{\mathfrak{a}}\right]$$
$$= S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(n+\mathfrak{a}-1)^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} \cdot \frac{b^{\mathfrak{a}}}{a^{n+\mathfrak{a}}}\right]$$
$$= S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot (n+\mathfrak{a}-1)_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{b^{\mathfrak{a}}}{a^{n+\mathfrak{a}}}\right] = \text{rc. rc.}$$

Und setzt man hier, um die ersten Glieder dieser unendlichen Reihe zu erhalten, 0, 1, 2, 3, rc. statt $\mathfrak{a}$, so findet sich

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n} - n \cdot \frac{b}{a^{n+1}} + (n+1)_2 \cdot \frac{b^2}{a^{n+2}} - (n+2)_3 \cdot \frac{b^3}{a^{n+3}} + \cdots \text{ in inf.},$$

oder

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n} - n \cdot \frac{b}{a^{n+1}} + \frac{(n+1) \cdot n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b^2}{a^{n+2}} - \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^{n+3}} + \cdots \text{ in inf.}$$

Anmerkung 2. Da wir im Laufe dieses Werkes bis jetzt noch keine anderen Potenzen kennen gelernt haben, als „Differenz-Potenzen“ d. h. solche, deren Exponenten beliebige Differenzen ganzer Zahlen (nämlich positive oder negative ganze Zahlen oder Null oder 1) sind, so kann die Frage: „ob der binomische Lehrsatz auch noch für andere Potenzen“ gelte hier zur Zeit noch gar nicht gestellt werden.

Anmerkung 3. Da

$$(1+b)^x = 1 + x_1 \cdot b + x_2 \cdot b^2 + x_3 \cdot b^3 + x_4 \cdot b^4 + \cdots \text{ in inf.}$$ ist,

während $x_1 = x$; $x_2 = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$;

$x_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$; u. s. w. ist; während überhaupt $x_{\mathfrak{a}}$ in eine ganze Funktion von x umgewandelt werden kann, — so darf man nur diese ganzen Funktionen von x in obige Binomialreihe statt der Binomial-Koeffizienten x_1, x_2, x_3, x_4 ··· gesetzt denken, und $(1+b)^x$ geht in eine Doppelreihe über, die einerseits nach Potenzen von b, andererseits aber nach Potenzen von x fortschreitet, welche man also auch wieder als eine Reihe der ersten Ordnung ansehen kann, die nach Potenzen

von x fortschreitet, während ihre einzelnen Koeffizienten, Reihen sind, die nach Potenzen von b fortlaufen. Und da statt b auch $a-1$ gesetzt werden kann, so daß $1+b=a$ wird, so kann man die eben gefundene Binomialreihe offenbar sogleich dahin umformen, daß man eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe bekommt von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^4 + \cdots,$$

welche der Potenz a^x gleich ist (in allen den Fällen, wo a^x bis jetzt eine Bedeutung erhalten hat), und in welcher die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, 2c. 2c. selber Reihen sind, die nach Potenzen von $(a-1)$ fortlaufen, d. h. bestimmte endliche numerische Werthe haben können.

Bezeichnet man nun diese unendliche, der Potenz a^x gleiche Reihe $A_0+A_1 \cdot x+A_2 \cdot x^2+A_3 \cdot x^3+\cdots$ durch F_x, und bedeutet F_y die andere Reihe, welche aus dieser F_x hervorgeht, wenn y statt x gesetzt wird; versteht man endlich unter F_{x+y} die Reihe, welche aus F_x hervorgeht, wenn man $x+y$ statt x setzt, so ist in allen den Fällen, wo a^x, a^y, a^{x+y} eine Bedeutung bis jetzt erhalten haben, also wenn x, y und $x+y$ Differenzen ganzer Zahlen sind, a aber allgemein ist,

$$a^x = F_x, \qquad a^y = F_y,$$

$$a^{x+y} = F_{x+y};$$

also, weil $$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

ist, auch $$F_x \cdot F_y = F_{x+y};$$

d. h. die unter F_x und F_y vorgestellten unendlichen Reihen mit einander multiplizirt, geben die unter F_{x+y} sich zu denkende, so oft a allgemein und x, y und $x+y$ Differenzen ganzer Zahlen sind.

Es entsteht daher nun die Frage, ob diese unter F_x, F_y und F_{x+y} vorgestellten unendlichen Reihen nicht im Allgemeinen schon die Eigenschaft haben, daß $F_x \cdot F_y = F_{x+y}$ ist, für jedes x und für jedes y? — Und zuletzt kann dann auch noch die

andere Frage entstehen, ob es mehrere allgemeine, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen gibt, denen dieselbe Eigenschaft zukommt? — Fangen wir daher bei letzterer Untersuchung an.

§. 138. Aufgabe.

Eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe $S[P_a \cdot x^a]$, d. h. $P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+P_4x^4+\cdots$ in inf. zu finden, welche, wenn man sie durch F_x bezeichnet, und wenn man unter F_y, F_{x+y} dieselbe Reihe sich denkt, nur y oder $x+y$ statt x gesetzt, — die Eigenschaft hat, daß für jedes x und für jedes y,

1) $$F_x \cdot F_y = F_{x+y}$$

ist.

Auflösung. Man hat vorausgesetzt

2) $$F_x = S[P_a \cdot x^a],$$

so daß nur übrig bleibt, den Koeffizienten P_a, d. h. die Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, 2c. 2c. zu finden, während, nach den Bedingungen der Aufgabe, diese Koeffizienten von x unabhängig sein, also sich nicht ändern, sondern genau dieselben bleiben sollen, wenn y oder $x+y$ statt x gesetzt wird. Dann ist aber auch

3) $$F_y = S[P_a \cdot y^a],$$

und 4) $$F_{x+y} = S[P_a \cdot (x+y)^a].$$

Folglich hat man (nach §. 57.):

5) $$F_x \cdot F_y = S[P_a \cdot P_b \cdot x^a \cdot y^b];$$

also ist

6) $$S[P_a \cdot (x+y)^a] = S[P_a \cdot P_b \cdot x^a \cdot y^b]$$

die zu erfüllende Gleichung 1.)

Weil aber (nach dem binomischen Lehrsatze §. 61.):

$$(x+y)^a = S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!} \cdot x^b \cdot y^c\right]_{b+c=a}$$

ist, so ist (aus 6.) die von den gesuchten Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, 2c. 2c. zu erfüllende Gleichung 1.) die nachstehende, nämlich

$$7)\qquad S\left[\frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})!}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!}\cdot P_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\cdot x^{\mathfrak{b}}\cdot y^{\mathfrak{c}}\right] = S[P_{\mathfrak{a}}\cdot P_{\mathfrak{b}}\cdot x^{\mathfrak{a}}\cdot y^{\mathfrak{b}}],$$

woraus (nach §. 104. Nr. 4.) hervorgeht, daß links und rechts die Koeffizienten von $x^m y^n$ einander gleich werden müssen, nämlich daß

$$8)\qquad \frac{(m+n)!}{m!\ n!}\cdot P_{m+n} = P_m\cdot P_n$$

werden müsse und zwar für jeden Werth von m und n, der Null oder positiv ganz ist. — Man fange nun damit an, daß man dieser Gleichung 8.) für $n=1$ genügt, d. h. daß man

$$9)\qquad (m+1)\cdot P_{m+1} = P_m\cdot P_1$$

macht für jeden Werth von m, der 0 oder positiv ganz ist.

Setzt man aber statt m nach und nach 0, 1, 2, 3 ··· bis m—1, so ergeben sich (aus 9.) die Gleichungen:

$$P_1 = P_0 \cdot P_1,\quad \text{also}\quad P_0 = 1,$$

und

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot P_2 &= P_1 \cdot P_1,\\ 3\cdot P_3 &= P_2 \cdot P_1,\\ 4\cdot P_4 &= P_3 \cdot P_1,\\ &\ \vdots \\ m\cdot P_m &= P_{m-1}\cdot P_1, \end{aligned}\right\}$$

woraus die Werthe von P_2, P_3, P_4, ··· P_m sich ergeben, alle in P_1 ausgedrückt, welcher letztere Koeffizient unbestimmt bleibt und $=c$ gesetzt werden mag.

Multiplizirt man diese Gleichungen alle mit einander und dividirt man die gemeinschaftlichen Faktoren auf beiden Seiten weg, schreibt man ferner 1 statt P_0 und c statt P_1, so erhält man

$$10)\qquad m!\ P_m = c^m,\quad \text{d. h.}\quad P_m = \frac{c^m}{m!}.$$

Weil aber unsere Aufgabe nur dann gelöst ist, wenn die gefundenen Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, 2c. 2c. so sind, daß sie der Gleichung 8.) d. h. der Gleichung

$$8) \qquad \frac{(m+n)!}{m!\ n!} \cdot P_{m+n} = P_m \cdot P_n$$

für jeden Werth von m und n genügen, welcher 0 oder positiv ganz ist, — so muß man jetzt noch in diese Gleichung statt P_{m+n}, P_m und P_n, die (aus 8.) für $n=1$ gefundenen) Werthe $\frac{c^{m+n}}{(m+n)!}$, $\frac{c^m}{m!}$ und $\frac{c^n}{n!}$ substituiren, und zusehen, ob sie diese Gleichung 8.) identisch machen für jeden der Werthe von m und n. — Und in der That sieht man, daß dieser Gleichung 8.) durch die in 10.) für P_0, P_2, P_3, P_4, rc. rc. gefundenen Werthe vollständig ein Genüge geschieht, wenn auch der Koeffizient P_1 oder c ganz willkührlich genommen wird.

Die gesuchte und gefundene Reihe F_x ist daher die nachstehende, nämlich

$$11) \qquad F_x = S\left[\frac{c^a}{a!} \cdot x^a\right]$$

d. h.

$$F_x = 1 + c \cdot x + \frac{c^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{c^3}{3!} \cdot x^3 + \frac{c^4}{4!} \cdot x^4 + \text{ in inf.},$$

wo c ganz willkührlich gedacht ist, wo also für c noch jeder beliebige (von x unabhängige) Ausdruck gesetzt werden kann.

§. 139.

Es giebt also beliebig viele solche im §. 138. gesuchte Reihen, die alle durch

$$S\left[\frac{c^a}{a!} \cdot x^a\right]$$

ausgedrückt sind und von denen jede (für jeden beliebigen Werth von c) die verlangte Eigenschaft hat. Wird daher diese Reihe statt, wie oben, durch F_x, bezeichnender noch durch $F_{c.x}$ vorgestellt, so drückt sich die Eigenschaft dieser unendlichen Reihen auch so aus, nämlich:

I. $F_{c\cdot x}\cdot F_{c\cdot y} = F_{c\cdot(x+y)}$

d. h. $S\left[\frac{c^a\cdot x^a}{a!}\right]\cdot S\left[\frac{c^a\cdot y^a}{a!}\right] = S\left[\frac{c^a\cdot(x+y)^a}{a!}\right].$

Daraus folgt aber sogleich noch

II. $F_{c\cdot x}:F_{c\cdot y} = F_{c\cdot(x-y)}$

d. h. $S\left[\frac{c^a\cdot x^a}{a!}\right]:S\left[\frac{c^a\cdot y^a}{a!}\right] = S\left[\frac{c^a\cdot(x-y)^a}{a!}\right];$

weil, wenn man links und rechts mit $F_{c\cdot y}$ multiplizirt und rechts dann die I. anwendet, sogleich links und rechts ein und dasselbe Resultat sich ergiebt.

Ferner folgt auch noch aus der I., wenn man nach und nach x, $2x$, $3x$, ... $(n-1)x$ statt y setzt, dann die entstehenden Gleichungen mit einander multiplizirt, zuletzt aber links und rechts durch die gemeinschaftlichen Faktoren dividirt:

III. $(F_{c\cdot x})^n = F_{c\cdot nx}$

d. h. $\left(S\left[\frac{c^a\cdot x^a}{a!}\right]\right)^n = S\left[\frac{c^a\cdot(nx)^a}{a!}\right],$

welche Formel III. auch noch gilt, wenn n negativ ganz sein sollte, also wenn n eine beliebige Differenz ganzer Zahlen vorstellt.

Denn es ist für $n=-m$,

$$(F_{c\cdot x})^n = (F_{c\cdot x})^{-m} = 1:(F_{c\cdot x})^m = 1:F_{c\cdot mx},$$

eben weil m positiv ganz, und die III. für diesen Fall bereits bewiesen ist. Setzt man nun in II. sowohl 0 statt x, also mx statt y, und bedenkt man dabei, daß die unendliche Reihe $F_{c\cdot x}$ für $x=0$ in ihr allererstes Glied 1 übergeht, so erhält man wiederum

$$1:F_{c\cdot mx} = F_{c\cdot(-mx)} = F_{c\cdot nx},$$

wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Aus der III. folgt aber wieder, wenn 1 statt x, und dann x statt n gesetzt wird, daß

IV. $(F_{c\cdot 1})^x = F_{c\cdot x}$ oder $F_{c\cdot x} = (F_{c\cdot 1})^x$

sein muß, so oft x eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt, also positiv oder negativ ganz, 0 oder 1 ist.

Dieser wichtige Satz kann auch so geschrieben werden, nämlich

$$\text{V.}\quad S\left[\frac{c^a \cdot x^a}{a!}\right] = \left(S\left[\frac{c^a}{a!}\right]\right)^x,$$

wenn nur x eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt; d. h. wenn

$$1)\quad S\left[\frac{c^a}{a!}\right] = a$$

gesetzt wird, so ist

$$2)\quad S\left[\frac{c^a x^a}{a!}\right] = a^x,$$

so oft x eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt. — Wir erblicken also die (Differenz-)Potenz a^x in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umgeformt, deren Fortschreitungs-Gesetz besser in die Augen fällt, als wir es nach der Anmerkung 3. zu §. 137. hoffen durften.

Anmerkung. Schreibt man statt der vollständigen Reihen (in 1. und 2.) lieber blos einige wenige ihrer ersten Glieder, die übrigen sich noch hinzudenkend, so sieht der Satz so aus:

Jeder Werth von c, für welchen

$$\text{I.}\quad 1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \frac{c^4}{4!} + \cdots \quad = a$$

wird, macht, daß

$$\text{II.}\quad 1 + \frac{c \cdot x}{1} + \frac{c^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{c^3 \cdot x^3}{3!} + \cdots = a^x$$

wird, so oft nur die Potenz a^x eine Differenz-Potenz ist, also früher eine Bedeutung erhalten hat.

Dabei ist nicht zu übersehen, daß, weil für ein gegebenes a, die Gleichung 1.) zur Bestimmung von c, die Form einer höhern Gleichung vom unendlichen Grade hat, solche vielleicht unendlich viele Werthe von c liefern. Die Reihe II. muß daher

für jeden dieser Werthe von c, einen und denselben Werth a^x annehmen, wenn nur x eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt.

Dies wird sich in der Folge bestätigen.

§. 140.

Die Reihe $F_{c\cdot x}$ oder $S\left[\frac{c^a}{a!}\cdot x^a\right]$ d. h. $S\left[\frac{(c\cdot x)^a}{a!}\right]$ ist für jeden reellen Werth von c·x konvergent (nach §. 128. Nr. 4.). — Dieselbe zerlegt sich für jeden imaginären Werth von c·x, der die Form q·i hat, sogleich in die Summe

$$S\left[(-1)^a\cdot\frac{q^{2a}}{(2a)!}\right]+i\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{q^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

in welcher jede Reihe für sich für jeden reellen Werth von q, konvergent ist (ebenfalls nach §. 128. Nr. 4.).

Denn setzt man in $S\left[\frac{(q\cdot i)^a}{a!}\right]$ statt a zuerst 2a, dann 2a+1 statt a, so erhält man (nach §. 47.) und weil $i^{2a}=(i^2)^a=(-1)^a$, dagegen $i^{2a+1}=i\cdot i^{2a}=i\cdot(-1)^a$ ist, sogleich die vorstehende Summe.

Und weil endlich (nach §. 139. I.)

$$S\left[\frac{(p+q\cdot i)^a}{a!}\right]=S\left[\frac{p^a}{a!}\right]\cdot S\left[\frac{(q\cdot i)^a}{a!}\right]$$

ist, und die beiden Reihen zur Rechten bezüglich für jeden reellen Werth von p und von q konvergent sind, — das Produkt zur Rechten also allemal einen bestimmten (reellen oder) imaginären Werth hat, für jeden Werth von p+q·i, — so kann man dasselbe Produkt zur Rechten als den Werth der unendlichen Reihe zur Linken ansehen für jeden reellen oder imaginären Werth von p+q·i.

Die unendliche Reihe $F_{c\cdot x}$ oder $S\left[\frac{c^a}{a!}\cdot x^a\right]$ hat also für jeden Werth von c von der Form $\alpha+\beta\cdot i$, und für jeden Werth von x von der Form $\gamma+\delta\cdot i$, welche beide beliebig reell

oder imaginär sein mögen, eben weil dann cx die Form $p+q\cdot i$ hat, stets einen bestimmten reellen oder imaginären Werth.

§. 141.

Bezeichnet man im §. 139. V. Nr. 1., den Ziffernwerth von a, der sich für $c=1$ ergiebt, ein für allemal durch den Buchstaben e, so daß

$$\text{I.} \qquad e = S\left[\frac{1}{a!}\right]$$

$$\text{d. h.} \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \text{ in inf.*)}$$

---

*) In Dezimalstellen berechnet, wird diese numerische Zahl

$$e = 2,718281828459\ldots;$$

und die Berechnung wird durch den Umstand sehr begünstigt, daß $\frac{1}{(n-1)!}:n = \frac{1}{n!}$ wird, so daß jedes Glied der Reihe aus dem vorhergehenden durch bloße Division abgeleitet wird. Die Rechnung sieht dann so aus:

	e =	1
das vorhergehende Glied dividirt		+1
durch	2 ...	+0,5
—	3 ...	+0,16666666666666
—	4 ...	+0,04166666666666
—	5 ...	+0,00833333333333
—	6 ...	+0,00138888888888
—	7 ...	+0,00019841269841
—	8 ...	+0,00002480158730
—	9 ...	+0,00000275573192
—	10 ...	+0,00000027557319
—	11 ...	+0,00000002505210
—	12 ...	+0,00000000208767
—	13 ...	+0,00000000016059
—	14 ...	+0,00000000001147
—	15 ...	+0,00000000000076
—	16 ...	+0,00000000000004,

oder wenn man addirt, und die folgenden Glieder, da sie in den ersten 14 Dezimalen 0 geben, wegläßt:

wird, so hat man (aus §. 139. V. Nr. 2.)

$$\text{II.} \qquad e^x = S\left[\frac{x^a}{a!}\right],$$

d. h.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.},$$

wenn nur x eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 oder 1, d. h. wenn e^x eine Differenz-Potenz ist.

$$e = 2{,}718281828 45898,$$

wo die ersten 11 Dezimalstellen genau sind.

Diese Umformung ist übrigens nicht geeignet, die Zahl e so vollständig erkennen zu lassen, als dies oben im Texte der Fall ist, da der Dezimalbruch vollständig gedacht, auch nichts weiter als eine unendliche Reihe ist, deren weiteren Glieder aber bis in's Unendliche, unbekannt bleiben.

Achtes Kapitel.

Von den natürlichen Potenzen und den daraus hervorgehenden (trigonometrischen) Funktionen. — Von den natürlichen Logarithmen.

Erste Abtheilung.

Von den natürlichen Potenzen.

§. 142. Erklärung.

Die unendliche Reihe

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right] \quad \text{d. h.} \quad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+ \text{ in inf.},$$

also die im §. 139. durch $F_{c,x}$ bezeichnete Reihe, wenn in solcher $c=1$ gesetzt wird, — dieselbe Reihe, welche (nach §. 141.) der Differenz Potenz e^x (d. h. dem Produkt $e \cdot e \cdot e \cdots$ von x Faktoren, wenn x positiv ganz gedacht wird, oder dem Quotienten $\frac{1}{e \cdot e \cdot e \cdots}$, wenn x negativ ganz sein sollte) gleich ist, — diese unendliche Reihe also, bezeichnen wir in der Folge stets durch das Zeichen

$$e^x,$$

wenn auch x ganz allgemein gedacht wird (als ein bloßer Träger der Operationszeichen), so daß sowohl jede reelle als auch jede imaginäre Zahl darunter verstanden werden kann, während $e = S\left[\frac{1}{a!}\right]$, also eine völlig bestimmte positive (jedoch irrationale) Zahl vorstellt.

Dieses so allgemein aufgefaßte Zeichen e^x nennen wir eine natürliche Potenz, und wir wissen, daß diese natürliche Potenz, der Differenz-Potenz e^x, welche im 1ten Theile d. W. definirt worden ist, allemal gleich ist, so oft statt x in die erstere, d. h. in die unendliche Reihe $S\left[\frac{x^a}{a!}\right]$, irgend eine Differenz ganzer Zahlen gesetzt wird.

§. 143.

Als Definition der „natürlichen Potenz" e^x haben wir also die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad e^x = S\left[\frac{x^a}{a!}\right]$$

d. h.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \text{ in inf.},$$

in welcher x ganz allgemein gedacht ist.

Weil aber e^x nichts anders als die unendliche, im §. 139. durch $F_{c\cdot x}$ bezeichnete Reihe ist, für $c = 1$ genommen, so nehmen die Sätze des §. 139., wenn man $c = 1$ setzt, sogleich die nachstehende Form an, nämlich

$$\text{I.} \qquad e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$\text{II.} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$\text{III.} \qquad (e^x)^n = e^{nx},$$

wenn nur n eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt, so daß $(e^x)^n$ eine Differenz-Potenz ist und deshalb eine Bedeutung hat; während gleichzeitig noch bekannt ist

$$\text{IV.} \qquad e^0 = 1$$

und (aus II. für $x = 0$)

$$\text{V.} \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

hervorgeht.

Diese fünf Gesetze, welche schon im I. Th. d. W. für die Differenz-Potenzen erwiesen worden sind, gelten also jetzt auch noch für die viel allgemeineren natürlichen Potenzen, deren Dignand e aber eine völlig bestimmte absolute Zahl ist.

§. 144.

Außer diesen allgemeinen Gesetzen ist nun noch Folgendes zu beachten:

1) Da e^x eine unendliche Reihe vorstellt, welche (nach §. 140.) für alle reellen und imaginären Werthe von x, von der Form $\alpha+\beta\cdot i$ konvergent ist, so hat e^x für jeden reellen oder imaginären Werth von x, von der Form $\alpha+\beta\cdot i$ stets einen bestimmten reellen oder imaginären Werth von derselben Form und natürlich nur einen einzigen. Dieser wird auf folgende Weise „ausgerechnet":

Es ist

$$e^{\alpha+\beta\cdot i} = e^{\alpha}\cdot e^{\beta\cdot i};$$

und

$$e^{\beta\cdot i} = S\left[\frac{(\beta\cdot i)^{a}}{a!}\right]$$

oder, wenn man $2a$ und noch $2a+1$ statt a setzt, d. h. wenn man alle geraden und alle ungeraden Glieder dieser Reihe für sich zusammennimmt, und wenn man dabei berücksichtigt, daß

$$i^{2a} = (i^2)^a = (-1)^a \quad \text{und} \quad i^{2a+1} = i\cdot i^{2a} = i\cdot(-1)^a \quad \text{ist},$$

$$e^{\beta\cdot i} = S\left[(-1)^a\cdot\frac{\beta^{2a}}{(2a)!}\right] + i\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{\beta^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

welche beide unendlichen Reihen für jeden reellen Werth von β, konvergent sind, also mit e^{α} zugleich reelle Werthe haben. Dadurch ist aber $e^{\alpha+\beta\cdot i}$ auf die Form $p+q\cdot i$ gebracht, d. h. „ausgerechnet."

2) Die Werthe von e^x gehen mit den stetig sich ändernden reellen Werthen von x, stetig fort; d. h. man kann immer zwei Werthe von x, nämlich $x+h$ und x so nahe an einander (d. h.

h so klein) sich denken, daß die zugehörigen Werthe von e^x, nämlich e^{x+h} und e^x um weniger von einander verschieden sind, als jede noch so klein gedachte (gebrochene) Zahl D.

Denn es ist

$$e^{x+h} = e^x \cdot e^h = e^x\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+ \text{ in inf.}\right),$$

also $$e^{x+h}-e^x = e^x\cdot\left(h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+ \text{ in inf.}\right);$$

und nun folgt der übrige Theil des Beweises unmittelbar aus §. 132.

3) Denkt man sich dem Exponenten x nach und nach alle stetig neben einander liegenden reellen Werthe von $-\infty$ an, durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin gegeben, so sind doch die zugehörigen Werthe von e^x stets positiv; sie fangen mit $\frac{1}{\infty}$ (d. h. mit dem Unendlich-Kleinen) an, gehen nach und nach durch alle ächt gebrochenen Zahlen hindurch, stets wachsend bis zu 1 (weil $e^0 = 1$) und wachsen dann von 1 ab ebenfalls ohne Unterbrechung bis zu $+\infty$ hin.

Für die positiven Werthe von x fällt das Behauptete sogleich in die Augen. — Für jeden negativen Werth $-z$ von x ist aber

$$e^x = e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

und dadurch ist auch der erstere Theil der Behauptung außer Zweifel gestellt.

4) Daraus folgt aber wieder:

1. 1.) Zu jedem positiv gegebenen Werth a von e^x, existirt allemal ein einziger reeller Werth von x, und dieser ist negativ, Null oder positiv, je nachdem $a<1$, $=1$ oder >1 gegeben sein sollte.

2. 2.) Zu jedem negativ gegebenen Werth $-b$ von e^x, gibt es nie einen reellen zugehörigen Werth des Exponenten x. Giebt es also einen Werth von x, welcher $e^x = -b$ macht, so ist solcher nothwendig imaginär.

3. 3.) Dasselbe gilt, wenn $e^x = p + q \cdot i$ und imaginär (also q nicht Null) gegeben sein sollte.

5) Wir sind in vorstehender Nr. 1. bei der Auswerthung von $e^{\alpha + \beta \cdot i}$ auf die beiden unendlichen Reihen

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{\beta^{2a}}{(2a)!}\right] \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{\beta^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

gestoßen. — Diese zwei unendlichen Reihen erregen daher unsere Aufmerksamkeit und müssen nun einer besonderen Untersuchung unterzogen werden. — Dies soll in der nächsten Abtheilung dieses Kapitels geschehen.

Anmerkung. Wir können jedoch diese Abtheilung nicht schließen, ohne noch darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn z einen beliebigen reellen endlichen Werth hat, dann

$$\text{I.} \quad \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^z \quad \text{ist für} \quad m = +\infty;$$

d. h. daß der Werth von $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ dem Werthe von e^z sich desto mehr nähert, je größer m genommen wird, und daß beide Werthe um unendlich wenig (d. h. immer weniger noch als jede noch so klein gedachte, aber bestimmte Zahl angiebt) von einander verschieden sind, wenn m unendlich groß (d. h. immer größer noch als jede noch so groß gedachte, aber bestimmte Zahl) genommen wird.

Denn es ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$1) \quad \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = S\left[\frac{m^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{z^b}{m^b}\right] = S\left[\frac{m^{b|-1}}{m^b} \cdot \frac{z^b}{b!}\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{m^{b|-1}}{m^b} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\cdots}{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m}$$

$$= 1 \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{m}\right) \cdot \left(1-\frac{3}{m}\right) \cdot \left(1-\frac{4}{m}\right) \cdots \left(1-\frac{b-1}{m}\right),$$

während die subtrahirten Brüche $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, $\frac{4}{m}$, ... $\frac{b-1}{m}$ wenn $m = \infty$ genommen und b noch nicht unendlich groß gedacht ist, unendlich klein werden, so daß $\frac{m^{b|-1}}{m^b}$ der Einheit desto näher rückt, je größer m genommen wird. Die Reihe in 1.) zur Rechten geht also in $S\left[\frac{z^b}{b!}\right]$ d. h. in e^z über, wenigstens in allen ersten Gliedern, wo b noch nicht unendlich groß geworden ist. Wird aber nachher b selbst immer größer und größer genommen, also zuletzt auch unendlich groß, so ist nicht mehr $\frac{m^{b|-1}}{m^b} = 1$ zu nehmen; aber dann sind auch die Glieder

$$\frac{m^{b|-1}}{m^b} \cdot \frac{z^b}{b!} \quad \text{und} \quad \frac{z^b}{b!}$$

in den Entwickelungen von

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \quad \text{und} \quad e^z$$

bereits unendlich klein und haben auf die Nicht-Uebereinstimmung der beiden letzteren Werthe keinen Einfluß mehr, wenn nur $m = \infty$ gedacht wird.

Und da dies gilt, es mag z positiv oder negativ gedacht werden, so kann man die Gleichung I. auch in der nachstehenden Form schreiben, nämlich:

$$\text{II.} \quad \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m = e^{-z} \quad \text{für} \quad m = +\infty.$$

Zweite Abtheilung.

Von den allgemeinen Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten.

§. 145.

Von den beiden unendlichen Reihen, in welche sich die Potenz-Reihe

$$e^{x \cdot i} \quad \text{d. h.} \quad 1+\frac{x \cdot i}{1}+\frac{(x \cdot i)^2}{2!}+\frac{(x \cdot i)^3}{3!}+ \text{ in inf.}$$

zerlegt, wenn man zuerst alle geraden Potenzen von x zusammenfaßt, dann alle ungeraden, bei letzterem Resultat aber den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor i herausrückt; — wollen wir, um sie bequemer untersuchen zu können, die erstere durch *Cos* x, die andere durch *Sin* x bezeichnen, und diese Zeichen bezüglich durch „Kosinus von x" und „Sinus von x" aussprechen.

Diese Definitionen sind also ausgedrückt in den Gleichungen

$$\text{I.} \qquad Sin\, x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

$$\text{oder} \qquad Sin\, x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+ \text{ in inf.}$$

$$\text{II.} \qquad Cos\, x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

$$\text{oder} \qquad Cos\, x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+ \text{ in inf.}^{*)}$$

---

*) In der Anwendung der Analysis und in's Besondere der Integral-Rechnung auf die Kurven-Lehre, wird das Problem gelöst wie die Länge einer krummen Linie in gerade Linien ausgedrückt wird, welche die Endpunkte des (krummlinigen) Bogens bestimmen (das sogenannte Problem der Rektifikation der Kurven.) Dort geht dann hervor, daß wenn x ein Bogen ist eines Kreises, dessen Radius $=1$, — dann der Werth der unendlichen Reihe *Sin* x, allemal die halbe Sehne des doppelten Kreisbogens ausdrückt, während der Werth der unendlichen Reihe *Cos* x, allemal den Abstand dieser Sehne vom Mittelpunkt liefert. Jene Linien im Kreise, dessen Radius $=1$

Daß aber die Potenz-Reihe $e^{x \cdot i}$ sich in diese letztern beiden Reihen zerlegt, und wie, drückt diese Gleichung aus:

III. $e^{x \cdot i} = Cos\,x + i \cdot Sin\,x$,

welche, wenn man $-i$ statt i setzt, (was allemal erlaubt ist, da i jede einzelne der beiden Formen $\pm\sqrt{-1}$ vorstellen kann) auch noch übergeht in

IV. $e^{-x \cdot i} = Cos\,x - i \cdot Sin\,x$,

so daß man (aus III. und IV.) die Sinus- und Kosinusreihen auch wieder in zwei Potenzreihen ausdrücken kann, nämlich

V. $Sin\,x = \frac{e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i}}{2i}$ und VI. $Cos\,x = \frac{e^{x \cdot i} + e^{-x \cdot i}}{2}$.

§. 146.

Weil sich die Kosinus-Reihe nicht ändert, wenn man $-x$ statt x setzt (in so ferne $(-x)^{2a} = x^{2a}$ ist) und durch dieselbe Substitution jedes Glied der Sinus-Reihe in dasselbe, mit entgegengesetztem Vorzeichen, übergeht. (Da man $(-x)^{2a+1} = -x^{2a+1}$ hat), so folgen sogleich die Wahrheiten

I. $Sin(-x) = -Sin\,x$ und II. $Cos(-x) = Cos\,x$.

Und da für $x = 0$, alle Glieder unserer Reihen $= 0$ werden, bis auf das allererste, welches $= 1$ ist, so hat man noch

1) $Sin\,0 = 0$ und 2) $Cos\,0 = 1$.

---

ist, wachsen und nehmen stetig ab mit den stetig wachsenden Bogen und bilden also in ihrer Totalität gleichsam ein herausgeschnittenes kleines Stück der allgemeinen unendlichen Reihen, die wir hier unter dem Namen der „Sinus und Kosinus von x" betrachten wollen, und enthalten die Werthe der letzteren nicht, welche solche für negative oder imaginäre Werthe von x annehmen, ja auch diejenigen kaum, welche sie für solche positive Werthe von x annehmen, die größer als die Länge der ganzen Kreislinie sind, obgleich sich das letztere noch nachhilfsweise als möglich denken läßt.

Hier aber sind $Sin\,x$ und $Cos\,x$ bloße Buchstaben-Ausdrücke, in denen x ganz allgemein (als ein bloßer Träger der Operationszeichen) gedacht wird, also negative, imaginäre und positive Werthe haben kann.

§. 147.

Will man allgemeine Eigenschaften der Sinus- und Kosinus-Reihen haben, so muß man sie von denen der Potenz-Reihen herholen, aus denen die Sinus und Kosinus hervorgegangen sind.

Geht man z. B. von der Wahrheit aus, daß

$$e^{(x+z)\cdot i} = e^{x\cdot i} \cdot e^{z\cdot i}$$

ist, und setzt man hier herein statt der Potenzen, die denselben gleichen Ausdrücke (aus §. 145. III.), so geht dieselbe Gleichung augenblicklich über in diese:

$$Cos(x+z)+i\cdot Sin(x+z)$$
$$= (Cos\,x\cdot Cos\,z - Sin\,x\cdot Sin\,z)+i\cdot(Sin\,x\cdot Cos\,z + Cos\,x\cdot Sin\,z),$$

aus welcher, wenn man $-i$ statt i schreibt, sogleich noch hervorgeht,

$$Cos(x+z)-i\cdot Sin(x+z)$$
$$= (Cos\,x\cdot Cos\,z - Sin\,x\cdot Sin\,z)-i\cdot(Sin\,x\cdot Cos\,z + Cos\,x\cdot Sin\,z) \;{}^{*)}.$$

Subtrahirt und addirt man diese letztern beiden Gleichungen von und zu einander und dividirt man die Resultate noch bezüglich durch 2i und durch 2, so gehen die nachstehenden eben so einfachen als höchst wichtigen allgemeinen Eigenschaften der Sinus- und Kosinus-Reihen hervor, nämlich

I. $Sin(x+z) = Sin\,x\cdot Cos\,z + Cos\,x\cdot Sin\,z$

II. $Cos(x+z) = Cos\,x\cdot Cos\,z - Sin\,x\cdot Sin\,z$,

aus welchen, wenn man $-z$ statt z setzt und wenn die Gleichungen §. 146. I. und II. angewandt werden, sogleich noch die nachstehenden sich ergeben, nämlich:

III. $Sin(x-z) = Sin\,x\cdot Cos\,z - Cos\,x\cdot Sin\,z$

IV. $Cos(x-z) = Cos\,x\cdot Cos\,z + Sin\,x\cdot Sin\,z$,

---

*) Diese letztere Gleichung ergiebt sich auch direkt aus $e^{-(x+z)\cdot i} = e^{-x\cdot i}\cdot e^{-z\cdot i}$ und aus §. 145. IV. ganz so, wie die voranstehende.

welche beiden letzteren, auch direkt und unabhängig von den ersteren gefunden werden können, wenn man von den Gleichungen

$$e^{(x-z)\cdot i} = e^{x\cdot i}\cdot e^{-z\cdot i} \quad \text{und} \quad e^{-(x-z)\cdot i} = e^{-x\cdot i}\cdot e^{z\cdot i}$$

ausgehen will.

Die IV. giebt noch für $z = x$ und weil (nach §. 146. Nr. 2.) $Cos\,0 = 1$ ist, die nachstehende:

V. $(Sin\,x)^2 + (Cos\,x)^2 = 1$,

welche Gleichung natürlich auch direkt aus dem Potenzen-Gesetz

$$e^{x\cdot i}\cdot e^{-x\cdot i} = e^0 = 1 \text{ *)}$$

hervorgeht, also auch erhalten werden muß, wenn man die Gleichungen §. 145. III. und IV. mit einander multiplizirt.

§. 148.

Diese bis jetzt in den §§. 145.—147. aufgestellten Wahrheiten bilden die Grundlagen der gesammten sogenannten analytischen Trigonometrie, in so ferne die Sinus- und Kosinus-Reihen, also das, was wir hier unter $Sin\,x$ und $Cos\,x$ verstehen, auch trigonometrische Funktionen genannt werden, wegen der Anwendung, welche dieselben später in dem Theile der Geometrie finden, den man theils „ebene", theils „sphärische" Trigonometrie zu nennen pflegt.

Will man z. B. Formeln haben, durch welche es möglich

---

*) Diese Gleichung lehrt weiter nichts als daß, wenn man die Sinusreihe und die Kosinusreihe, jede mit sich multiplizirt und die Quadrate, welche wieder unendliche Reihen sind, addirt, — dann in der neuen unendlichen Reihe, die mit 1 beginnt, alle übrigen Glieder Null zum Koeffizienten bekommen und daher wegfallen, so daß bloß 1 übrig bleibt, obgleich x ganz allgemein (als ein bloßer Träger der Operationszeichen) gedacht ist.

Natürlich gilt aber nun dieselbe Gleichung auch für jeden besonderen Werth von x (für welchen dann die Reihen $Sin\,x$ und $Cos\,x$ besondere Werthe annehmen) noch, so daß also die Summe der Quadrate dieser letzterwähnten besonderen Werthe von $Sin\,x$ und $Cos\,x$, ebenfalls jedesmal $= 1$ sein muß.

wird, Summen und Differenzen zweier Sinus oder zweier Kosinus (-Reihen) in Produkte von Sinus, Kosinus oder Sinus und Kosinus (-Reihen) umzuformen, so begreift man sogleich, daß dazu nichts weiter nöthig ist, als die Gleichungen I. und III., oder II. und IV. des §. 147. zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren. Dies giebt:

I. $Sin(x+z)+Sin(x-z) = 2Sin\,x \cdot Cos\,z$;

II. $Sin(x+z)-Sin(x-z) = 2Cos\,x \cdot Sin\,z$;

III. $Cos(x-z)+Cos(x+z) = 2Cos\,x \cdot Cos\,z$;

IV. $Cos(x-z)-Cos(x+z) = 2Sin\,x \cdot Sin\,z$.

Weil aber in den Anwendungen bestimmte Sinus und Kosinus gegeben sein werden, deren Summe oder Differenz umgeformt werden soll, z. B. $Sin\,a \pm Sin\,b$ und $Cos\,a \pm Cos\,b$, so muß man sich noch fragen, was unter x und z gedacht werden müsse, damit in I. und II.

$$x+z = a \quad \text{und} \quad x-z = b$$

werde, in III. und IV. aber

$$x-z = a \quad \text{und} \quad x+z = b.$$

Die algebraische Auflösung der erstern beiden Gleichungen giebt

$$x = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{a-b}{2};$$

die der andern beiden dagegen

$$x = \frac{b+a}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{b-a}{2}.$$

Dadurch aber gehen die vorstehenden Gleichungen I.—IV. über in folgende:

V. $Sin\,a+Sin\,b = 2Sin\frac{a+b}{2} \cdot Cos\frac{a-b}{2}$;

VI. $Sin\,a-Sin\,b = 2Cos\frac{a+b}{2} \cdot Sin\frac{a-b}{2}$;

VII. $Cos\,a + Cos\,b = 2 Cos\frac{b+a}{2} \cdot Cos\frac{b-a}{2}$;

VIII. $Cos\,a - Cos\,b = 2 Sin\frac{b+a}{2} \cdot Sin\frac{b-a}{2}$.

Die Gleichungen I.—IV. sind bequem, wenn ein Produkt zweier Sinus und Kosinus (-Reihen), nämlich $Sin\,x \cdot Cos\,z$, oder $Cos\,x \cdot Cos\,z$, oder $Sin\,x \cdot Sin\,z$, in eine Summe oder Differenz zweier anderen umgeformt werden soll, wo man sie dann nur noch durch 2 dividirt denken darf.

Und da $Cos\,0 = 1$ ist, so kann man die VII. und VIII. auch verwenden um $1 \pm Cos\,b$ in ein Produkt zu verwandeln; sie geben nämlich, wenn $a = 0$ und $b = x$ gesetzt wird,

IX. $1 + Cos\,x = 2(Cos\frac{1}{2}x)^2$;

X. $1 - Cos\,x = 2(Sin\frac{1}{2}x)^2$,

welche letzteren Gleichungen auch wieder dazu benutzt werden können, um *Sin* und *Cos* von der Hälfte von x, in den Kosinus des ganzen x, auszudrücken; sie geben nämlich sogleich:

XI. $Sin\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - Cos\,x}{2}}$;

XII. $Cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 + Cos\,x}{2}}$.

Will man den Sinus oder Kosinus vom doppelten x, in Sinus oder Kosinus des einfachen x umformen, so darf man nur in §. 147. I. und II., x statt z setzen; dies giebt sogleich

XIII. $Sin\,2x = 2 Sin\,x \cdot Cos\,x$;

XIV. $Cos\,2x = (Cos\,x)^2 - (Sin\,x)^2$
$= 2(Cos\,x)^2 - 1$
$= 1 - 2(Sin\,x)^2$,

wenn man (nach §. 147. V.) entweder $1-(Cos\,x)^2$ statt $(Sin\,x)^2$, oder $1-(Sin\,x)^2$ statt $(Cos\,x)^2$ schreibt. *)

---

*) Verbindet man mit der Gleichung

$Cos\,2x = (Cos\,x)^2 - (Sin\,x)^2$

§. 149.

Man kann nun auch sehr zusammengesetzte Gleichungen zwischen Sinus und Kosinus erhalten. — Setzt man z. B. in den Formeln I. und II. des §. 147. nach und nach z, 2z, 3z, 4z ⋯ (n—1)z statt x, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus denen man dann, — wenn man nach und nach *Sin*2z, *Cos*2z, *Sin*3z, *Cos*3z, ꝛc. ꝛc. zuletzt noch *Sin*(n—1)z, *Cos*(n—1)z eliminirt, — sowohl *Sin*(nz) als auch *Cos*(nz) in *Sin*z und *Cos*z ausgedrückt erhält.

Man kann aber auch zu ähnlichem Zwecke die Gleichungen §. 148. I.—IV.) verwenden, indem man die Glieder *Sin*(x—z), *Cos*(x—z) vorher auf die andere Seite schreibt, so daß sie diese Form annehmen:

I. $Sin(x+z) = 2Sin\,x \cdot Cos\,z - Sin(x-z)$;

II. $Sin(x+z) = 2Cos\,x \cdot Sin\,z + Sin(x-z)$;

III. $Cos(x+z) = 2Cos\,x \cdot Cos\,z - Cos(x-z)$;

IV. $Cos(x+z) = -2Sin\,x \cdot Sin\,z + Cos(x-z)$. *)

---

diese andere

$$1 = (Cos\,x)^2 + (Sin\,x)^2$$

so erhält man durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen wiederum die IX. und X., und zwar auch in derselben Form, sobald man noch $\frac{1}{2}x$ statt x setzt.

Die XIV. in ihren zwei letztern Formen giebt dagegen wieder *Sin*x und *Cos*x in *Cos*2x ausgedrückt, also die XI. und XII., sobald man noch $\frac{1}{2}x$ statt x setzt.

*) In dieser Form konnten die Gleichungen dazu dienen, die Sinus und Kosinus von, um z größerer Zahlen als x, auszudrücken in Sinus und Kosinus von, um z kleinerer Zahlen als x, so wie in Sinus und Kosinus der Zahl x selbst. — Solches könnte z. B. bei Berechnung von Tabellen für die Werthe von *Sin*x und *Cos*x, für eine Reihe auf einander folgender Werthe von x wünschenswerth erscheinen, wenn man nicht schneller zum Ziele führende Mittel (auf dem Wege der höheren Analysis erzielt) dazu aufgefunden hätte, (S. die „endliche Differenzrechnung" im 8ten Th. d. W.).

Setzt man in I. und III. wieder $(n-1)z$ statt x, damit $x+z$ in nz übergeht, so nehmen diese Gleichungen I. und III. die nachstehende Form an, nämlich:

V. $\quad Sin\,nz = 2Sin(n-1)z\cdot Cos\,z - Sin(n-2)z$

VI. $\quad Cos\,nz = 2Cos(n-1)z\cdot Cos\,z - Cos(n-2)z.$

Wollte man hier wieder nach und nach 2, 3, 4, 5, ... $n-1$ und n statt n setzen, und die Sinus und Kosinus der zwischenliegenden Vielfachen von z, eliminiren, so würde man abermals $Sin\,nz$ und $Cos\,nz$ in $Sin\,z$ und $Cos\,z$ ausgedrückt erhalten.

Und da statt $(Cos\,z)^2$ allemal gesetzt werden kann $1-(Sin\,z)^2$, und eben so statt $(Sin\,z)^2$ gesetzt werden kann $1-(Cos\,z)^2$, so werden sich die Resultate noch auf das mannichfaltigste abändern und unter andern namentlich auch so einrichten lassen, daß entweder lauter $Cos\,z$, oder lauter $Sin\,z$ erscheinen.

Führt man dies letztere durch, so erscheint im erstern Fall $\sqrt{1-(Cos\,z)^2}$ als gemeinschaftlicher Faktor des Resultats, wofür man $Sin\,z$ schreiben oder gleich $Sin\,z$ stehen lassen kann, während im andern Falle Stellenweise $\sqrt{1-(Sin\,z)^2}$ als gemeinschaftlicher Faktor erscheint, wofür man wieder $Cos\,z$ schreiben, oder anfänglich gleich stehen lassen kann.

Die Resultate selbst sind die folgenden:

A. Aus V.

1) $Sin\,y = Sin\,y$,

2) $Sin\,2y = 2Sin\,y\cdot Cos\,y$,

3) $Sin\,3y = [4Cos\,y^2-1]\cdot Sin\,y$,

4) $Sin\,4y = [8Cos\,y^3-4Cos\,y]\cdot Sin\,y$,

5) $Sin\,5y = [16Cos\,y^4-12Cos\,y^2+1]\cdot Sin\,y$,

u. s. w. f.

B. Aus VI.

1) $Cos\,y = Cos\,y$,

2) $Cos\,2y = 2Cos\,y^2-1$,

3) $Cos\,3y = 4Cos\,y^3 - 3Cos\,y$,

4) $Cos\,4y = 8Cos\,y^4 - 8Cos\,y^2 + 1$,

5) $Cos\,5y = 16Cos\,y^5 - 20Cos\,y^3 + 5Cos\,y$,

u. s. w. f.

Und setzt man in den vorstehenden Resultaten durchaus $1 - Sin\,y^2$ statt $Cos\,y^2$, so ergiebt sich noch:

C. Aus A.:

1) $Sin\;y = Sin\,y$,

2) $Sin\,2y = 2Sin\,y \cdot Cos\,y$,

3) $Sin\,3y = 3Sin\,y - 4Sin\,y^3$,

4) $Sin\,4y = [4Sin\,y - 8Sin\,y^3] \cdot Cos\,y$,

5) $Sin\,5y = 5Sin\,y - 20Sin\,y^3 + 16Sin\,y^5$,

6) $Sin\,6y = [6Sin\,y - 32Sin\,y^3 + 32Sin\,y^5] \cdot Cos\,y$,

u. s. w. f.

D. Aus B.:

1) $Cos\;y = Cos\,y$,

2) $Cos\,2y = 1 - 2Sin\,y^2$,

3) $Cos\,3y = [1 - 4Sin\,y^2] \cdot Cos\,y$,

4) $Cos\,4y = 1 - 8Sin\,y^2 + 8Sin\,y^4$,

5) $Cos\,5y = [1 - 12Sin\,y^2 + 16Sin\,y^4] \cdot Cos\,y$,

6) $Cos\,6y = 1 - 18Sin\,y^2 + 48Sin\,y^4 - 32Sin\,y^6$,

u. s. w. f.

Anmerkung. Die vorstehenden Gleichungen A.), B.), C.), D.), befolgen offenbar auf der rechten Seite in ihren Koeffizienten ein gewisses Gesetz, so daß in allen 4 Parthien $Sin(my)$, $Cos(my)$, durch Aggregate sich darstellen lassen müssen. — Obgleich wir zur Auffindung dieses Gesetzes später erst zurückkehren werden, so mögen doch vorläufig die Resultate hier Platz finden.

Man findet nämlich folgende Gesetze:

A. Für die Formeln A.):

$$Sin(my) = Sin\,y \cdot \underset{2a+b\,=\,m-1}{S}\left[(-1)^a \cdot \frac{(m-a-1)^{a|-1}}{a!}(2Cos\,y)^{m-2a-1}\right];$$

oder, wenn man ungerade und gerade m von einander unterscheiden will,

$$Sin(my) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot Sin\,y \cdot S\left[(-1)^a \frac{(m-2a+1)^{2a|2}}{(2a)!} Cos\,y^{2a}\right],$$

wenn m ungerade, dagegen

$$Sin(my) = (-1)^{\frac{m}{2}} Sin\,y \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{(m-2a)^{2a+1|2}}{(2a+1)!} \cdot Cos\,y^{2a+1}\right]$$

im Falle m eine gerade Zahl ist.

B. Für die Formeln B.):

$$Cos(my) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{(m-a-1)^{a-1|-1}}{a!} (2Cos\,y)^{m-2a}\right]_{2a+b=m}$$

oder, wenn wiederum ungerade und gerade m von einander unterschieden werden:

$$Cos(my) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{m \cdot (m-2a+1)^{2a|2}}{(2a+1)!} Cos\,y^{2a+1}\right]$$

wenn m ungerade, dagegen

$$Cos(my) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot S\left[(-1)^a \frac{m \cdot (m-2a+2)^{2a-1|2}}{(2a)!} Cos\,y^{2a}\right]$$

im Falle m gerade ist.

C. Für die Formeln C.):

$$Sin(my) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{m(m-2a+1)^{2a|2}}{(2a+1)!} Sin\,y^{2a+1}\right]$$

wenn m ungerade, dagegen

$$Sin(my) = Cos\,y \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{m \cdot (m-2a)^{2a|2}}{(2a+1)!} Sin\,y^{2a+1}\right]$$

wenn m eine gerade Zahl ist.

D. Endlich für die Formeln D.):

$$Cos(my) = Cos\,y \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{(m-2a+1)^{2a|2}}{(2a)!} Sin\,y^{2a}\right]$$

wenn m ungerade ist, dagegen

$$Cos(my) = S\left[(-1)^{a} \cdot \frac{m\cdot(m-2a+2)^{2a-1/2}}{(2a)!} Sin\, y^{2a}\right]$$

wenn m eine gerade Zahl ist.

Sind diese Gesetze einmal (analytisch) aufgefunden, so kann man sich auch synthetisch von ihrer Richtigkeit überzeugen, d. h. solche erweisen, und zwar alle dadurch, daß man zuvor zeigt, wie sie allemal für $m = h+1$ gelten müssen, so oft sie für die beiden nächstvorhergehenden ganzen Werthe von m, nämlich für $m = h$ und für $m = h-1$ zu gleicher Zeit gelten, unter h eine bestimmte ganze Zahl gedacht. Da sie nämlich für $h = 2$ und $h = 3$ zutreffen, so müssen sie dann nothwendig auch für jede folgende ganze Zahl, die statt m gesetzt werden mag, zutreffen.

§. 150.

Weil aber alle Gesetze der Sinus und Kosinus aus den Gesetzen der Potenzen hergeholt werden können, in so ferne die Sinus und Kosinus (=Reihen) nur Theile der Potenz (=Reihe) sind, so können wir (statt uns mit ähnlichen Folgerungen wie die im voranstehenden Paragraphen beschriebenen länger zu befassen) lieber auch noch die übrigen Gesetze der Potenzen nehmen und aus ihnen neue Wahrheiten für Sinus und Kosinus ableiten.

Nehmen wir z. B. das Gesetz

$$(e^{x\cdot i})^{m} = e^{mx\cdot i},$$

in welchem jedoch m als eine Differenz ganzer Zahlen (d. h. als positiv oder negativ ganz oder als 0 oder 1) gedacht werden muß (S. §. 143. III.), so geht solches (mittelst der Formel III. des §. 145.) sogleich über in

I. $$(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^{m} = Cos\,mx + i\cdot Sin\,mx,$$

woraus noch, wenn $-i$ statt i gesetzt wird, hervorgeht:

II. $(Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m = Cos\,mx - i\cdot Sin\,mx$,

wenn nur m positiv oder negativ ganz, 0 oder 1 ist.

Addirt und subtrahirt man aber diese Gleichungen zu und von einander, so findet sich sogleich aus ihnen noch

III. $Cos(mx) = \frac{1}{2}(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^m + \frac{1}{2}(Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m$

IV. $Sin(mx) = \frac{1}{2i}(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^m - \frac{1}{2i}(Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m$,

wenn nur m positiv oder negativ ganz ist, oder Null oder 1.

Wendet man nun auf die Potenzen der beiden Binomien zur Rechten, den binomischen Lehrsatz an, so erhält man sogleich (aus III. und IV.)

V. $Cos(mx) = (Cos\,x)^m - m_2(Cos\,x)^{m-2}(Sin\,x)^2 + m_4\cdot(Cos\,x)^{m-4}(Sin\,x)^4 -$ 2c. 2c.

oder $= S[(-1)^a m_{2a}\cdot(Cos\,x)^{m-2a}(Sin\,x)^{2a}]$

VI. $Sin\,mx = m_1(Cos\,x)^{m-1}Sin\,x - m_3(Cos\,x)^{m-3}(Sin\,x)^3 + m_5\cdot(Cos\,x)^{m-5}(Sin\,x)^5 +$ 2c. 2c.

oder $= S[(-1)^a m_{2a+1}\cdot(Cos\,x)^{m-1-2a}(Sin\,x)^{2a+1}]$ *),

wo $m_1, m_2, m_3, m_4, \cdots m_{2a}, m_{2a+1}$ die Binomial-Koeffizienten vorstellen, während m eine Differenz ganzer Zahlen sein muß. — Ist aber m negativ ganz, so gehen die beiden letztern Summen in V. und VI. zur Rechten in unendliche Reihen über, welche, sobald sie numerische werden, konvergent sein müssen.

---

*) Man findet diese allgemeinen Glieder (Aggregate) sogleich, wenn man den binomischen Lehrsatz in seiner allgemeinen Form nimmt, nämlich

$$(a+b)^m = S[m_a\cdot a^{m-a}b^a],$$

dann $Cos\,x$ statt a, und $\pm i\cdot Sin\,x$ statt b setzt, hierauf aber die geraden Glieder absondert (dadurch daß man $2a$ statt a schreibt), und dann die ungeraden Glieder zusammen nimmt (dadurch daß man $2a+1$ statt a setzt), zuletzt aber sich erinnert, daß $i^{2a} = (i^2)^a = (-1)^a$ und $i^{2a+1} = i\cdot i^{2a} = i(-1)^a$ ist.

Und da man auf $(Sin\,x)^{2a} = [1-(Cos\,x)^2]^a$ und $(Cos\,x)^{2a} = [1-(Sin\,x)^2]^a$ selbst wieder den binomischen Lehrsatz zur weiteren Entwickelung anwenden kann, so erhält man auf diesem Wege die im vorhergehenden Paragraphen erwähnten Resultate noch einmal, wobei man zugleich sieht, wie sich $Sin\,x$ oder $Cos\,x$ als ein gemeinschaftlicher Faktor heraushebt, je nachdem man lauter $Cos\,x$ oder lauter $Sin\,x$ einführen und kein Quadratwurzel-Zeichen zulassen will.

§. 151.

Geht man noch von einer andern Formel der Potenzen aus, nämlich vom binomischen Lehrsatze in dieser Form

$$(e^{x\cdot i} \pm e^{-x\cdot i})^m = S[m_a \cdot (e^{x\cdot i})^{m-a} \cdot (\pm 1)^a (e^{-x\cdot i})^a]$$
$$= S[m_a \cdot e^{(m-2a)x\cdot i} \cdot (\pm 1)^a];$$

und setzt man dann statt der Potenzen $e^{x\cdot i}$, $e^{-x\cdot i}$ und $e^{(m-2a)x\cdot i}$ die, aus Kosinus und Sinus zusammengesetzten Ausdrücke, in die sich diese Potenz-Reihen (nach §. 145. III. und IV.) zerlegen lassen, — so erhält man, je nachdem man die obern der ± Zeichen nimmt, oder die untern,

VII. $(2Cos\,x)^m = S[m_a \cdot Cos\,(m-2a)x] + i \cdot S[m_a \cdot Sin\,(m-2a)x]$

und

VIII. $(2i \cdot Sin\,x)^m = S[(-1)^a \cdot m_a Cos\,(m-2a)x]$
$+ i \cdot S[(-1)^a \cdot m_a \cdot Sin\,(m-2a)x]$.

Und weil man auch $-i$ statt i schreiben kann, so erhält man aus der VII. noch eine neue Formel, welche, wenn sie zur VII. addirt, oder von der VII. subtrahirt wird, sogleich giebt:

IX. $(2Cos\,x)^m = S[m_a \cdot Cos\,(m-2a)x]$

d. h. $= Cos\,mx + m_1 \cdot Cos\,(m-2)x + m_2 \cdot Cos\,(m-4)x + m_3 \cdot Cos\,(m-6)x + \cdots$

X. $0 = S[m_a \cdot Sin\,(m-2a)x]$

d. h. $0 = Sin\,mx + m_1 \cdot Sin\,(m-2)x + m_2 \cdot Sin\,(m-4)x + m_3 \cdot Sin\,(m-6)x + \cdots$,

wenn nur überall m als eine Differenz ganzer Zahlen gedacht wird (d. h. positiv ganz, negativ ganz, Null oder 1), weil wir andere als Differenz-Potenzen, neben den natürlichen Potenzen, deren Dignand die bestimmte Zahl e ist, zur Zeit noch nicht kennen *).

Ist m eine positive ganze Zahl, so brechen die Reihen zur Rechten in IX. und X. ab, weil die Binomial-Koeffizienten m_a der Null gleich werden, so oft $a > m$ genommen wird. In der Reihe IX. zur Rechten werden dann (weil $m_{m-a} = m_a$ ist und weil

$Cos[m-2(m-a)]x = Cos[-(m-2a)x] = Cos(m-2a)x$ wird) je zwei Glieder einander gleich, welche gleich weit vom ersten und vom letzten abliegen; daher kann man sich mit der erstern Hälfte der Glieder begnügen, wenn m ungerade ist und wenn man jedes Glied doppelt nimmt, oder mit $\frac{1}{2}m+1$ ersten Gliedern, wenn m gerade ist und wenn man jedes der erstern $\frac{1}{2}m$ Glieder doppelt nimmt, das $(\frac{1}{2}m+1)^{te}$ Glied aber nur einfach (welches letztere dann allemal $Cos\,0$ oder 1 zum Faktor hat).

In der Reihe aber zur Rechten von X. heben sich, wenn m positiv ganz ist, je zwei Glieder, die gleichweit vom Anfang und vom Ende stehen, einander auf, weil sie entgegengesetzte Vorzeichen bekommen (in so ferne $Sin(-z) = -Sin\,z$ ist) übrigens aber einander gleich werden. — So erklärt sich die Identität der Gleichung X. von selbst, um so mehr, da wenn m gerade ist, das mittelste $(\frac{1}{2}m+1)^{te}$ Glied den Faktor $Sin\,0$ bekommt und deshalb $= 0$ ist.

Ist aber m negativ ganz, so gehen die Reihen zur Rechten von IX. und X. bis in's Unendliche fort, und die Gleichungen selbst lehren nun, daß wenn man links und rechts statt der *Cos*

---

*) Aber auch später, wenn allgemeinere Potenzen mit beliebigem Dignanden und beliebigem Exponenten eingeführt sein werden, wird sich zeigen, daß diese Formeln IX. und X., wenn m gebrochen ist, nur in einem sehr beschränkten Umfange wahr bleiben.

und *Sin* die einzelnen, nach Potenzen von x fortlaufende Reihen setzt, welche diese Zeichen *Cos* und *Sin* vorstellen, und mit diesen Reihen alle die Verbindungen vornimmt, welche die Formeln IX. und X. verlangen, zuletzt aber alles in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt, dann links und rechts eine und dieselbe, nach Potenzen von x fortlaufende Reihe entsteht, wobei x ganz allgemein (d. h. ein bloßer Träger der Operations-Zeichen) bleibt. In der X. werden sich also alle mit den einzelnen Potenzen von x behafteten Glieder zur Rechten von selber wegheben, eben weil, während x ganz allgemein bleibt, rechts dieselbe Null kommen muß, welche links schon steht.

Aber eben weil alle Gleichungen (folglich auch die Gleichungen IX. und X.) wie so oft schon gesagt ist, links und rechts einen und denselben Ausdruck enthalten, nur in verschiedenen Formen, während x ganz allgemein bleibt, so folgt von selbst, daß wenn man dem x irgend einen besonderen (reellen oder imaginären) Ziffernwerth giebt, dann auch in den Gleichungen IX. und X. links und rechts jedesmal ein und derselbe Ziffernwerth kommen muß (also in der X. zur Rechten allemal 0). — Gleichzeitig nehmen dann die Sinus und Kosinus (für diesen bestimmten Ziffernwerth von x) selbst besondere Werthe an, und die Gleichungen IX. und X. lehren dann, daß auch die Verbindungen dieser besonderen Ziffernwerthe, wie sie in den Gleichungen rechts und links angedeutet sind, jedesmal zu einem und demselben Ziffernwerth führen (in der X. müssen also die Verbindungen der Ziffernwerthe zur Rechten, zu dem Werthe 0 führen, der links steht). Dazu ist aber dann natürlich erforderlich, daß rechts wirklich ein Ziffernwerth existire, also daß die (jetzt numerisch gedachten) unendlichen Reihen konvergent seien.

Ganz so wie wir aus der VII. die IX. und X. abgeleitet haben, — eben so kann man nun auch aus der VIII., dadurch daß —i statt i gesetzt wird, noch eine zweite Gleichung ableiten, die zu der VIII. addirt, oder von der VIII. subtrahirt, zu neuen

Gleichungen führen, welche die imaginäre Quadratwurzel i nicht mehr enthalten. Man muß aber, um in VIII. das zur Linken vorkommende i zu beseitigen, den Fall wo m positiv oder negativ ganz und gerade ist, von dem andern Fall unterscheiden, wo m positiv oder negativ ganz und ungerade ist.

Setzt man zuerst $m = 2n$, während n beliebig positiv oder negativ ganz, oder $= 0$, oder $= 1$ gedacht wird, so giebt die VIII.

$$(-1)^n \cdot (2 Sin\, x)^{2n} = S[(-1)^a \cdot (2n)_a \cdot Cos\, 2(n-a)x] \\ + i \cdot S[(-1)^a (2n)_a \cdot Sin\, 2(n-a)x];$$

wenn man nun hier $-i$ statt i setzt, und die neue Gleichung zu dieser addirt oder von dieser subtrahirt, so erhält man

$$\text{XI.} \quad (-1)^n \cdot (2 Sin\, x)^{2n} = S[(-1)^a \cdot (2n)_a \cdot Cos\, 2(n-a)x];$$

$$\text{XII.} \quad 0 = S[(-1)^a (2n)_a \cdot Sin\, 2(n-a)x].$$

Auch in dieser Formel XII. heben sich rechts die vom Anfang und Ende gleich weit entfernten Glieder, weil sie gleich sind und entgegengesetzte Vorzeichen bekommen, paarweise einander auf, so oft n positiv ganz ist.

Setzt man ferner in der VIII. $m = 2n+1$, während n eine beliebige Differenz ganzer Zahlen vorstellt, so erhält man, wenn noch durch i wegdividirt wird:

$$(-1)^n \cdot (2 Sin\, x)^{2n+1} = S[(-1)^a (2n+1)_a \cdot Sin\, (2n+1-2a)x] \\ - i \cdot S[(-1)^a \cdot (2n+1)_a \cdot Cos\, (2n+1-2a)x].$$

So wie nun hier $-i$ statt i gesetzt und die neue Gleichung zur vorstehenden addirt, oder von derselben subtrahirt wird, so erhält man noch:

$$\text{XIII.} \quad (-1)^n (2 Sin\, x)^{2n+1} = S[(-1)^a \cdot (2n+1)_a \cdot Sin\, (2n+1-2a)x]$$

$$\text{XIV.} \quad 0 = S[(-1)^a \cdot (2n+1)_a \cdot Cos\, (2n+1-2a)x].$$

Auch hier heben sich in der letztern Gleichung, so oft n positiv gedacht wird, die Glieder paarweise auf, so daß sie in diesem Falle von selbst einleuchtet.

Die Formeln XI.—XIV. gelten also auch für jeden negativen

ganzen Werth von n, gehen aber dann rechts bis in's Unendliche fort, so daß die Reihen konvergent vorausgesetzt werden müssen, so oft man dem x einen besondern Ziffernwerth beilegt und dann auch statt aller Sinus und Kosinus nicht mehr die unendlichen Reihen, welche sie vorstellen, setzt, sondern die Ziffernwerthe, welche sie für den gedachten Ziffernwerth von x, annehmen.

Anmerkung. Alles in diesen letztern beiden Paragraphen mitgetheilte mag der geneigte Leser nur als Andeutungen ansehen, — einmal wie alle allgemeinen Eigenschaften der Sinus und Kosinus am einfachsten aus den Eigenschaften der Potenzen hergeholt werden können und müssen, deren Theile die ersteren sind, — und dann wie solche zusammengesetzteren Resultate, wie die im gegenwärtigen Paragraphen entwickelten, auch noch einer allgemeinern Behandlung fähig sind, die aber erst dann eintreten kann, wenn wir zuvor die Potenz a^b dergestalt verallgemeinert haben werden, daß a und b als bloße Träger der Operationszeichen erscheinen. Bis jetzt aber haben wir neben den natürlichen Potenzen e^z nur solche Potenzen kennen gelernt, deren Exponenten Differenzen ganzer Zahlen sind.

§. 152.

Man pflegt auch noch die Funktionen

$$\frac{Sin\,x}{Cos\,x}, \quad \frac{Cos\,x}{Sin\,x}, \quad \frac{1}{Cos\,x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{Sin\,x},$$

welche aus $Sin\,x$ und $Cos\,x$ zusammengesetzt sind, durch eigene Zeichen auszudrücken, nämlich bezüglich durch die Zeichen

$$Tg\,x, \quad Cotg\,x, \quad Sec\,x \quad \text{und} \quad Cosec\,x,$$

und diese letzteren bezüglich die Tangente, Kotangente, Sekante und Kosekante von x zu nennen.

Die durch $Tg\,x$ und $Cotg\,x$ vorgestellten Funktionen von x, sind demnach nichts anders als Quotienten zweier unendlichen, nach Potenzen von x fortlaufenden Reihen, während die

durch $Sec\,x$ und $Cosec\,x$ bezeichneten Funktionen von x, Quotienten sind aus der Einheit durch eine solche unendliche Reihe dividirt.

Diese Definitionen kann man auch durch die nachstehenden Gleichungen ausdrücken, nämlich durch

I. $Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x}$; II. $Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sin\,x}$;

III. $Sec\,x = \frac{1}{Cos\,x}$; IV. $Cosec\,x = \frac{1}{Sin\,x}$.

§. 153.

Daraus folgt aber sogleich

$$Tg(x \pm z) = \frac{Sin(x \pm z)}{Cos(x \pm z)}.$$

Setzt man nun hier statt $Sin(x \pm z)$ und $Cos(x \pm z)$ ihre Ausdrücke aus §. 147. I.–IV. und dividirt man noch Zähler und Nenner mit $Cos\,x \cdot Cos\,z$ (um lauter Tangenten zu erhalten), so findet sich

I. $$Tg(x+z) = \frac{Tg\,x + Tg\,z}{1 - Tg\,x \cdot Tg\,z};$$

II. $$Tg(x-z) = \frac{Tg\,x - Tg\,z}{1 + Tg\,x \cdot Tg\,z}.$$

Also auch, wenn in I. x statt z geschrieben wird,

III. $$Tg\,2x = \frac{2Tg\,x}{1-(Tg\,x)^2}. \text{*)}$$

---

*) Setzt man in der I. $x+y$ statt x, so findet sich sogleich noch

1) $$Tg(x+y+z) = \frac{Tg\,x + Tg\,y + Tg\,z - Tg\,x \cdot Tg\,y \cdot Tg\,z}{1 - Tg\,x \cdot Tg\,y - Tg\,x \cdot Tg\,z - Tg\,y \cdot Tg\,z},$$

woraus, wenn $z = y = x$ gesetzt wird, hervorgeht

2) $$Tg\,3x = \frac{3Tg\,x - (Tg\,x)^3}{1 - 3(Tg\,x)^2}.$$

Aber eben so findet man aus

$$Cotg\,(x\pm z) = \frac{Cos\,(x\pm z)}{Sin\,(x\pm z)},$$

wenn man §. 147. I.–IV. anwendet, aber zuletzt, um lauter Kotangenten zu erhalten, durch das Produkt $Sin\,x \cdot Sin\,z$ (Zähler und Nenner zur Rechten) dividirt:

IV. $$Cotg\,(x+z) = \frac{Cotg\,x \cdot Cotg\,z - 1}{Cotg\,z + Cotg\,x};$$

V. $$Cotg\,(x-z) = \frac{Cotg\,x \cdot Cotg\,z + 1}{Cotg\,z - Cotg\,x}.$$

Aus der IV. folgt noch, wenn z statt x gesetzt wird,

VI. $$Cotg\,2x = \frac{(Cotg\,x)^2 - 1}{2\,Cotg\,x}.$$

Aus $(Sin\,x)^2 + (Cos\,x)^2 = 1$ folgt, wenn man entweder durch $(Cos\,x)^2$ oder durch $(Sin\,x)^2$ wegdividirt, sogleich

VII. $$1 + (Tg\,x)^2 = (Sec\,x)^2;$$

VIII. $$1 + (Cotg\,x)^2 = (Cosec\,x)^2.$$

Verwandelt man $Sin\,a \pm Sin\,b$ und $Cos\,a \pm Cos\,b$ (nach §. 148.) in Produkte, — dividirt man dann die Gleichungen paarweise durch einander, und dann noch zur Rechten Zähler und Nenner so lange durch *Cos* oder *Sin*, bis man lauter Tangenten oder Kotangenten hat, so erhält man:

IX. $$\frac{Sin\,a + Sin\,b}{Sin\,a - Sin\,b} = \frac{Tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{Tg\,\frac{1}{2}(a-b)};$$

X. $$\frac{Sin\,a + Sin\,b}{Cos\,a + Cos\,b} = Tg\,\tfrac{1}{2}(a+b);$$

Dies letztere würde man auch aus der I. direkt erhalten, wenn man in ihr 2x statt z setzte.

So sieht man, wie aus den einfachen Formeln sehr leicht die zusammengesetzteren, sobald man sie braucht, gefunden werden können.

XI. $\frac{Sin\,a+Sin\,b}{Cos\,a-Cos\,b}=-Cotg\,\tfrac{1}{2}(a-b)=Cotg\,\tfrac{1}{2}(b-a);$

XII. $\frac{Sin\,a-Sin\,b}{Cos\,a+Cos\,b}=Tg\,\tfrac{1}{2}(a-b);$

XIII. $\frac{Sin\,a-Sin\,b}{Cos\,a-Cos\,b}=-Cotg\,\tfrac{1}{2}(a+b);$

XIV. $\frac{Cos\,a+Cos\,b}{Cos\,a-Cos\,b}=-\frac{Cotg\,\frac{1}{2}(a-b)}{Tg\,\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{Cotg\,\frac{1}{2}(b-a)}{Tg\,\frac{1}{2}(b+a)}.$

Und will man endlich Summen und Differenzen von Tangenten oder Kotangenten in Produkte verwandeln, oder in Quotienten, so erhält man augenblicklich, sobald man nur statt $Tg\,x$ und $Cotg\,x$ die Quotienten $\frac{Sin\,x}{Cos\,x}$ und $\frac{Cos\,x}{Sin\,x}$ schreibt,

XV. $Tg\,x+Tg\,z=\frac{Sin(x+z)}{Cos\,x\cdot Cos\,z};$

XVI. $Tg\,x-Tg\,z=\frac{Sin(x-z)}{Cos\,x\cdot Cos\,z};$

XVII. $Cotg\,x+Cotg\,z=\frac{Sin(x+z)}{Sin\,x\cdot Sin\,z}=\frac{Sin(z+x)}{Sin\,z\cdot Sin\,x};$

XVIII. $Cotg\,x-Cotg\,z=-\frac{Sin(x-z)}{Sin\,x\cdot Sin\,z}=\frac{Sin(z-x)}{Sin\,z\cdot Sin\,x}.$

Endlich ist noch

XIX. $Tg(-x)=-Tg\,x$ und XX. $Cotg(-x)=-Cotg\,x$.*)

Diese Formeln mögen übrigens nur als Beispiele dienen, aus welchen der Anfänger abzusehen hat, auf welche Weise für Erreichung analoger Zwecke gearbeitet werden müsse. Da sich die Formeln ungemein anhäufen, so thut der Anfänger am besten nur die einfachsten davon im Gedächtniß zu behalten und sich

---

*) Es ist nämlich

$$Tg(-x)=\frac{Sin(-x)}{Cos(-x)}=\frac{-Sin\,x}{Cos\,x}=-\frac{Sin\,x}{Cos\,x}=-Tg\,x.$$

zu üben, jede weitere, welche ihm nöthig ist, aus diesen einfachsten selbst abzuleiten.

§. 154.

Von den trigonometrischen Funktionen

$Sin\,x$, $Cos\,x$, $Tg\,x$, $Cotg\,x$, $Sec\,x$ und $Cosec\,x$

ist übrigens noch Folgendes zu merken:

1) Jede derselben ist ihrer Definition zu Folge nur einförmig (d. h. nur eindeutig).

2) Mittelst der Gleichung (§. 147. V.) nämlich

$$(Sin\,x)^2 + (Cos\,x)^2 = 1$$

und der vier Definitionen I.—IV. des §. 151., nämlich

$$Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x}, \qquad Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sin\,x},$$

$$Sec\,x = \frac{1}{Cos\,x} \quad \text{und} \quad Cosec\,x = \frac{1}{Sin\,x},$$

lassen sich je fünf dieser trigonometrischen Funktionen von x, in die sechste ausdrücken auf dem gewöhnlichen Wege der Algebra.

A. In $Sin\,x$ ausgedrückt, erhält man:

$$Cos\,x = \sqrt{1-(Sin\,x)^2},$$

$$Tg\,x = \frac{Sin\,x}{\sqrt{1-(Sin\,x)^2}}, \qquad Cotg\,x = \frac{\sqrt{1-(Sin\,x)^2}}{Sin\,x},$$

$$Sec\,x = \frac{1}{\sqrt{1-(Sin\,x)^2}} \quad \text{und} \quad Cosec\,x = \frac{1}{Sin\,x}.$$

B. In $Cos\,x$ ausgedrückt, findet sich

$$Sin\,x = \sqrt{1-(Cos\,x)^2},$$

$$Tg\,x = \frac{\sqrt{1-(Cos\,x)^2}}{Cos\,x}, \qquad Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{\sqrt{1-(Cos\,x)^2}},$$

$$Sec\,x = \frac{1}{Cos\,x} \quad \text{und} \quad Cosec\,x = \frac{1}{\sqrt{1-(Cos\,x)^2}}.$$

C. In $Tg\,x$ ausgedrückt, findet sich

$$Sin\,x = \frac{Tg\,x}{\sqrt{1+(Tg\,x)^2}}, \qquad Cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+(Tg\,x)^2}},$$

$$Cotg\,x = \frac{1}{Tg\,x},$$

$$Sec\,x = \sqrt{1+(Tg\,x)^2} \quad \text{und} \quad Cosec\,x = \frac{\sqrt{1+(Tg\,x)^2}}{Tg\,x}.$$

D. Endlich in $Cotg\,x$ ausgedrückt, zeigt sich

$$Sin\,x = \frac{1}{\sqrt{1+(Cotg\,x)^2}}, \qquad Cos\,x = \frac{Cotg\,x}{\sqrt{1+(Cotg\,x)^2}},$$

$$Tg\,x = \frac{1}{Cotg\,x},$$

$$Sec\,x = \frac{\sqrt{1+(Cotg\,x)^2}}{Cotg\,x} \quad \text{und} \quad Cosec\,x = \sqrt{1+(Cotg\,x)^2}.$$

Die Ausdrücke der Funktionen in $Sec\,x$ und in $Cosec\,x$ lassen wir hier weg, weil sie fast nie in Anwendung kommen.

In allen diese Resultaten A.—D. darf jede Quadratwurzel jedesmal nur eindeutig genommen werden, aber so oft sie vorkommt, muß sie immer einen und denselben ihrer Werthe vorstellen. Das erstere geht daraus hervor, daß (nach Nr. 1.) jede trigonometrische Funktion nur eindeutig ist, also für jeden besonderen Werth von x, nur einen einzigen Werth haben kann, — das andere folgt aus der Natur der Rechnung. Welchen ihrer beiden Werthe eine solche Quadratwurzel aber vorstellt, muß in jedem besonderen Falle erst noch besonders untersucht werden; und da zeigt sich, daß für gewisse Werthe von x, der eine, für andere Werthe von x aber der andere genommen werden muß.

§. 155.

Zuletzt müssen wir noch $Sin(x+h)$ und $Cos(x+h)$ in Reihen umformen, die nach Potenzen von h fortlaufen. Dazu haben wir den §. 125., welcher hier die gesuchten Reihen un-

mittelbar giebt. Es ist aber bequemer die Formeln I. und II. des §. 147. zu Hilfe zu nehmen, nach welchen man hat

$$Sin(x+h) = Sin x \cdot Cos h + Cos x \cdot Sin h$$

und

$$Cos(x+h) = Cos x \cdot Cos h - Sin x \cdot Sin h.$$

Setzt man dann hier herein statt $Sin h$ und $Cos h$ die unendlichen Reihen, welche diese Zeichen (nach §. 145.) vorstellen und ordnet man dann die Glieder nach den Potenzen von h, so erhält man augenblicklich

$$\text{I.}\quad Sin(x+h) = Sin x + Cos x \cdot h - Sin x \cdot \frac{h^2}{2!} - Cos x \cdot \frac{h^3}{3!} + Sin x \cdot \frac{h^4}{4!} + Cos x \cdot \frac{h^5}{5!} - \text{etc. etc.}$$

$$\text{II.}\quad Cos(x+h) = Cos x - Sin x \cdot h - Cos x \cdot \frac{h^2}{2!} + Sin x \cdot \frac{h^3}{3!} + Cos x \cdot \frac{h^4}{4!} - Sin x \cdot \frac{h^5}{5!} - \text{etc. etc.}$$

§. 156.

Endlich sind wir so weit, daß wir nach dem Gang der Werthe von $Sin x$ und $Cos x$ fragen können, den sie für alle stetig wachsenden reellen Werthe von x annehmen, von $x = -\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $x = +\infty$ hin. — Da erhellet aber sogleich Folgendes:

1) Die Reihen $Sin x$ und $Cos x$ sind für alle reellen Werthe von x konvergent (nach §. 128. Nr. 4.); sie haben also für jeden reellen Werth von x stets einen bestimmten Werth, der nothwendig ebenfalls reell ist (und natürlich nur einen einzigen Werth).

2) Die Werthe von $Sin x$ und $Cos x$ gehen mit den reellen Werthen von x, stetig fort.

Denn dies folgt aus §. 131. Nr. 2. unmittelbar, weil (nach §. 155.) die Koeffizienten der für $Sin(x+h)$ und $Cos(x+h)$ erhaltenen Reihen (nach h), alle konvergent sind.

3) Wird daher $Sin\,x$ oder $Cos\,x$ für einen reellen Werth α von x, positiv, für einen andern reellen Werth β von x aber negativ, so liegt zwischen α und β ein Werth von x, der diesen $Sin\,x$ oder $Cos\,x = 0$ macht.

4) Ob aber die Werthe von $Sin\,x$ und $Cos\,x$ mit den stetig wachsend gedachten reellen Werthen von x (wie dies die Werthe von e^x gethan haben) stets mit wachsen, oder ob sie gleichzeitig abnehmen, oder endlich ob sie vom Wachsen zum Abnehmen übergehen und dann wieder vom Abnehmen zum Wachsen, und wo dies geschieht und wie oft, — dies alles muß nun genau untersucht werden.

Zunächst folgt aber aus §. 132. in Verbindung mit den beiden Entwickelungen I. und II. des §. 155. für $Sin(x+h)$ und $Cos(x+h)$, augenblicklich:

a) Der $Sin\,x$ wächst mit den stetig wachsend gedachten Werthen von x zugleich, so lange $Cos\,x$ positiv bleibt; er nimmt ab, wenn $Cos\,x$ negativ wird, und er geht vom Wachsen zum Abnehmen über (d. h. er hat einen relativ größesten Werth) für jeden einzelnen Werth von x, welcher $Cos\,x = 0$ und $Sin\,x$ positiv macht, und dieser größeste Werth ist (wegen $(Sin\,x)^2+(Cos\,x)^2 = 1$ und $Cos\,x = 0$) offenbar $= +1$; er geht aber vom Abnehmen zum Wachsen über (d. h. er hat einen relativ kleinsten Werth) für jeden Werth von x, welcher $Cos\,x = 0$ und $Sin\,x$ negativ macht, und dieser kleinste Werth ist offenbar $= -1$.

b) Der $Cos\,x$ dagegen nimmt stetig ab, während die Werthe von x immerfort stetig wachsend gedacht werden, so lange $Sin\,x$ positiv bleibt; dagegen wächst $Cos\,x$ mit x zugleich, so lange $Sin\,x$ negativ ist; derselbe $Cos\,x$ geht ferner vom Abnehmen zum Wachsen über (d. h. er hat einen relativ kleinsten Werth und dieser ist $= -1$) für jeden einzelnen Werth von x, welcher $Sin\,x = 0$ und $Cos\,x$ negativ macht; — derselbe $Cos\,x$ endlich geht vom Wachsen zum Abnehmen über (d. h.

er hat einen relativ größesten Werth und dieser ist $= +1$) für jeden einzelnen Werth von x, welcher $Sin\,x = 0$ und $Cos\,x$ positiv macht.

§. 157.

1) Zwischen $x = 0$ und $x = \sqrt{2}$ liegt kein Werth von x, welcher $Cos\,x = 0$ macht, sondern es wird $Cos\,x$ stets positiv; also wächst (nach §. 156. a.) $Sin\,x$ mit x zugleich, so lange x von 0 bis $\sqrt{2}$ wächst, während $\sqrt{2}$ positiv gedacht wird und $= 1{,}4145\cdots$ ist.

Denn man hat, umgeformt,

$$Cos\,x = \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5\cdot 6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9\cdot 10}\right) + \text{in inf.}$$

in welcher Reihe alle Glieder positiv sind, so lange x zwischen 0 und $\sqrt{2}$ liegt.

2) Für $x = 2$ wird $Cos\,x$ negativ.

Denn man hat, umgeformt,

$$Cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7\cdot 8}\right) - \frac{x^{10}}{10!}\left(1 - \frac{x^2}{11\cdot 12}\right) - \text{in inf.}$$

so daß alle Glieder der jetzigen Umformung, von dem allerersten Gliede 1 subtrahirt sind und dabei jedes für $x = 2$, positiv ist. Der Theil $1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\right)$ wird aber für $x = 2$ schon negativ und $= -\frac{1}{3}$; um so mehr wird also die ganze unendliche Reihe $Cos\,x$, negativ für $x = 2$.

3) Weil aber $Cos\,x$ positiv wird für $x = \sqrt{2} = 1{,}4145\cdots$ und negativ wird für $x = 2$, so liegt zwischen diesen beiden Werthen mindestens ein positiver Werth von x, für welchen $Cos\,x = 0$ und eben deshalb (nach a.) $Sin\,x = +1$ wird (nach §. 156. Nr. 3.).

Versucht man es weiter, und substituirt man in die Reihe $Cos\,x$ andere Werthe von x, welche $> \sqrt{2}$ und < 2 sind, so findet man bald, daß $Cos\,x$ positiv bleibt von $x = 0$ bis

$x = 1{,}57$, dagegen negativ wird für $x = 1{,}58$; also liegt der Werth von x, für welchen $Cos\,x$ für die von 0 an stets wachsend gedachten Werthe von x, zum ersten Male der Null gleich wird, offenbar zwischen 1,57 und 1,58.

§. 158. Erklärungen und Folgerungen.

Die kleinste der positiven Zahlen, welche statt x gesetzt, $Cos\,x = 0$ machen, und welche zwischen 1,57 und 1,58 liegt, bezeichnet man gewöhnlich durch

$\frac{1}{2}\pi$, das Doppelte derselben also durch π.

Ihre nähere Auswerthung wird für die Folge vorbehalten. *)

Aber weil für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und dieser so eben definirten Zahl $\frac{1}{2}\pi$ liegen, $Cos\,x$ positiv bleibt, so wächst $Sin\,x$ von 0 an bis zu $Sin\frac{1}{2}\pi$ hin fortwährend, weshalb wiederum $Cos\,x$ von $+1$ bis zu $Cos\frac{1}{2}\pi$ d. h. bis zu Null hin fortwährend abnimmt (alles nach §. 155. Nr. 4.).

Man hat also nicht bloß (§. 146.)

1) $Sin\,0 = 0$; 2) $Cos\,0 = 1$;

sondern noch

3) $Sin\frac{1}{2}\pi = +1$; 4) $Cos\frac{1}{2}\pi = 0$

---

*) Dieser Werth von x, für welchen $Cos\,x = 0$ ist, und welcher in der Reihe der positiven Werthe von x, im Falle darunter mehrere existiren sollten, denen dieselbe Eigenschaft zukommt, von 0 an aufwärts gehend nach $+\infty$ hin, als der erste derselben vorausgesetzt wird, soll in der Folge berechnet werden, und er wird sich dann ausweisen als die Hälfte einer Zahl

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279$ in inf.

während die Geometrie späterhin zeigen muß, daß diese letztere Zahl die Länge des Halbkreises, ihre Hälfte also die Länge des Viertelskreises ausdrückt, für den Radius als Einheit genommen.

Im 8ten Th. d. W. pag. 2. findet man diese Zahl π bis auf 127 Decimalstellen ausgedrückt. — Man hat sie aber auch bis auf 144, und selbst bis auf 261 Decimalstellen „ausgerechnet."

15*

und dazwischen (d. h. für alle Werthe von x, welche zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}\pi$ liegen) sind alle Sinus und alle Kosinus positiv und <1, also ächte Brüche (wobei wir immer die irrationalen Zahlen als gebrochene, ansehen).

Wir theilen alle von 0 bis ∞ stetig wachsenden Zahlen in gleiche Abtheilungen, d. h. in Abtheilungen, deren Grenzen um gleichviel, nämlich um die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ von einander verschieden sind, und nennen jede solche Abtheilung einen Quadranten; wir sagen also: eine (positive) Zahl liege im

1ten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, rc. rc. Quadranten,

wenn sie zwischen

0 u. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ u. π, π u. $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ u. 2π, 2π u. $\frac{5}{2}\pi$, rc. rc. liegt;

und allgemein: eine Zahl liege im r^{ten} Quadranten, wenn sie zwischen $\frac{r-1}{2}\pi$ und $\frac{r}{2}\pi$ liegt.

§. 159.

Man kann nun $Sin\,\pi$, $Cos\,\pi$, $Sin\,\frac{3}{2}\pi$, $Cos\,\frac{3}{2}\pi$, $Sin\,2\pi$, $Cos\,2\pi$, rc. rc. sehr leicht berechnen, wenn man die Formeln §. 147. I.–IV. oder §. 148. XIII. XIV. anwendet, in letztern $\frac{1}{2}\pi$, oder π statt x setzt, in die ersteren aber $\frac{1}{2}\pi$ statt z substituirt, statt x dagegen π, 2π, rc.; dabei aber die Resultate §. 158. 3.) und 4.) und überhaupt bei den folgenden Resultaten, die vorher bereits gewonnenen, in Anwendung bringt.

Man erhält dann sogleich:

5) $Sin\,\pi = 0$; 6) $Cos\,\pi = -1$;

7) $Sin\,\frac{3}{2}\pi = -1$; 8) $Cos\,\frac{3}{2}\pi = 0$;

9) $Sin\,2\pi = Sin\,0 = 0$; 10) $Cos\,2\pi = Cos\,0 = 1$.

Setzt man aber in §. 147. I.–IV. 2π statt z und nach und nach 2π, 4π, 6π, ... $2(n-1)\pi$ statt x, so ergiebt sich

$Sin\, 2n\pi = Sin\, 2(n-1)\pi = \cdots = Sin\, 4\pi = Sin\, 2\pi = Sin\, 0 = 0$

und

$Cos\, 2n\pi = Cos\, 2(n-1)\pi = \cdots = Cos\, 4\pi = Cos\, 2\pi = Cos\, 0 = 1,$

wenn nur n positiv ganz oder 0 ist. — Es ist jedoch nach §. 146. I. und II.

$$Sin(-2n\pi) = -Sin\, 2n\pi = -Sin\, 0 = 0$$

und $$Cos(-2n\pi) = Cos\, 2n\pi = Cos\, 0 = 1;$$

folglich ist

11) $Sin\, 2n\pi = 0$ und 12) $Cos\, 2n\pi = 1$,

wenn unter n entweder Null oder jede positive oder jede negative ganze Zahl verstanden wird.

§. 160.

Ausrechnung der Werthe von $Sin\, x$ und $Cos\, x$ für alle reellen Werthe von x.

A. Zwei Zahlen, welche einander zu π d. h. zu zwei Quadranten ergänzen und welche deshalb Supplement-Werthe heißen, haben genau einerlei Sinus-Werthe; ihre Kosinus-Werthe sind dagegen zwar an sich einander gleich, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen; d. h. es ist

I. $Sin(\pi - y) = Sin\, y$ und $Cos(\pi - y) = -Cos\, y.$

Dies folgt unmittelbar aus §. 147. III. und IV. für $x = \pi$ und $z = y$.

B. Zwei Zahlen, die einander zu 2π, d. h. zu vier Quadranten ergänzen, haben dieselben Sinus aber mit entgegengesetztem Vorzeichen und genau dieselben Kosinus; d. h. es ist (unmittelbar aus §. 147. III. IV. für $x = 2\pi$ und $z = y$)

II. $Sin(2\pi - y) = -Sin\, y$ und $Cos(2\pi - y) = Cos\, y.$

C. Zwei Zahlen endlich, deren Differenz $= \pi$ ist, d. h. die um zwei Quadranten von einander verschieden sind, haben, absolut angesehen, zwar einerlei Sinus-Werthe und auch einerlei Kosinus-Werthe, aber sowohl beide Sinus, als auch beide Ko-

sinus haben entgegengesetzte Vorzeichen; d. h. es ist (unmittelbar aus §. 147. I. II. für $x = \pi$ und $z = y$)

III. $Sin(\pi + y) = -Sin\, y$ und $Cos(\pi + y) = -Cos\, y$.

D. Mittelst dieser drei Sätze (die übrigens selbst für jeden imaginären Werth von y gelten) kann man zunächst die Werthe von $Sin\, x$ und $Cos\, x$, für alle Werthe von x, welche im 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten liegen, auf diejenigen zurückführen, für welche x im 1ten Quadranten liegt. Denkt man sich nämlich unter y alle (positiven) Werthe von x, im ersten Quadranten, d. h. welche zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, so drückt

$\pi - y$ alle Werthe von x aus, welche im zweiten Quadranten,
$\pi + y$ alle Werthe von x, welche im dritten " ,
und $2\pi - y$ alle Werthe von x, welche im vierten "
liegen.

Also finden sich mittelst der Formeln I.—III. alle Werthe von $Sin\, x$ und $Cos\, x$, wenn $x = \pi - y$, oder $\pi + y$, oder $2\pi - y$ ist, d. h. wenn x im 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten liegt, auf $Sin\, y$ und $Cos\, y$ zurückgeführt, während y im ersten Quadranten liegt. — Man findet aber hieraus noch:

im ersten Quadranten ist der *Sin* positiv und der *Cos* positiv;
" zweiten " " " " positiv " " " negativ;
" dritten " " " " negativ " " " negativ;
und " vierten " " " " negativ " " " positiv.

Der $Sin\, x$ wächst dabei (während x von 0 an stetig wachsend gedacht wird) im 1ten Quadranten von 0 bis zu +1, nimmt dann im 2ten Quadranten von +1 bis zu 0 hin ab, fährt im 3ten Quadranten fort abzunehmen von 0 bis zu −1 hin, um dann im 4ten Quadranten von −1 bis zu 0 hin wieder zu wachsen.

Der $Cos\, x$ dagegen nimmt gleichzeitig im 1ten Quadranten von +1 bis zu 0 hin ab, setzt dieses Abnehmen im 2ten Quadranten von 0 bis zu −1 hin fort, wächst aber dann im 3ten

Quadranten von -1 bis zu 0 hin und setzt dieses Wachsen im 4^{ten} Quadranten von 0 bis zu $+1$ hin fort.

E. Zwei Zahlen, welche um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden sind, haben genau einerlei Sinus-Werthe und auch einerlei Kosinus-Werthe d. h. es ist

$$\text{IV.} \quad Sin(2n\pi+z) = Sin\, z \quad \text{und} \quad Cos(2n\pi+z) = Cos\, z,$$

so oft n entweder 0 oder positiv oder negativ ganz ist.

Solches geht aus §. 147. I. und II. und §. 159. NNr. 11. und 12. ohne Weiteres hervor, es mag y reell oder imaginär gedacht werden, sobald man dort $2n\pi$ statt x setzt.

F. Denkt man sich aber unter z alle (positiven) Werthe von 0 bis 2π, also alle Werthe, welche innerhalb der vier ersten Quadranten liegen, so drückt $2n\pi+z$ alle denkbaren reellen Zahlen aus, alle positiven, wenn man unter n sowohl 0 als auch jede positive ganze Zahl sich denkt, und alle negativen, wenn man statt n alle negativen ganzen Zahlen setzt. — Durch die Formel IV. sind also die Sinus und Kosinus aller reellen Zahlen, auf die Sinus und Kosinus aller, innerhalb der vier ersten Quadranten liegenden (positiven) Zahlen zurückgeführt; während letztere wiederum kurz vorher (in D.) auf die Sinus und Kosinus der Werthe zurückgeführt sich sahen, welche im ersten Quadranten liegen. — Die nächste Folge wird aber zeigen, daß letztere wieder auf die Sinus und Kosinus aller Werthe zurückgeführt werden können, welche im ersten halben Quadranten liegen. — Wir wollen nur zuvor noch bemerklich machen, daß $2n\pi$ eine (positive oder negative) Anzahl von 4 Quadranten (oder Null) ausdrückt, und daß daher nach IV. die Werthe von $Sin\, x$ und $Cos\, x$

im 5^{ten}, 9^{ten}, 13^{ten}, ... $(4m+1)^{\text{ten}}$ Quadranten, wie im 1^{ten},
im 6^{ten}, 10^{ten}, 14^{ten}, ... $(4m+2)^{\text{ten}}$ „ , wie im 2^{ten},
im 7^{ten}, 11^{ten}, 15^{ten}, ... $(4m+3)^{\text{ten}}$ „ , wie im 3^{ten},
im 8^{ten}, 12^{ten}, 16^{ten}, $4m^{\text{ten}}$ „ , wie im 4^{ten}

sind, wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

G. Von zwei Zahlen, welche sich einander zu einem Quadranten ergänzen und welche man Complement-Werthe nennt, ist der Sinus-Werth der einen allemal zugleich der Kosinus-Werth der andern, d. h. es ist allemal

V. $Sin(\frac{1}{2}\pi - y) = Cos\,y$ und $Cos(\frac{1}{2}\pi - y) = Sin\,y$.

Solches folgt unmittelbar aus §. 147. I. und II. und aus §. 158. NNr. 3. und 4.), es mag y reell oder imaginär sein.

§. 161.

I. Um daher $Sin\,x$ und $Cos\,x$ für alle reellen Werthe von x „ausgerechnet" zu haben, braucht man nur diese Werthe für alle (positiven) Werthe z von x gefunden und tabellarisch niedergelegt zu haben, welche im ersten halben Quadranten d. h. welche zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ liegen.

Auf welchen beschwerlichen Wegen solche Tabellen construirt worden sind, zeigt das Studium der „Geschichte der Mathematik"; welche Mittel und Wege man jetzt anwendet, um solche Tabellen möglichst bequem zu construiren, findet sich im 8ten Th. d. W. bei Gelegenheit der „Lehre der endlichen Summen und Differenzen" angedeutet.

Um dem Leser jedoch noch eine Ansicht zu geben, wie die hier bis jetzt beigebrachten Mittel auch schon hinreichen würden, eine solche Tabelle zu liefern, so machen wir noch darauf aufmerksam, daß für sehr kleine Werthe von z, die z. B. $<0{,}0001$ sind, und wenn man nur bis auf 7 Decimalstellen Genauigkeit haben will, dann

$$Cos\,z = 1 \quad \text{und} \quad Sin\,z = z$$

genommen werden kann, weil die nächsten Glieder der Reihen, nämlich $-\frac{1}{2}z^2$ und $-\frac{1}{6}z^3$ auf die 7te Decimalstelle nicht mehr einfließen.

Ist dagegen $z > 0{,}0001$ aber $< 0{,}001$, so kann man

$$Cos\,z = 1 - \tfrac{1}{2}z^2, \quad \text{aber noch} \quad Sin\,z = z$$

nehmen, weil nun $\frac{1}{2}z^2$ noch auf die 7^te^ Decimalstelle einfließen kann, aber nicht mehr $-\frac{1}{6}z^3$.

Die Werthe von $Sin\,z$ und $Cos\,z$ für größere Werthe von z kann man dann mittelst der Formeln der §§. 147. 148. und 149., aus den Werthen von $Sin\,z$ und $Cos\,z$ für die kleineren Werthe von z, durch einfache Multiplikation, Addition und Subtraktion ableiten; wobei jedoch noch Arbeit genug statt findet.

II. Unsere gewöhnlichen Sinus- und Kosinus-Tafeln sind nicht auf analytischem, sondern auf geometrischem Grund und Boden gewachsen und haben daher für den analytischen Bedarf eine etwas unbequeme Form. Es ist nämlich der 90^te^ Theil der Zahl $\frac{1}{2}\pi$ dort Grad genannt, der 60^te^ Theil hiervon, Minute, und der 60^te^ Theil dieser letzteren, Sekunde; u. s. f.; und eine Zahl z, welche zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, also zwischen 0 und ungefähr 1,57079 ··· liegt, wird dann etwa so geschrieben

25 Grade 13 Minuten 37 Sekunden

oder so: $25^0\ 13'\ 37''$.

In den Anwendungen auf Geometrie dagegen, ist diese gewöhnliche Form der Tabellen wiederum bequemer, als wenn sie eine, den analytischen Begriffen mehr entsprechende, naturgemäßere Form hätten.

Es ist aber

1 Grad d. h. $1^0 = 0{,}01745329252$

1 Minute d. h. $1' = 0{,}00029088820 \cdots$

1 Sekunde d. h. $1'' = 0{,}00000484813 \cdots$

1 Tertie d. h. $1''' = 0{,}00000008080 \cdots$.

Danach läßt sich die Zahl leicht berechnen, welche z. B. durch $25^0\ 13'\ 37''$ ausgedrückt ist.

Umgekehrt, soll irgend eine (positive) Zahl z in die Form

einer Summe aus Graden, Minuten und Sekunden bestehend, gebracht werden, so folgt aus

$$1^0 = \frac{\frac{1}{2}\pi}{90} = \frac{\pi}{180} = \frac{3{,}14159\cdots}{180},$$

daß y^0 die Zahl $\frac{\pi y}{180}$ ausdrücken, daß also, wenn diese letztere Zahl die gegebene z sein soll, y selbst aus der Gleichung

$$\frac{\pi y}{180} = z \quad \text{oder} \quad y = \frac{180 \cdot z}{\pi}$$

gefunden werden müsse. Dadurch findet sich eine ganze Zahl von Graden und noch eine ächt gebrochene Zahl derselben, welche letztere dann auf Minuten, Sekunden u. s. w. gebracht wird.

III. Wir wollen hier noch einige Werthe von $Sin\,x$, $Cos\,x$, $Tg\,x$ und $Cotg\,x$ herstellen, welche in den Anwendungen häufiger vorkommen.

Man findet nämlich unmittelbar aus den Formeln §. 148. XI. und XII., wenn zuerst $\frac{1}{2}\pi$, dann $\frac{1}{4}\pi$ statt x gesetzt wird:

1) $Sin\,\frac{1}{4}\pi = Cos\,\frac{1}{4}\pi = +\sqrt{\tfrac{1}{2}} = +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$,

also

2) $Tg\,\frac{1}{4}\pi = Cotg\,\frac{1}{4}\pi = 1$;

3) $Sin\,\frac{1}{8}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

4) $Cos\,\frac{1}{8}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

also

5) $Tg\,\frac{1}{8}\pi = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ und $Cotg\,\frac{1}{8}\pi = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$.

Ferner findet sich

$$Sin\,\tfrac{1}{3}\pi = Cos\,\tfrac{1}{6}\pi \quad \text{und} \quad Cos\,\tfrac{1}{3}\pi = Sin\,\tfrac{1}{6}\pi,$$

in so ferne $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{1}{6}\pi$ Complement-Werthe, d. h. solche Werthe sind, deren Summe $=\frac{1}{2}\pi$ ist. Weil aber aus §. 148. XIII. XIV., wenn $\frac{1}{6}\pi$ statt x gesetzt wird, noch

$$Sin\tfrac{1}{3}\pi = 2Sin\tfrac{1}{6}\pi \cdot Cos\tfrac{1}{6}\pi$$

und

$$Cos\tfrac{1}{3}\pi = (Cos\tfrac{1}{6}\pi)^2 - (Sin\tfrac{1}{6}\pi)^2 = 1 - 2(Sin\tfrac{1}{6}\pi)^2$$

hervorgeht, so folgt auch noch aus der Vergleichung dieser beiden Werthe von $Sin\tfrac{1}{3}\pi$ und von $Cos\tfrac{1}{3}\pi$, augenblicklich

6) $Sin\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}$ *) und 7) $Cos\tfrac{1}{6}\pi = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$,

also auch

$$Cos\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad Sin\tfrac{1}{3}\pi = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

und

7) $Cotg\tfrac{1}{3}\pi = Tg\tfrac{1}{6}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = +\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$

und

8) $Tg\tfrac{1}{3}\pi = Cotg\tfrac{1}{6}\pi = +\sqrt{3}$.

---

*) Setzt man in der Formel

$$Sin(x+z) + Sin(x-z) = 2Sin\,x \cdot Cos\,z$$

$\tfrac{1}{6}\pi$ statt x, so liefert sie (weil $2Sin\tfrac{1}{6}\pi = 1$ ist)

$$Sin(\tfrac{1}{6}\pi+z) + Sin(\tfrac{1}{6}\pi-z) = Cos\,z$$

oder

(☾)... $Sin(\tfrac{1}{6}\pi+z) = Cos\,z - Sin(\tfrac{1}{6}\pi-z)$.

Hat man also eine Tabelle von $Sin\,x$ und $Cos\,x$ berechnet für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und $\tfrac{1}{6}\pi$ (dem dritten Theil des Quadranten) liegen, so darf man nur in diese Formel ☾. statt z alle Werthe setzen, welche zwischen 0 und $\tfrac{1}{6}\pi$ liegen, um sofort durch einfache Subtraktion auch die Werthe von $Sin\,x$ zu haben, für die Werthe von x, welche zwischen $\tfrac{1}{6}\pi$ und $\tfrac{1}{3}\pi$ liegen. — Hat man aber alle Werthe von $Sin\,x$, von $x = 0$ bis $x = \tfrac{1}{3}\pi$, so giebt die Gleichung $Sin(\tfrac{1}{2}\pi - y) = Cos\,y$ sogleich noch die Werthe von $Sin\,x$, von $x = \tfrac{1}{3}\pi$ bis $x = \tfrac{1}{2}\pi$, wenn man die Werthe von $Cos\,y$ hat, von $y = 0$ bis $y = \tfrac{1}{6}\pi$.

Die letztere Gleichung $Cos\,y = Sin(\tfrac{1}{2}\pi - y)$ giebt dann alle Werthe von $Cos\,y$ für alle Werthe von y, von $y = 0$ bis $y = \tfrac{1}{2}\pi$, sofort dazu.

Man braucht also nur $Sin\,x$ und $Cos\,x$ von $x = 0$ bis zu $x = \tfrac{1}{6}\pi$ auf anderen Wegen zu berechnen, um sofort $Sin\,x$ und $Cos\,x$ für alle Werthe von x berechnet zu haben, welche zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}\pi$ d. h. welche im ersten Quadranten liegen.

Es ist aber (nach II.) $\frac{1}{2}\pi = 90^0$; $\frac{1}{3}\pi = 60^0$; $\frac{1}{4}\pi = 45^0$; $\frac{1}{6}\pi = 30^0$; $\frac{1}{8}\pi = 22^0\ 30'$; $\frac{1}{12}\pi = 15^0$; u. s. w.

Daß man aus 7.) und 4.) sogleich wieder (mittelst der Formeln §. 148. XI. und XII.) in (absoluten) Quadratwurzeln ausdrücken könne die Werthe der Sinus und Kosinus von $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$, $\frac{1}{24}\pi$, $\frac{1}{32}\pi$, $\frac{1}{48}\pi$, $\frac{1}{64}\pi$, u. s. f., fällt in die Augen.

§. 162.

Ausrechnung der Werthe von *Sin* x und *Cos* x für die imaginären Werthe von x.

I. Endlich kann man nun auch die Werthe von *Sin* x und *Cos* x für jeden imaginären Werth $p+q\cdot i$ von x „ausrechnen" d. h. ebenfalls auf die Form $P+Q\cdot i$ bringen. — Denn man hat zunächst aus §. 145. V. und VI., wenn man daselbst $q\cdot i$ statt x setzt:

$$1)\qquad Sin(q\cdot i) = i\cdot\frac{e^q - e^{-q}}{2} = i\cdot S\left[\frac{q^{2b+1}}{(2b+1)!}\right]$$

und

$$2)\qquad Cos(q\cdot i) = \frac{e^q + e^{-q}}{2}\ ^{*)} = S\left[\frac{q^{2b}}{(2b)!}\right],$$

woraus dann, wenn in §. 147. I. und II. p statt x und $q\cdot i$ statt z gesetzt wird, hervorgeht:

$$3)\quad Sin(p+q\cdot i) = \frac{e^q + e^{-q}}{2}\cdot Sin\,p + i\cdot\frac{e^q - e^{-q}}{2}\cdot Cos\,p;$$

$$4)\quad Cos(p+q\cdot i) = \frac{e^q + e^{-q}}{2}\cdot Cos\,p - i\cdot\frac{e^q - e^{-q}}{2}\cdot Sin\,p,$$

wo, da q nicht Null ist, die (Exponential-) Funktionen $\frac{e^q + e^{-q}}{2}$ und $\frac{e^q - e^{-q}}{2}$, welche bezüglich $= Cos(q\cdot i)$ und

---

*) In einem der folgenden Paragraphen wollen wir diese beiden (Exponential-) Funktionen noch näher betrachten, in so ferne auch sie für alle positiven Werthe von q ausgerechnet und in Tabellen gebracht sein müssen, wenn die Ausrechnung in Ziffern von *Sin*(p+q·i) und *Cos*(p+q·i) für bestimmt gegebene Ziffernwerthe von p und q möglichst schnell und bequem von Statten gehen soll.

$= \frac{1}{i} \cdot Sin(q \cdot i) = -i \cdot Sin(q \cdot i)$ sind, zwar stets reell sein, aber nie den Werth 0 haben werden.

II. Ist daher $Sin x = 0$ oder $Cos x = 0$, so hat x selbst nie einen imaginären Werth, weil im Gegentheil $Sin p$ und $Cos p$ zu gleicher Zeit der Null gleich sein müßten, was, wegen $(Sin p)^2 + (Cos p)^2 = 1$ nicht möglich ist.

III. Auch findet sich $Sin(p + q \cdot i)$ reell, so oft $Cos p = 0$, also $p = (2n \pm \frac{1}{2})\pi$ ist; dagegen ist $Cos(p + q \cdot i)$ reell, so oft $Sin p = 0$, also wenn $p = \begin{Bmatrix} 2n\pi \\ (2n+1)\pi \end{Bmatrix}$ ist.

§. 163.

Auffindung der Werthe von x, wenn $Sin x$ und $Cos x$ (reell) gegeben sind.

Ist man im Besitz einer Tabelle, in welcher die Werthe von $Sin x$ und $Cos x$ für alle Werthe von x berechnet stehen, die im ersten Quadranten (also zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$) liegen, so kann man nun auch umgekehrt, zu gegebenen reellen Sinus und Kosinus von x, die zugehörigen Werthe von x selbst, sofort leicht angeben.

I. Ist nämlich $Sin x = \pm\mu$ und $Cos x = \pm\nu$ gegeben, so findet sich, wenn $\mu^2 + \nu^2 = 1$ nicht ist, kein einziger Werth von x, welcher diesen beiden Bestimmungen genügte (nach §. 147. V.). — Ist aber $\mu^2 + \nu^2 = 1$, und sind μ und ν positiv oder Null, so liegt innerhalb der vier ersten Quadranten (d. h. von $x = 0$ bis $x = 2\pi$) allemal ein Werth von x, aber auch allemal nur ein einziger, welcher diesen beiden Gleichungen entspricht und zwar ist solcher Werth von x

$= y$ und im 1ten Quadranten, wenn $Sin x = +\mu$ und $Cos x = +\nu$,
$= \pi - y$ und im 2ten „ , wenn „ $= +\mu$ und „ $= -\nu$,
$= \pi + y$ und im 3ten „ , wenn „ $= -\mu$ und „ $= -\nu$,
$= 2\pi - y$ und im 4ten „ , wenn „ $= -\mu$ und „ $= +\nu$

gegeben sein sollten, während jedesmal y selbst im ersten Quadranten liegt, durch eine der beiden Gleichungen

$$Sin\,y = +\mu \quad \text{oder} \quad Cos\,y = +\nu$$

völlig bestimmt ist und aus der Tabelle sofort entnommen werden kann. (§. 160. D.).

Wäre $\mu = 0$, also $Sin\,x = 0$ und $Cos\,x = \pm 1$, so wäre $x = 0$ für $Cos\,x = +1$, und $x = \pi$ für $Cos\,x = -1$, zu nehmen.

Wäre aber $\nu = 0$, also $Sin\,x = \pm 1$ und $Cos\,x = 0$, so wäre $x = \frac{1}{2}\pi$ für $Sin\,x = +1$, und $x = \frac{3}{2}\pi$ für $Sin\,x = -1$, zu nehmen.

II. Ist dagegen $Sin\,x$ allein, oder $Cos\,x$ allein gegeben, positiv oder negativ aber an sich <1, oder Null; so hat man (aus §. 147. V.).

$$Cos\,x = \pm\sqrt{1-(Sin\,x)^2}, \quad \text{oder} \quad Sin\,x = \pm\sqrt{1-(Cos\,x)^2},$$

so daß zu dem gegebenen $Sin\,x$ zwei Werthe von $Cos\,x$, oder zu dem gegebenen $Cos\,x$ zwei Werthe von $Sin\,x$ gehören, — dann finden sich natürlich

a) zu dem gegebenen $Sin\,x = \pm\mu$, innerhalb der vier ersten Quadranten allemal zwei und nur zwei Werthe von x dazu, und diese sind $= y$ und $= \pi - y$, wenn y aus $Sin\,y = +\mu$ im ersten Quadranten genommen wird und $Sin\,x = +\mu$ gegeben ist; oder sie sind $= \pi + y$ und $= 2\pi - y$, wenn $Sin\,x = -\mu$ gegeben ist, aber y aus $Sin\,y = +\mu$ im ersten Quadranten genommen wird; — und eben so finden sich

b) zu dem gegebenen $Cos\,x = \pm\nu$, innerhalb der vier ersten Quadranten allemal zwei und nur zwei Werthe von x, welche $= y$ und $= 2\pi - y$ sind, wenn $Cos\,x = +\nu$ gegeben ist — welche aber $= \pi - y$ und $= \pi + y$ sind, wenn $Cos\,x = -\nu$ gegeben sein sollte, während y selbst allemal im ersten Quadranten und aus der Gleichung $Cos\,y = +\nu$ genommen wird.

III. Hat man aber zu $Sin\,x = \pm\mu$ und $Cos\,x = \pm\nu$, welche reell vorausgesetzt werden, den einen Werth φ von x gefunden, welcher innerhalb der vier ersten Quadranten (d. h. zwischen 0 und 2π) liegt, so drückt die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad x = 2n\pi + \varphi,$$

wenn n sowohl 0 als auch jede positive und auch jede negative ganze Zahl vorstellt, alle Werthe von x aus, welche den gegebenen Sinus und gleichzeitig auch den gegebenen Kosinus haben.

Denn es ist (nach §. 160. E. IV.) in der That

$$Sin(2n\pi+\varphi) = Sin\,\varphi \quad \text{und} \quad Cos(2n\pi+\varphi) = Cos\,\varphi;$$

also sind $2n\pi+\varphi$ unendlich viele Werthe von x, welche die gegebenen Sinus- und Kosinus-Werthe haben.

Gäbe es nun aber noch irgend einen Werth w von x, für welchen ebenfalls $Sin\,w$ und $Cos\,w$ die gegebenen wären, so hätte man

$$1)\quad Sin(2n\pi+\varphi) = Sin\,w \quad \text{und} \quad 2)\quad Cos(2n\pi+\varphi) = Cos\,w;$$

dann wäre aber auch (nach §. 158. E. IV.)

$$\begin{aligned} 3)\quad Sin(2n\pi+\varphi-w) = Sin(\varphi-w) &= Sin\,\varphi\cdot Cos\,w - Cos\,\varphi\cdot Sin\,w \\ \text{(nach 1. und 2.)}\quad &= Sin\,\varphi\cdot Cos\,\varphi - Cos\,\varphi\cdot Sin\,\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 4)\quad Cos(2n\pi+\varphi-w) = Cos(\varphi-w) &= Cos\,\varphi\cdot Cos\,w + Sin\,\varphi\cdot Sin\,w \\ \text{(nach 1. und 2.)}\quad &= (Cos\,\varphi)^2 + (Sin\,\varphi)^2 \\ &= +1; \end{aligned}$$

also wäre $2n\pi+\varphi-w$ nicht imaginär, weil der Sinus dieser Differenz $=0$ ist (nach §. 158. L.); folglich wäre der Werth w reell.

Ist aber w reell, so ist auch $2n\pi+\varphi-w$ reell, und da der Sinus dieses letztern Werthes $=0$, sein Kosinus aber $=+1$ ist, so kann (nach §. 158. D.) diese Differenz $2n\pi+\varphi-w$ nicht gleichzeitig >0 und $<2\pi$ sein und auch nicht $=2\mu\pi+y$, wo $y>0$ und $<2\pi$ ist, wenn unter μ entweder 0 oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl verstanden wird, — weil sonst der Sinus (positiv oder negativ aber) nicht 0 sein könnte, mit Ausnahme von $y=\pi$, wo aber dann der Kosinus nicht $=+1$, sondern $=-1$ sein würde. Also müßte (wegen 3. und 4.)

$$2n\pi + \varphi - w = 2\mu\pi$$

d. h.
$$w = 2(n-\mu)\pi + \varphi$$

d. h.
$$w = 2n\pi + \varphi$$

sein, weil $n-\mu$, eben so wie n allein, auch nichts weiter, ausdrückt, als die Reihe aller negativen und positiven ganzen Zahlen, von $-\infty$ an bis zu $+\infty$ hin, mit Inbegriff der Null. Jeder solche Werth w ist also unter den obigen (in ⊙ aufgestellten) Werthen von x bereits enthalten.

IV. Man findet daher auch alle Werthe von x, welche einen gegebenen reellen Sinuswerth und zu gleicher Zeit auch einen gegebenen reellen Kosinuswerth haben, — wenn man zu irgend einem Werth $2\mu\pi + \varphi$ von x, wo μ ganz oder Null ist, noch $2n\pi$ addirt und dabei unter n alle positiven und alle negativen ganzen Zahlen und die Null sich denkt.

Man nimmt sehr häufig den ersten Werth von x, nicht zwischen 0 und 2π, sondern lieber zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (den Werth $+\pi$ mit eingerechnet und den Werth $-\pi$ ausgeschlossen).

Ist nämlich $Sin\,x$ positiv gegeben, so liegt dieser erste Werth φ von x im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Quadranten, je nachdem $Cos\,x \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben ist. Ist aber $Sin\,x$ negativ gegeben $= -\mu$, so sucht man aus $Sin\,y = +\mu$ den Werth y im ersten Quadranten (aus der Tabelle), nimmt aber dann den gedachten ersten Werth φ von x, negativ und zwar $\varphi = \begin{Bmatrix}-y\\ -(\pi-y)\end{Bmatrix}$, je nachdem $Cos\,x \begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben ist.

Denn es ist dann

$$Sin\,\varphi = Sin(-y) = -Sin\,y = -\mu,$$

und

$$Cos\,\varphi = Cos(-y) = Cos\,y \quad \text{positiv}$$

oder

$$Cos\,\varphi = Cos[-(\pi-y)] = Cos(\pi-y) = -Cos\,y \quad \text{negativ}.$$

V. Ist aber $Sin\,x$, oder $Cos\,x$ allein und reell gegeben, so findet man zuerst (nach II. oder IV.) zwei Werthe φ und

φ' von x, welche innerhalb der vier ersten Quadranten oder welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen; und dann drücken

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad 2n\pi+\varphi \quad \text{und} \quad 2n\pi+\varphi',$$

wenn n sowohl 0 als auch jede positive und auch jede negative ganze Zahl vorstellt, — alle Werthe von x aus, welche diesen gegebenen Werth von $Sin\,x$, oder diesen gegebenen Werth von $Cos\,x$ haben; und außer diesen (in $\mathfrak{C}$ dargestellten) Werthen giebt es keinen weiteren Werth von x, weder einen reellen noch einen imaginären.

VI. Aus III. folgt aber nun als ein besonderer Fall, daß wenn

$$Sin\,x = 0 \quad \text{und} \quad Cos\,x = +1$$

gegeben sind, dann $x = 2n\pi$ alle Werthe von x ausdrückt, sobald unter n jede positive und jede negative ganze Zahl und auch die Null verstanden wird, und eben so folgt,

VII. daß, wenn

$$Sin\,x = 0 \quad \text{und} \quad Cos\,x = -1$$

gegeben sein sollten, dann $x = (2n+1)\pi$ alle Werthe von x ausdrücken würde; weil nun π der einzige, innerhalb der vier ersten Quadranten liegende Werth von x sein würde, während in VI. derselbe $= 0$ gewesen ist.

VIII. Ist aber

$$Sin\,x = +1 \quad \text{und} \quad Cos\,x = 0$$

gegeben, so ist der erste Werth von x, $= \frac{1}{2}\pi$, und alle Werthe von x sind nun ausgedrückt durch $(2n+\frac{1}{2})\pi$.

IX. Und ist endlich

$$Sin\,x = -1 \quad \text{und} \quad Cos\,x = 0$$

gegeben, so ist der erste Werth von x, $= \frac{3}{2}\pi$; und alle Werthe von x sind dann ausgedrückt in

$$x = (2n+\tfrac{3}{2})\pi \quad \text{oder} \quad x = (2n-\tfrac{1}{2})\pi,$$

in so ferne, wenn x um -2π vermehrt wird (wodurch $+\frac{3}{2}\pi$

in $-\frac{1}{2}\pi$ übergeht) die Anzahl der Werthe von x, dadurch keine Veränderung erleidet.

Anmerkung. Aus $e^{x \cdot i} = Cos\, x + i \cdot Sin\, x$ (§. 146. III.) folgt aber nun:

1) Sucht man alle Werthe von x, welche $e^{x \cdot i} = +1$ d. h. welche $Cos\, x + i \cdot Sin\, x = +1$, d. h. welche $Cos\, x = +1$ und $Sin\, x = 0$ machen, so findet man (nach VI.)

$$x = 2n\pi, \quad \text{also} \quad \text{I.} \quad e^{2n\pi \cdot i} = +1.$$

2) Sucht man aber alle Werthe von x, welche $e^{x \cdot i} = -1$, d. h. $Cos\, x = -1$ und $Sin\, x = 0$ machen, so findet man (aus VII.)

$$x = (2n+1)\pi, \quad \text{also} \quad \text{II.} \quad e^{(2n+1)\pi \cdot i} = -1.$$

Sucht man alle Werthe von x, welche $e^{x \cdot i} = i$, d. h. $e^{x \cdot \sqrt{(-1)}} = \sqrt{(-1)}$, d. h. $Cos\, x = 0$ und $Sin\, x = 1$ machen, so findet man (aus VIII.)

$$x = (2n+\tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{also} \quad \text{III.} \quad e^{(2n+\frac{1}{2})\pi \cdot i} = +i.$$

Und gerade so findet sich (aus IX.), oder auch dadurch, daß man in vorstehender III. $-i$ statt i schreibt, was allemal erlaubt ist,

$$e^{(2n+\frac{3}{2})\pi \cdot i} = -i, \quad \text{oder} \quad \text{IV.} \quad e^{(2n-\frac{1}{2})\pi \cdot i} = -i,$$

wenn nur immer unter n jede positive und jede negative ganze Zahl und die Null verstanden wird; weshalb man auch überall, sowohl in den hiesigen Resultaten, als auch in denen des Paragraphen, $-n$ statt n schreiben kann, auch $n \pm \mu$, oder $-n \pm \mu$ statt n setzen darf, sobald μ eine ganze Zahl ist; weil, wenn n so, wie verlangt wurde, gedacht wird, dann unter $-n$, unter $n \pm \mu$ und unter $-n \pm \mu$ auch nichts anders vorgestellt ist, als die vollständige Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ an bis zu $+\infty$ hin, mit Inbegriff der Null.

§. 164.

I. Die Werthe von x sind allemal imaginär, d. h. kein einziger ist reell, so oft *Sin* x oder *Cos* x selbst imaginär oder, wenn reell, doch (abgesehen vom Vorzeichen) >1 gegeben ist; weil im letztern Falle, wo $Sin\,x = \pm(1+p)$ gegeben ist, $Cos\,x = \sqrt{1-(Sin\,x)^2} = \sqrt{-2p-p^2} = i\cdot\sqrt{2p+p^2}$ imaginär sein würde, oder, wenn $Cos\,x = \pm(1+p)$ gegeben sein sollte, dann *Sin* x imaginär und von der Form $q\cdot i$ sein würde (in so ferne wir uns p positiv gedacht haben); und weil (nach §. 160. F.) jeder reelle Werth von x, stets einen reellen Werth von *Sin* x und auch von *Cos* x liefert.

II. Sind φ und w zwei imaginäre Werthe von x, welche den beiden Gleichungen

$$Sin\,x = \alpha+\beta\cdot i \quad \text{und} \quad Cos\,x = \gamma+\delta\cdot i$$

genügen, während α, β, γ, δ reell und so sind, daß

$$(\alpha+\beta\cdot i)^2+(\gamma+\delta\cdot i)^2 = 1,$$

d. h.
$$\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha\beta+\gamma\delta = 0$$

ist, — wo ferner β und δ nie zugleich den Werth 0 haben sollen (damit φ und w wirklich imaginär sind, nach I.), — so sind sie beide, wie wenn sie reell wären, allemal nur um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden.

Denn es folgt aus

$$Sin\,w = Sin\,\varphi \quad \text{und} \quad Cos\,w = Cos\,\varphi$$

genau wie im §. 159. III. gezeigt worden,

$$Sin(w-\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad Cos(w-\varphi) = +1,$$

also ist (nach §. 163. VI.) $\quad w-\varphi = 2n\pi$

und $\quad w = 2n\pi+\varphi.$

III. Man findet daher alle imaginären Werthe von x, welche $Sin\,x = \alpha+\beta\cdot i$ und zu gleicher Zeit $Cos\,x = \gamma+\delta\cdot i$ machen, wenn man einen einzigen φ derselben kennt und dann

$$x = 2n\pi+\varphi$$

nimmt. Der imaginäre Theil von x bleibt daher in allen Werthen von x stets derselbe, wie er in dem Werthe φ bereits vorhanden ist, während die reellen Theile je zweier Werthe von x, um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden sind und einer dieser reellen Theile (eines der Werthe von x) auch innerhalb der vier ersten Quadranten liegen muß, und derselbe, oder ein anderer, auch zwischen $-\pi$ und $+\pi$.

IV. Ist bloß $Sin\,x = \alpha + \beta \cdot i$ gegeben, so ist $Cos\,x = \pm(\gamma + \delta \cdot i)$, wo man sich γ positiv denken kann, während δ reell und so ist, wie solches aus

$$\gamma + \delta \cdot i = \sqrt{1 - (\alpha + \beta \cdot i)^2}$$

hervorgeht, wenn man γ positiv nimmt. Ist nun der zu $Sin\,x = \alpha + \beta \cdot i$ und $Cos\,x = \gamma + \delta \cdot i$ (nach IV.) gehörige eine Werth von x, $= \varphi$, so ist ein zu $Cos\,x = -(\gamma + \delta \cdot i)$ gehöriger Werth von x, $= \pi - \varphi$, (weil nach §. 160. I. $Cos(\pi - \varphi) = -Cos\,\varphi$ ist); und es sind daher nun alle Werthe von x ausgedrückt durch

$$x = 2n\pi + \varphi \quad \text{und} \quad x = (2n+1)\pi - \varphi.$$

Dabei kann der eine Werth φ stets so genommen werden, daß sein reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt oder $= \frac{1}{2}\pi$ ist.

Denn es giebt immer (nach III.) einen Werth $p + q \cdot i$ von x, dessen reeller Theil p zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt; ein anderer Werth von x ist dann $(\pi - p) - q \cdot i$, wie wir so eben gezeigt haben. Liegt nun p nicht zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, so liegt p entweder zwischen $-\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$, oder zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $+\pi$. — Im erstern Fall liegt $\pi - p$ zwischen 2π und $\frac{3}{2}\pi$, und wenn man von dem Werthe $(\pi - p) - q \cdot i$ von x, 2π subtrahirt, so bekommt man einen anderen Werth von x, dessen reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und 0 liegt, also auch zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. — Im anderen Falle (wenn p zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt) würde $\pi - p$ zwischen 0 und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen, so daß dann der Werth $(\pi - p) - q \cdot i$ bereits ein Werth von x sein würde, dessen reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

V. Das Analoge gilt, wenn $Cos\,x = \gamma + \delta \cdot i$ (wo γ und δ beliebig reell gedacht werden) allein gegeben ist, und daher $Sin\,x = \pm(\alpha + \beta \cdot i)$ zweiförmig (zweideutig) bleibt. — Ist dann

φ ein Werth von x, welcher zu $Sin\,x = \alpha + \beta \cdot i$ gehört, so ist $\pi + \varphi$ ein Werth von x, welcher dem $Sin\,x = -(\alpha + \beta \cdot i)$ entspricht (weil nach §. 160. III. $Sin(\pi + \varphi) = -Sin\,\varphi$ ist); und alle Werthe von x sind dann ausgedrückt durch

$$x = 2n\pi + \varphi \quad \text{und} \quad x = (2n+1)\pi + \varphi,$$

wenn nur überall unter n die vollständige Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis zu $+\infty$ mit Inbegriff der Null, verstanden wird.

Dabei kann der eine Werth φ allemal so genommen werden, daß sein reeller Theil zwischen 0 und π liegt.

Denn es giebt (nach III.) immer einen Werth $p + q \cdot i$ von x, dessen reeller Theil p zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Liegt nun p nicht zwischen 0 und π, so liegt p zwischen $-\pi$ und 0; und dann ist der andere Werth $\pi + (p + q \cdot i)$ d. h. $(\pi + p) + q \cdot i$ von x, so, daß sein reeller Theil $\pi + p$ zwischen 0 und π liegt

Wie man aber überhaupt einen Werth φ von x findet, welcher einem gegebenen imaginären $Sin\,x$ oder $Cos\,x$ entspricht, wird in der vierten Abtheilung dieses Kapitels gezeigt werden.

§. 165.

Weil

$$Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x} \quad \text{und} \quad Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sin\,x}$$

ist, so folgt sogleich d. h. weil $Sin(n\pi + z) = \pm Sin\,z$ und $Cos(n\pi + z) = \pm Cos\,z$ ist, je nachdem n $\begin{Bmatrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{Bmatrix}$, und weil dies auch noch gilt, wenn $-z$ statt z gesetzt wird, während $\pm Sin(-z) = \mp Sin\,z$ ist,

1) $Tg(n\pi + z) = Tg\,z$; 2) $Cotg(n\pi + z) = Cotg\,z$;

3) $Tg(n\pi - z) = -Tg\,z$; 4) $Cotg(n\pi - z) = -Cotg\,z$,

wenn n entweder 0 oder eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt. — Dies gilt, selbst wenn z imaginär ist.

Denkt man sich nun z positiv und im ersten Quadranten, so drückt $n\pi + z$ alle positiven Werthe aus, welche im 1^{ten}, 3^{ten}, 5^{ten}, 7^{ten}, ꝛc. $(4m+1)^{ten}$ und $(4m+3)^{ten}$ Quadranten liegen, so wie noch alle negativen Werthe, welche im $(-2)^{ten}$, $(-4)^{ten}$, $(-6)^{ten}$, ꝛc. ꝛc. $-(4m)^{ten}$ und $-(4m+2)^{ten}$ Quadranten *) liegen. Die Tangenten und Kotangenten aller dieser Werthe sind daher (nach 1. und 2.) positiv.

Ferner drückt $n\pi - z$ gleichzeitig alle positiven Werthe aus, welche im 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten}, ꝛc. $4m^{ten}$ und $(4m+2)^{ten}$ Quadranten liegen, so wie noch alle negativen Werthe, welche im $(-1)^{ten}$, $(-3)^{ten}$, $(-5)^{ten}$, ꝛc. ꝛc. $-(4m+1)^{ten}$ und $-(4m+3)^{ten}$ Quadranten liegen. Die Tangenten und Kotangenten aller dieser Werthe sind daher negativ.

In beiden Fällen kennt man also alle diese Werthe von $Tg\,x$ und $Cotg\,x$, sobald man dieselben in der Tabelle für alle Werthe von x zu stehen hat, welche im ersten Quadranten liegen.

§. 166.

I. Umgekehrt: Ist $Tg\,x = \pm\mu$ gegeben, so sucht man z im ersten Quadranten (aus der Tabelle) und so, daß

$$Tg\,z = +\mu$$

ist; dann sind $n\pi + z$ alle Werthe von x, wenn $Tg\,x = +\mu$ gegeben war; dagegen sind $n\pi - z$ alle Werthe von x, wenn $Tg\,x = -\mu$ gegeben war. Und dies gilt auch noch für $\mu = 0$, wo dann auch $z = 0$ ist.

II. Eben so sucht man, wenn $Cotg\,x = \pm\nu$ gegeben ist, zuerst einen Werth z im ersten Quadranten, so daß man $Cotg\,z = +\nu$ hat; dann sind $n\pi \pm z$ alle Werthe von x, welche $Cotg\,x = \pm\nu$ machen, wo die obern Vorzeichen zugleich gelten, oder beide unteren zugleich; wenn nur n sowohl 0 als

---

*) Dies ist so zu verstehen, daß man sagt: „eine Zahl liege im $(-r)^{ten}$ Quadranten", wenn man sagen will, daß sie negativ ist, aber abgesehen vom Vorzeichen, im r^{ten} Quadranten liegt.

auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt. Und dies gilt auch noch für $\nu = 0$, wo dann $z = \frac{1}{2}\pi$ ist.

Denn, ist $Tg\,x$ positiv gegeben und $= +\mu$, so sind $Sin\,x$ und $Cos\,x$ beide zugleich positiv oder beide zugleich negativ; im erstern Fall ist z (wenn $Tg\,z = +\mu$), im andern Fall ist $\pi+z$ ein Werth von x, welcher den gegebenen Sinus und gleichzeitig den gegebenen Kosinus hat. Folglich sind

$$2n\pi+z \quad \text{und} \quad 2n\pi+(\pi+z) \quad \text{d. h.} \quad (2n+1)\pi+z$$

d. h. $n\pi+z$ alle Werthe, welche diese Sinus und Kosinus, also auch diese Tangente haben (nach §. 163. III.).

Ist aber $Tg\,x$ negativ gegeben und $= -\mu$, so ist entweder $Sin\,x$ positiv und $Cos\,x$ negativ, oder es ist $Sin\,x$ negativ und $Cos\,x$ positiv; im erstern Fall (wenn z aus $Tg\,z = +\mu$ im ersten Quadranten genommen wird) ist $\pi-z$, im andern Fall $2\pi-z$ ein Werth von x; also sind (nach §. 163. III.)

$$2n\pi+(\pi-z) \quad \text{und} \quad 2n\pi+(2\pi-z)$$

d. h. $$(2n+1)\pi-z \quad \text{und} \quad (2n+2)\pi-z$$

d. h. $n\pi-z$ alle Werthe von x, welche dieselbe Tangente haben, wenn nur n sowohl 0 als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt weil dann n zu gleicher Zeit jede ungerade Zahl $2n+1$ und auch jede gerade Zahl $2n$ oder $2n+2$ vorstellt.

Das ganz Analoge läßt sich zum Beweise der Behauptung II. anführen.

Anmerkung. Da $Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x}$ und $Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sin\,x}$ ist und $\frac{1}{0}$ und $\frac{a}{0}$ (nach dem 1ten Th. d. W. §§. 35 u. 36.) im Kalkul unzulässige Formen sind, so kann $Tg\,x$ im Kalkul nicht beibehalten werden, so oft $Cos\,x = 0$, also wenn $x = (n+\frac{1}{2})\pi$ ist, während $Cotg\,x$ im Kalkul nicht beibehalten werden darf, so oft $Sin\,x = 0$ wird, d. h. so oft $x = n\pi$ ist.

Es haben daher

$$Tg\,(n+\tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{also auch} \quad Tg\,\tfrac{1}{2}\pi,$$

ferner

$$Cotg\,n\pi, \quad \text{also auch} \quad Cotg\,0 \text{ und } Cotg\,\pi$$

gar keinen Werth, d. h. es kann gar kein anderer Ausdruck für sie gesetzt werden, der ihnen gleich wäre, eben weil diese

Zeichen gar nicht im Kalkul zugelassen werden dürfen, also gewissermaaßen im Kalkul gar nicht existiren.

Wenn man daher früher und zuweilen jetzt noch sagt z. B. $Tg\frac{1}{2}\pi$, oder $Cotg\,0$ wäre unendlich groß, so beruht dies auf der so oft vorkommenden Verwechslung der 0 (Null), welche eine Subtraktion q—q vorstellt, mit dem Unendlich-kleinen $\frac{1}{\infty}$, welches eine Division ist. — Da nun der gesammte Kalkul es nur mit dem Verhalten der Operationen (d. h. der aus den Zahlen hervorgegangenen Verstandes-Thätigkeiten) zu einander, zu thun hat, so ist nichts natürlicher, als daß die gedachte, also wirkliche Subtraktion p—p oder 0, sich nach ganz andern Gesetzen richtet, als die gedachte, mithin wirkliche Division $\frac{1}{\infty}$, daß man daher beide im Allgemeinen ungestraft nie mit einander verwechseln darf, wenn es auch in besonderen Fällen, in Bezug auf die Anwendung des Kalkuls zur Vergleichung der Größen, sehr häufig erlaubt sein kann (da, wo es jedesmal im Besonderen nachgewiesen ist), die 0 (Null) statt des Unendlich-Kleinen $\frac{1}{\infty}$, oder oft auch statt des nur sehr Kleinen $\frac{1}{p}$ zu setzen.

Wenn aber $Cotg\,0$ im Kalkul nicht zulässig ist, so ist doch, wenn h positiv und unendlich-klein gedacht wird,

$$Cotg(\pm h) = \frac{Cos(\pm h)}{Sin(\pm h)} = \frac{Cos\,h}{\pm Sin\,h} = \frac{1-\frac{1}{2}h^2+\cdots}{\pm(h-\frac{1}{6}h^3+\cdots)}$$

d. h.

$$Cotg(\pm h) = \pm\frac{1}{h} = \pm\infty,$$

während —h der Null in der Reihe der reellen Werthe (von $-\infty$ zu $+\infty$ hin) dicht vorangeht, und +h ihr dicht folgt. — Man findet also, daß $Cotg\,x$ für Werthe von x, welche der Null dicht anliegen unendlich-groß ist, aber negativ oder positiv, je nachdem x dem Werthe 0 dicht vorangeht oder dicht folgt.

Eben so ist $Tg\frac{1}{2}\pi$ im Kalkul unzulässig; aber

$$Tg(\tfrac{1}{2}\pi\pm h)=\frac{Sin(\frac{1}{2}\pi\pm h)}{Cos(\frac{1}{2}\pi\pm h)}=\frac{Cos\,h}{\mp Sin\,h}=\frac{1-\frac{1}{2}h^2+\cdots}{\mp(h-\frac{1}{6}h^3+\cdots)}$$

d. h.

$$Tg(\tfrac{1}{2}\pi\pm h)=\mp\frac{1}{h}=\mp\infty.$$

Es ist also $Tg\,x$ unendlich-groß für Werthe von x, welche dem Werthe von $\frac{1}{2}\pi$ dicht anliegen; sie ist aber positiv unendlich, wenn x dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ dicht vorangeht, und negativ unendlich, wenn x dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ dicht folgt, in der stets stetig wachsend gedachten Reihe aller reellen (und hier bloß aller positiven) Werthe von x.

Die $Sec\,x$ ist mit $Tg\,x$ zugleich im Kalkul unzulässig; und eben so die $Cosec\,x$ mit $Cotg\,x$ zugleich, weil $Sec\,x=\frac{1}{Cos\,x}$ und $Cosec\,x=\frac{1}{Sin\,x}$ ist.

§. 167.

Soll $Tg\,x$ oder $Cotg\,x$ für einen imaginären Werth $p+q\cdot i$ von x „ausgerechnet" d. h. auf die Form $\alpha+\beta\cdot i$ gebracht werden, so hat man zunächst

$$Tg(p+q\cdot i)=\frac{Sin(p+q\cdot i)}{Cos(p+q\cdot i)}=\frac{Sin\,p\cdot Cos(q\cdot i)+Cos\,p\cdot Sin(q\cdot i)}{Cos\,p\cdot Cos(q\cdot i)-Sin\,p\cdot Sin(q\cdot i)}$$

d. h.

$$Tg(p+q\cdot i)=\frac{Tg\,p+Tg(q\cdot i)}{1-Tg\,p\cdot Tg(q\cdot i)},$$

während $Tg(q\cdot i)=\frac{Sin(q\cdot i)}{Cos(q\cdot i)}=i\cdot\frac{e^q-e^{-q}}{e^q+e^{-q}}=i\cdot f_q$

gefunden wird. Setzt man diesen Werth statt $Tg(q\cdot i)$ und multiplicirt man Zähler und Nenner mit $1+Tg\,p\cdot Tg(q\cdot i)$, um die Wurzel (i) aus dem Nenner wegzuschaffen, so erhält man

$$Tg(p+q\cdot i) = \frac{Tg\,p\cdot(1-f_q{}^2)}{1+(Tg\,p)^2\cdot f_q{}^2} + i\cdot\frac{(1+Tg\,p^2)\cdot f_q}{1+(Tg\,p)^2\cdot f_q{}^2},$$

wenn der Kürze wegen

$$\frac{e^q-e^{-q}}{e^q+e^{-q}} \quad \text{durch } f_q \text{ bezeichnet wird;}$$

oder, wenn man diesen Werth substituirt, weil

$$1-f_q{}^2 = \frac{4}{(e^q+e^{-q})^2} = \frac{4}{e^{2q}+e^{-2q}+2} \quad \text{und}$$

$$1+(Tg\,p)^2 = \frac{1}{(Cos\,p)^2} \quad \text{ist,}$$

$$\text{I.} \quad Tg(p+q\cdot i) = \frac{4Sin\,p\cdot Cos\,p}{(e^q+e^{-q})^2(Cos\,p)^2+(e^q-e^{-q})^2(Sin\,p)^2}$$
$$+i\cdot\frac{e^{2q}-e^{-2q}}{(e^q+e^{-q})^2\cdot(Cos\,p)^2+(e^q-e^{-q})^2\cdot(Sin\,p)^2}.$$

Und eben so findet sich

$$\text{II.} \quad Cotg(p+q\cdot i) = \frac{4Sin\,p\cdot Cos\,p}{(e^q-e^{-q})^2(Cos\,p)^2+(e^q+e^{-q})^2(Sin\,p)^2}$$
$$-i\cdot\frac{e^{2q}-e^{-2q}}{(e^q-e^{-q})^2(Cos\,p)^2+(e^q+e^{-q})^2(Sin\,p)^2}.$$

§. 167bis.

I. Sollte $Tg\,x$ oder $Cotg\,x$ imaginär sein, so ist entweder $Sin\,x$ oder $Cos\,x$ imaginär, oder beide; folglich sind dann auch die zugehörigen Werthe von x imaginär.

II. Sind aber w und φ zwei imaginäre Werthe von x, welche eine und dieselbe Tangente, oder eine und dieselbe Kotangente haben, so sind beide nothwendig um $n\pi$ verschieden, wo n entweder 0 oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Denn da $Tg\,w = Tg\,\varphi$ ist, so findet sich $Tg(w-\varphi)=0$; folglich ist $w-\varphi = n\pi$, wo n irgend eine ganze Zahl oder 0 ist, weil $n\pi$ alle Werthe enthält, deren Tangente $=0$ ist (nach §. 166. I.).

Ist aber $Cotg\,w = Cotg\,\varphi$, so ist, weil im Allgemeinen

$$Cotg\,(w-\varphi) = \frac{Cotg\,w \cdot Cotg\,\varphi + 1}{Cotg\,w - Cotg\,\varphi}$$

gefunden wird, dasmal der Nenner von $Cotg(w-\varphi)$ der Null gleich, während der Zähler nicht Null ist. Dies ist (nach Anmerkung zu §. 166.) nur der Fall, wenn $w-\varphi = n\pi$ ist.

III. Die unendlich vielen imaginären Werthe von x,* welche einem gegebenen imaginären Werth von $Tg\,x$ oder $Cotg\,x$ zugehören, sind also in ihrem imaginären Theil nie von einander verschieden, sondern nur in ihrem reellen Theile und da nur um eine ganze Anzahl von π, so daß immer ein Werth von x existiren muß, dessen reeller Theil zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, oder $\frac{1}{2}\pi$ selbst ist.

Wie aber diese imaginären Werthe von x gefunden werden, lehrt die vierte Abtheilung dieses Kapitels.

§. 168.

Betrachten wir jetzt noch die beiden Ausdrücke

$$\frac{e^q + e^{-q}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^q - e^{-q}}{2}$$

wovon der eine (nach §. 162.) $= Cos(q \cdot i)$, der andere aber $= -i \cdot Sin(q \cdot i)$ ist, und welche auch, da

$$e^q = S\left[\frac{q^a}{a!}\right] \quad \text{und} \quad e^{-q} = S\left[(-1)^a \frac{q^a}{a!}\right]$$

ist, in die beiden unendlichen Reihen, nämlich bezüglich in die Reihen

$$S\left[\frac{q^{2b}}{(2b)!}\right] \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} + \frac{q^6}{6!} + \text{in inf.}$$

und

$$S\left[\frac{q^{2b+1}}{(2b+1)!}\right] \quad \text{oder} \quad q + \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} + \frac{q^7}{7!} + \text{in inf.}$$

umgeformt werden können. — Dieselben beiden Funktionen bedürfen einer tabellarischen Ausrechnung ihrer reellen Werthe,

wenn man *Sin*, *Cos*, *Tg* und *Cotg* von $p+q\cdot i$ bequem und schnell „ausgerechnet" sehen will, und haben, eben ihres Ursprungs wegen, mit $Sin\,x$ und $Cos\,x$ analoge Eigenschaften, welche letzteren auch wieder zur tabellarischen Ausrechnung ihrer reellen Werthe benutzt werden können. Wir wollen dies hier noch näher nachweisen.

Die beiden Funktionen von x, nämlich

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

wollen wir von nun an bezeichnen durch bezüglich

$$S_x \quad \text{und} \quad K_x.$$

Daraus folgt:

$$\text{I.} \quad S_x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] = \frac{1}{i}\cdot Sin(x\cdot i);$$

$$\text{II.} \quad K_x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] = Cos\,(x\cdot i).$$

Ferner ergiebt sich (analog dem §. 147.)

$$\text{III.} \quad S_{x\pm z} = S_x\cdot K_z \pm K_x\cdot S_z;$$

$$\text{IV.} \quad K_{x\pm z} = K_x\cdot K_z \pm S_x\cdot S_z,$$

wo alle obern Vorzeichen zugleich gelten oder alle untern zugleich.

Denn es ist

$$K_{x\pm z} = Cos\,(x\cdot i\pm z\cdot i) = Cos\,(x\cdot i)\cdot Cos\,(z\cdot i)\mp Sin\,(x\cdot i)\cdot Sin\,(z\cdot i)$$
$$= K_x\cdot K_z \mp i\cdot S_x\cdot i\cdot S_z = K_x\cdot K_z \pm S_x\cdot S_z;$$

eben so aber auch ist

$$S_{x\pm z} = \frac{1}{i}Sin\,(x\cdot i\pm z\cdot i) = \frac{1}{i}Sin\,(x\cdot i)\cdot Cos\,(z\cdot i)\pm\frac{1}{i}Cos\,(x\cdot i)\cdot Sin\,(z\cdot i)$$
$$= S_x\cdot K_z \pm K_x\cdot S_z. \text{*)}$$

---

*) Man kann auch aus I. und II. ableiten:

$$e^x = K_x + S_x,$$

$$e^{-x} = K_x - S_x;$$

Ferner findet sich

V. $(K_x)^2 - (S_x)^2 = 1$,

weil $(K_x)^2 = [Cos(x \cdot i)]^2$ und $(S_x)^2 = -[Sin(x \cdot i)]^2$ ist.

Daraus folgt wieder, wenn man in III. und IV. x statt z setzt:

VI. $S_{2x} = 2S_x \cdot K_x$ und $S_0 = 0$ *);

VII. $K_{2x} = (K_x)^2 + (S_x)^2$ und $K_0 = 1$ *).

Direkt aus den Definitionen (in I. u. II.) geht noch hervor:

VIII. $S_{-x} = -S_x$ und $K_{-x} = K_x$.

Addirt man die III. und IV. zu und von einander, so erhält man noch

IX. $S_{x+z} + S_{x-z} = 2S_x \cdot K_z$;

X. $S_{x+z} - S_{x-z} = 2K_x \cdot S_z$;

XI. $K_{x+z} + K_{x-z} = 2K_x \cdot K_z$;

XII. $K_{x+z} - K_{x-z} = 2S_x \cdot S_z$,

woraus, wenn man $x+z = a$ und $x-z = b$ setzt, sich noch ergiebt:

XIII. $S_a + S_b = 2S_{\frac{1}{2}(a+b)} \cdot K_{\frac{1}{2}(a-b)}$;

XIV. $S_a - S_b = 2K_{\frac{1}{2}(a+b)} \cdot S_{\frac{1}{2}(a-b)}$;

---

dann die Gesetze der Potenzen nehmen, d. h.

$$e^{x \pm z} = e^x \cdot e^{\pm z}$$

und $$e^{-(x \pm z)} = e^{-x} \cdot e^{\mp z},$$

daraus durch Addition und Subtraktion finden:

$$2 \cdot K_{x \pm z} = e^x \cdot e^{\pm z} + e^{-x} \cdot e^{\mp z}$$

$$2 \cdot S_{x \pm z} = e^x \cdot e^{\pm z} - e^{-x} \cdot e^{\mp z};$$

hier herein aber statt der Potenzen ihre Ausdrücke in die K- und S-Funktionen substituiren.

*) Diese Resultate zur Rechten ergeben sich auch unmittelbar aus den Definitionen I. und II.

XV. $K_a + K_b = 2K_{\frac{1}{2}(a+b)} \cdot K_{\frac{1}{2}(a-b)}$;

XVI. $K_a - K_b = 2S_{\frac{1}{2}(a+b)} \cdot S_{\frac{1}{2}(a-b)}$.

Aus den Gleichungen V. und VII. folgt auch noch

XVII. $K_x = \sqrt{\frac{K_{2x}+1}{2}}$ oder $K_{\frac{1}{2}x} = \sqrt{\frac{K_x+1}{2}}$

und

XVIII. $S_x = \sqrt{\frac{K_{2x}-1}{2}}$ oder $S_{\frac{1}{2}x} = \sqrt{\frac{K_x-1}{2}}$.

Man sieht jedoch hinreichend, daß und warum die Funktionen S_x und K_x ganz analoge Eigenschaften haben, wie die Funktionen *Sin* x und *Cos* x; und wir wollen uns daher aller weiteren Entwickelungen enthalten.

Dagegen müssen wir noch den Gang der reellen Werthe der beiden Funktionen S_x und K_x betrachten, die solche für alle stetig wachsend gedachten reellen Werthe von x annehmen, und zwar brauchen wir, wie bei *Sin* x und *Cos* x, nur die von 0 bis zu $+\infty$ stetig wachsenden positiven Werthe von x in's Auge zu fassen, eben weil

$$S_{-x} = -S_x \quad \text{und} \quad K_{-x} = K_x$$

gefunden worden ist.

§. 169.

Nach den Definitionen §. 168. I. und II. hat man

1) $S_h = h + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^7}{7!} +$ in inf.

2) $K_h = 1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^6}{6!} +$ in inf.

Und so findet sich wegen

$$S_{x+h} = S_x \cdot K_h + K_x \cdot S_h$$

und $K_{x+h} = K_x \cdot K_h + S_x \cdot S_h$,

augenblicklich, sobald statt K_h und S_h die Reihen gesetzt werden, welche diese Zeichen vorstellen,

3) $S_{x+h} = S_x + K_x \cdot h + S_x \cdot \frac{h^2}{2!} + K_x \cdot \frac{h^3}{3!} + S_x \cdot \frac{h^4}{4!} +$ in inf.

4) $K_{x+h} = K_x + S_x \cdot h + K_x \cdot \frac{h^2}{2!} + S_x \cdot \frac{h^3}{3!} + K_x \cdot \frac{h^4}{4!} +$ in inf.

Da nun die Reihen S_x und K_x zu denen gehören, welche nach §. 128. Nr. 4. für jeden reellen Werth von x konvergent sind, so sind die Koeffizienten der Entwickelungen in NNr. 3. u. 4. alle für jeden Werth von x konvergent; und die Reihe der reellen Werthe von S_x und K_x, für alle reellen Werthe von x, geht also mit x zugleich stetig fort. (§. 131.)

Und da S_x für $x = 0$, selbst der Null gleich wird, und für jeden positiven Werth von x nothwendig positiv werden muß, weil alle Glieder der Reihe S_x addirte sind; da ferner $K_0 = 1$ ist, und K_x für jeden positiven Werth von x positiv und >1 werden muß, — eben auch, weil alle Glieder dieser Reihe addirte sind, — so folgt aus dem Umstande, daß in den Entwickelungen von S_{x+h} und K_{x+h} die zwei ersten Glieder bezüglich $S_x + K_x \cdot h$ und $K_x + S_x \cdot h$ sind, (nach §. 131.), daß die Werthe der Reihen S_x und K_x, während x von 0 an bis zu $+\infty$ hin stetig wachsend gedacht wird, ebenfalls stetig mit wachsen, ohne alle Unterbrechung bis in's Unendliche fort; die erstere von 0 an, die andere von 1 an.

Und weil $S_{-x} = -S_x$ ist, so nimmt die Reihe S_x von 0 an stetig ab, durch alle negativen Werthe hindurch bis zu $-\infty$ hin, wenn x von 0 an bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmend gedacht wird.

Und da endlich $K_{-x} = K_x$ ist, so wachsen die Werthe von K_x, von 1 an bis in's Unendliche, alle dazwischen liegenden (positiven) Werthe nach und nach annehmend, während x von 0 an bis in's negative Unendliche stetig abnimmt.

Die Funktion K_x hat also für $x = 0$ einen kleinsten Werth und dieser ist $= 1$. — Die Funktion S_x dagegen hat keinen kleinsten Werth, sondern sie wächst mit x zugleich stetig und

ohne Unterbrechung, von $-\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $+\infty$ hin.

Und weil $i \cdot S_x = Sin(q \cdot i)$ und $K_x = Cos(q \cdot i)$ ist, so bedarf man einer tabellarischen Aufstellung der reellen Werthe von S_x und K_x, wenn man $Sin\,x$ und $Cos\,x$ für imaginäre Werthe von x (sowohl für $x = q \cdot i$, als auch für $x = p + q \cdot i$) eben so bequem aus einer Tabelle entnehmen will, als dies für die reellen Werthe von x geschieht.

Den Anfang einer solchen Tabelle hat Gudermann in Crelle's Journal der Mathem. gemacht, welche Tabelle auch in besonderen Abdrücken in den Buchhandel gekommen ist.

Anmerkung. Es ist aber nun, „ausgerechnet":

$$Sin(p+q \cdot i) = Sin\,p \cdot Cos(q \cdot i) + Cos\,p \cdot Sin(q \cdot i),$$

d. h.

$$\text{I.} \qquad Sin(p+q \cdot i) = K_q \cdot Sin\,p + i \cdot S_q \cdot Cos\,p$$

und $$Cos(p+q \cdot i) = Cos\,p \cdot Cos(q \cdot i) - Sin\,p \cdot Sin(q \cdot i),$$

d. h.

$$\text{II.} \qquad Cos(p+q \cdot i) = K_q \cdot Cos\,p - i \cdot S_q \cdot Sin\,p.$$

Und (aus §. 167.)

$$\text{III.} \qquad Tg(p+q \cdot i) = \frac{Sin\,p \cdot Cos\,p}{K_q{}^2(Cos\,p)^2 + S_q{}^2(Sin\,p)^2} + i \cdot \frac{S_q \cdot K_q}{K_q{}^2(Cos\,p)^2 + S_q{}^2(Sin\,p)^2},$$

$$\text{IV.} \qquad Cotg(p+q \cdot i) = \frac{Sin\,p \cdot Cos\,p}{S_q{}^2(Cos\,p)^2 + K_q{}^2(Sin\,p)^2} - i \cdot \frac{S_q \cdot K_q}{S_q{}^2(Cos\,p)^2 + K_q{}^2(Sin\,p)^2}.$$

§. 170.

Eine der wichtigsten Anwendungen, welche man von den Kosinus- und Sinus-Reihen machen kann, ist die, daß mittelst derselben jede imaginäre Zahl von der Form $p + q \cdot i$, welche

eine Summe ist, allemal sogleich in ein Produkt umgeformt werden kann; was für die Beantwortung einer größeren Anzahl von Fragen ungemein wichtig ist.

Man kann nämlich eine positive Zahl r, und einen Werth x allemal so finden, daß

1) $p+q\cdot i = r\cdot(Cos\,x+i\cdot Sin\,x)$

wird. Man hat nämlich die beiden Gleichungen

2) $p = r\cdot Cos\,x$ und 3) $q = r\cdot Sin\,x$;

eliminirt man nun x mittelst der Hilfs-Gleichung $(Sin\,x)^2+(Cos\,x)^2 = 1$; d. h. quadrirt und addirt man die letzteren beiden Gleichungen, so erhält man augenblicklich $p^2+q^2 = r^2$, also

4) $r = +\sqrt{p^2+q^2}$,

wo wir absichtlich den positiven Werth der Quadratwurzel nehmen. Dieselben beiden Gleichungen liefern dann sogleich noch dazu:

5) $Cos\,x = \frac{p}{r}$ und 6) $Sin\,x = \frac{q}{r}$.

Da die Zähler p und q eben so gut positiv wie negativ gegeben sein können, während der Nenner r positiv gefunden worden ist, so sind $Cos\,x$ und $Sin\,x$, ganz unabhängig von einander, bald positiv, bald negativ (bald Null) und es findet sich also immer ein Werth φ von x, der im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\ \text{dritten}\end{Bmatrix}$ Quadranten liegt, wenn p und q beide $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben sind, der aber im $\begin{Bmatrix}\text{zweiten}\\ \text{vierten}\end{Bmatrix}$ Quadranten liegt, je nachdem p $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, q aber $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben ist.

Und hat man diesen einzigen Werth φ von x, gefunden, so drückt die Gleichung

7) $x = 2n\pi+\varphi$

alle Werthe aus, welche x haben kann und hat (nach §. 163. III.), wenn nur n sowohl Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt.

Sind aber p und q positiv, so liegt φ im 1ten Quadranten, ist p negativ und q positiv, so liegt φ im 2ten Quadranten, ist p positiv und q negativ, so liegt φ im 4ten Quadranten, und sind p und q negativ, so liegt φ im 3ten Quadranten. Subtrahirt man jedoch, so oft φ im 4ten oder 3ten Quadranten liegt, 2π davon (oder addirt man -2π), wodurch ein Werth von x erhalten wird, welcher noch immer genau denselben Kosinus und denselben Sinus hat, welcher aber jetzt negativ ist und dabei, abgesehen vom Vorzeichen, bezüglich im 1ten oder 2ten Quadranten liegt, so kann man auch diesen letztern (negativen) Werth in 7.) statt φ nehmen.

Die Gleichung 7.) giebt daher ebenfalls alle Werthe von x, wenn man φ stets nur im ersten oder zweiten Quadranten nimmt, je nachdem p positiv oder negativ ist, — denselben Werth φ dagegen mit q zugleich positiv oder negativ sein läßt. Der Werth φ liegt also nun immer zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (kann aber auch selbst $=\pi$ sein), und diesen wollen wir künftig unter φ in der Gleichung 7. verstehen.

Man hat also gefunden

$$\text{I.}\qquad p+q\cdot i = r\cdot[\mathit{Cos}(2n\pi+\varphi)+i\cdot\mathit{Sin}(2n\pi+\varphi)],$$

wenn r und φ gegeben sind durch die Gleichungen

$$\text{II.}\ r=+\sqrt{p^2+q^2};\quad \text{III.}\ \mathit{Cos}\,\varphi=\frac{p}{r}\ \text{und IV.}\ \mathit{Sin}\,\varphi=\frac{q}{r};$$

wenn φ eindeutig und zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommen wird und wenn n die Null und jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt. Dabei ist φ mit q zugleich positiv oder negativ, und, abgesehen vom Vorzeichen, im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Quadranten, je nachdem p $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben ist.

Nun ist aber (nach §. 145.)

8) $Cos\,x + i \cdot Sin\,x = e^{x \cdot i}$;

also verwandelt sich die Gleichung I. noch in die nachstehende

V. $p + q \cdot i = r \cdot e^{(2n\pi + \phi) \cdot i}$,

wenn nur r und φ und n die so eben ausgesprochene Bedeutung haben.

Statt der Gleichungen I. und V. kann man natürlich auch die einfacheren nehmen, nämlich (für $n = 0$)

VI. $p + q \cdot i = r \cdot (Cos\,\varphi + i \cdot Sin\,\varphi) = r \cdot e^{\phi \cdot i}$,

wo r und φ die oben ausgesprochene Bedeutung haben *).

Diese Umformung in IV., V. und VI. ist eine der wichtigsten. — Man nennt dabei die positive Zahl r den Model des imaginären Ausdrucks $p + q \cdot i$; dagegen wird φ oder $2n\pi + \varphi$ der zu demselben gehörige Bogen genannt.

§. 171.

Diese Umformung V. ist besonders für die „Ausrechnung" der, aus imaginären Zahlen zusammengesetzten Ausdrücke wichtig.

A. Wir haben z. B. im I. Th. d. W. das Produkt $(p + q \cdot i)(p' + q' \cdot i)$, den Quotienten $\frac{p + q \cdot i}{p' + q' \cdot i}$ und die Quadratwurzel $\sqrt{p + q \cdot i}$ „ausgerechnet", d. h. auf dieselbe Form $\alpha + \beta \cdot i$ gebracht; — mit den jetzigen Mitteln geschieht dies viel leichter. — Man verwandelt

$$p + q \cdot i \quad \text{in} \quad r \cdot e^{\phi \cdot i}$$

$$\text{und} \quad p' + q' \cdot i \quad \text{in} \quad r' \cdot e^{\phi' \cdot i}$$

und hat dann sogleich:

*) Dividirt man die V. durch die VI., so wird man wieder zur Gleichung I. der Anmerkung zu §. 163. geführt.

1) $(p+q\cdot i)(p'+q'\cdot i) = rr'\cdot e^{(\varphi+\varphi')\cdot i}$
$$= rr'\cdot[Cos(\varphi+\varphi')+i\cdot Sin(\varphi+\varphi')];$$

2) $\dfrac{p+q\cdot i}{p'+q'\cdot i} = \dfrac{r}{r'}\cdot e^{(\varphi-\varphi')\cdot i}$
$$= \frac{r}{r'}\cdot[Cos(\varphi-\varphi')+i\cdot Sin(\varphi-\varphi')].$$

Für $r = r' = 1$, gehen diese Gleichungen 1.) u. 2.) über in

3) $(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)(Cos\,\psi+i\cdot Sin\,\psi)$
$$= Cos(\varphi+\psi)+i\cdot Sin(\varphi+\psi),$$

4) $\dfrac{Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi}{Cos\,\psi+i\cdot Sin\,\psi} = Cos(\varphi-\psi)+i\cdot Sin(\varphi-\psi).$

B. Ist m positiv oder negativ ganz oder Null, so hat man bekanntlich (nach §. 143. III.)
$$(e^{\varphi\cdot i})^m = e^{m\varphi\cdot i},$$
also auch

I. $(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)^m = Cos(m\varphi)+i\cdot Sin(m\varphi)$

und (wegen §. 170. VI.)

II. $(p+q\cdot i)^m = r^m\cdot e^{m\varphi\cdot i} = r^m\cdot[Cos(m\varphi)+i\cdot Sin(m\varphi)]$,

wenn nur r und φ der Model und der zugehörige Bogen des imaginären Ausdrucks $p+q\cdot i$ sind.

Mittelst dieser Formel II. hat man also sogleich die m^{te} Potenz von $p+q\cdot i$ „ausgerechnet" d. h. auf die Form $\alpha+\beta\cdot i$ gebracht, während man außerdem den binomischen Lehrsatz hätte dazu anwenden müssen und dann das Endresultat in einer sehr wenig brauchbaren Form erhalten haben würde. — Nur muß der Exponent m einer Differenz ganzer Zahlen gleich sein.

C. Ist eine unendliche Reihe

1) $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+$ in inf.

für $x<\alpha$ konvergent, sobald alle Glieder als positive gedacht werden, während α irgend ein gegebener positiver Werth ist, — so ist dieselbe unendliche Reihe allemal für $x = p+q\cdot i$ konvergent, sobald der Model r dieser imaginären Zahl, $<\alpha$ ist.

Denn es wird die gedachte unendliche Reihe für $x = p+q \cdot i$ (nach B. II.)

$$2) \cdots \quad = a_0 + a_1 \cdot r \cdot Cos\,\varphi + a_2 \cdot r^2 \cdot Cos\,2\varphi + a_3 \cdot r^3 \cdot Cos\,3\varphi + \text{ in inf.}$$
$$+ i \cdot (a_1 \cdot r \cdot Sin\,\varphi + a_2 \cdot r^2 \cdot Sin\,2\varphi + a_3 \cdot r^3 \cdot Sin\,3\varphi + \text{ in inf.})$$

und da die einzelnen Glieder dieser beiden Reihen (abgesehen vom Vorzeichen) offenbar kleiner (oder gleich) sind den einzelnen Gliedern

$$a_1 r, \quad a_2 r^2, \quad a_3 r^3, \quad a_4 r^4, \quad \cdots,$$

(weil jeder *Sin* und *Cos*, <1 ist), die Summe dieser letztern aber, der Voraussetzung zu Folge, wenn sie auch bis in's Unendliche genommen werden, einen bestimmten endlichen Werth hat, so haben auch die letztern beiden unendlichen Reihen nothwendig einen bestimmten endlichen Werth.

D. Ist die unendliche Reihe in C. 1. für jeden Werth von x konvergent, wenn auch alle Glieder positiv genommen werden, so sind auch die beiden unendlichen Reihen in C. 2. für jeden Werth von r konvergent; also ist dann auch die Reihe C. 1. für jeden imaginären Werth $p+q \cdot i$ von x konvergent.

Deshalb sind namentlich die beiden durch $Sin\,x$ und $Cos\,x$ bezeichneten unendlichen Reihen

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

auch für jeden imaginären Werth $p+q \cdot i$ von x allemal konvergent.

E. Um noch eine weitere Anwendung dieser Umformung zu zeigen, wollen wir jetzt

die beiden Werthe von $\sqrt{p+q \cdot i}$,

die drei Werthe von $\sqrt[3]{p+q \cdot i}$,

und die vier Werthe von $\sqrt[4]{p+q \cdot i}$

„ausrechnen", d. h. in die Form $\alpha + \beta \cdot i$ umformen, unter der Voraussetzung, daß p und q beliebige reelle Zahlen vorstellen.

Es ist (nach §. 143. III.) für jedes allgemeine x,

$$(e^{\frac{1}{2}x})^2 = e^x; \qquad (e^{\frac{1}{3}x})^3 = e^x \qquad \text{und} \qquad (e^{\frac{1}{4}x})^4 = e^x;$$

also ist nach den Definitionen der allgemeinen Quadrat-, Kubik- und vierten Wurzel (im I. Th. d. W.)

1) $e^{\frac{1}{2}(2n\pi+\varphi)\cdot i}$ ein Werth von $\sqrt{e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}}$ d. h. von $\sqrt{e^{\varphi\cdot i}}$

2) $e^{\frac{1}{3}(2n\pi+\varphi)\cdot i}$ " " " $\sqrt[3]{e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}}$ d. h. von $\sqrt[3]{e^{\varphi\cdot i}}$

und

3) $e^{\frac{1}{4}(2n\pi+\varphi)\cdot i}$ " " " $\sqrt[4]{e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}}$ d. h. von $\sqrt[4]{e^{\varphi\cdot i}}$,

wenn statt n entweder Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl gesetzt wird; in so ferne $e^{(2h\pi+\varphi)\cdot i} = e^{\varphi\cdot i}$ und $e^{2n\pi\cdot i} = 1$ ist, so lange nur n entweder Null oder jede positive und negative ganze Zahl vorstellt.

Hat man nun $p+q\cdot i$ (nach §. 170.) in das Produkt $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ oder $r\cdot e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}$ umgeformt, so folgt aus der Gleichung

$$p+q\cdot i = r\cdot e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}$$

sogleich

$$4)\quad \sqrt[m]{p+q\cdot i} = \sqrt[m]{r}\cdot\sqrt[m]{e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}}$$

für $m=2$, $m=3$ und $m=4$; (aber zur Zeit noch nicht für eine größere ganze Zahl als Werth von m, weil wir bis jetzt die allgemeine $\sqrt[m]{a}$, wo a beliebig ist, für $m>4$ noch nicht eingeführt haben). — Diese Gleichung 4.) giebt die 2, 3 oder 4 Werthe, welche die Wurzel zur Linken hat, wenn man einen einzigen der Werthe von $\sqrt[m]{r}$ (etwa den absoluten Werth, dessen Auffindung in den Elementen gelehrt wird) mit allen 2, 3 oder 4 Werthen von $\sqrt[m]{e^{(2n\pi+\varphi)\cdot i}}$ multiplicirt, wie im I. Th. d. W. nachgewiesen worden ist. Nimmt man daher 1.—3.) zu Hilfe, so giebt die 4.)

$$5)\quad \sqrt{p+q\cdot i} = \sqrt{r}\cdot e^{(n\pi+\frac{1}{2}\varphi)\cdot i} = \sqrt{r}\cdot\left[Cos\,(n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)+i\cdot Sin\,(n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi)\right],$$

$$6)\quad \sqrt[3]{p+q\cdot i} = \sqrt[3]{r}\cdot e^{\frac{2n\pi+\varphi}{3}\cdot i} = \sqrt[3]{r}\cdot\left[Cos\,\frac{2n\pi+\varphi}{3}+i\cdot Sin\,\frac{2n\pi+\varphi}{3}\right],$$

$$7)\quad \sqrt[4]{p+q\cdot i} = \sqrt[4]{r}\cdot e^{\frac{2n\pi+\varphi}{4}\cdot i} = \sqrt[4]{r}\cdot\left[Cos\,\frac{2n\pi+\varphi}{4}+i\cdot Sin\,\frac{2n\pi+\varphi}{4}\right],$$

so daß die Gleichungen zunächst nur in dem Sinne gelten, daß

rechts jedesmal, für jeden dem n gegebenen ihm zukommenden Werth, ein Werth der Wurzel zur Linken (des = Zeichens) steht.

Weil man aber in 5.) zur Rechten, für $n=0$ und für $n=1$ zwei verschiedene Werthe wirklich erhält, so ist die Gleichung 5.) eine vollkommene, welche rechts wie links nicht mehr als zwei Werthe und auch genau dieselben vorstellt*).

Und weil man in 6.) zur Rechten, für $n=0$ und $n=1$ und $n=-1$, drei verschiedene Werthe wirklich erhält, so ist auch die 6.) eine vollkommene Gleichung, welche rechts und links gleich viele und genau dieselben Werthe vorstellt**).

---

*) Setzt man statt n alle übrigen positiven oder negativen ganzen Zahlen, so muß man jedesmal wieder einen Werth der Wurzel $\sqrt{p+q\cdot i}$ erhalten; weil aber diese Wurzel nur zwei Werthe hat, so können dieselben nur unendlich oft wiederkehren.

Und in der That erhält man alle positiven und negativen ganzen Zahlen (also alle übrigen Werthe von n), wenn man zu den beiden Werthen 0 und 1, die man statt n genommen hat, noch jede positive oder negative gerade Zahl addirt; — dadurch aber vermehren sich die Werthe $n\pi+\frac{1}{2}\varphi$ um eine positiv oder negativ genommene gerade Anzahl von π und deshalb bleiben $Cos(n\pi+\frac{1}{2}\varphi)$ und $Sin(n\pi+\frac{1}{2}\varphi)$ davon ganz unverändert.

Man erhält also die beiden Werthe von $\sqrt{p+q\cdot i}$ „ausgerechnet", wenn man in der Gleichung 5.) rechts statt n zwei beliebige nächst auf einander folgende, (dem n zukommende) Werthe nimmt.

**) Alle übrigen Werthe von n erhält man, wenn man zu diesen drei nächst auf einander folgenden -1, 0 und $+1$ noch jedes positiv oder negativ genommene Vielfache von 3, (±3, ±6, ±9, ±12, rc. rc.), also 3ν addirt, wo ν positiv oder negativ ganz gedacht wird; dadurch aber vermehrt (oder vermindert) sich $\frac{2n\pi+\varphi}{3}$ um $\frac{6\nu\pi}{3}$ d. h. um $2\nu\pi$, und deshalb bleiben *Cos* und *Sin* genau dieselben.

Für die übrigen Werthe die (außer -1, 0 und $+1$) statt n gesetzt werden können, wiederholen sich also nur stets dieselben drei Werthe der $\sqrt[3]{p+q\cdot i}$, so daß man letztere überhaupt erhält, wenn man statt n drei nächst auf einander folgende seiner Werthe (z. B. -6, -5, -4, oder etwa 8, 9, 10 oder 0, 1, 2) setzt.

Weil man endlich in 7.) zur Rechten, sobald $n = 0, 1, 2$ und -1 genommen wird, wirklich vier verschiedene Werthe erhält, so ist die Gleichung 7.) ebenfalls eine vollkommene Gleichung, die zur Rechten alle vier Werthe der $\sqrt[4]{p+q\cdot i}$ liefert, d. h. alle Werthe, von denen jeder die Eigenschaft hat, daß, wenn er mit 4 potenzirt wird, allemal ein und dasselbe Endresultat, nämlich $p+q\cdot i$, kommt.

Giebt man dem n noch alle übrigen Werthe, — und man erhält sie alle, wenn man zu den vieren $-1, 0, 1$ und 2 noch alle positiv oder negativ genommenen Vielfachen von 4, also 4ν addirt, — so wird dadurch der Ausdruck $\frac{2n\pi+\varphi}{4}$ um $\frac{8\nu\pi}{4}$ d. h. um $2\nu\pi$ vermehrt (wo ν auch negativ ganz sein kann) und eben deshalb werden *Cos* und *Sin* dadurch nicht geändert. Es kehren also nur immer dieselben vier Werthe unendlich oft wieder.

Man bekommt daher aus der Gleichung 7.) zur Rechten, alle vier Werthe von $\sqrt[4]{p+q\cdot i}$, wenn man statt n irgend vier seiner nächst auf einander folgenden Werthe setzt. Und dabei werden r und φ gefunden mittelst der Gleichungen

$$8)\quad r = +\sqrt{p^2+q^2};\quad 9)\ Cos\,\varphi = \frac{p}{r} \text{ und } 10)\ Sin\,\varphi = \frac{q}{r},$$

wobei φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt (auch $= +\pi$ sein kann), mit q zugleich positiv oder negativ ist und (absolut genommen) im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\\text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Quadranten liegt, je nachdem p $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ gegeben ist.

Anmerkung 1. Setzt man $p+q\cdot i = 1$, also $q = 0$ und $p = 1$, so wird $r = 1$, $Cos\,\varphi = 1$, $Sin\,\varphi = 0$, also $\varphi = 0$; und man erhält nun aus 5.–7.

$$\sqrt{1} = Cos\, n\pi + i \cdot Sin\, n\pi = \pm 1, \text{ weil } Sin\, n\pi = 0;$$

$$\sqrt[3]{1} = Cos\frac{2n\pi}{3} + i\cdot Sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} Cos 0 + i\cdot Sin 0 & (\text{für } n = 0) \\ Cos\tfrac{2}{3}\pi + i\cdot Sin\tfrac{2}{3}\pi & (\text{für } n = 1) \\ Cos\tfrac{2}{3}\pi - i\cdot Sin\tfrac{2}{3}\pi & (\text{für } n = -1) \end{cases}$$

und

$$\sqrt[4]{1} = Cos\frac{2n\pi}{4} + i\cdot Sin\frac{2n\pi}{4} = \begin{cases} Cos 0 + i\cdot Sin 0 & (\text{für } n = 0) \\ Cos\tfrac{1}{2}\pi + i\cdot Sin\tfrac{1}{2}\pi & (\text{für } n = 1) \\ Cos\tfrac{1}{2}\pi - i\cdot Sin\tfrac{1}{2}\pi & (\text{für } n = -1) \\ Cos\, \pi + i\cdot Sin\, \pi & (\text{für } n = 2). \end{cases}$$

Da nun $Cos 0 = 1$, $Sin 0 = 0$; $Cos\tfrac{1}{2}\pi = 0$, $Sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$, $Cos\pi = -1$ und $Sin\pi = 0$ ist, so reduciren sich die letztern vier Werthe auf ± 1 und $\pm i$.

Und da $Cos\, x = -Cos(\pi - x)$, dagegen $Sin\, x = Sin(\pi - x)$ ist, so ist $Cos\tfrac{2}{3}\pi = -Cos\tfrac{1}{3}\pi$ und $Sin\tfrac{2}{3}\pi = Sin\tfrac{1}{3}\pi$, während $\tfrac{1}{3}\pi$ im ersten Quadranten liegt. Die drei Werthe der $\sqrt[3]{1}$ sind daher nun auch 1 und $-Cos\tfrac{1}{3}\pi \pm i\cdot Sin\tfrac{1}{3}\pi$ *).

Anmerkung 2. Um noch zu zeigen, wie nothwendig die Kunst ist, jeden Ausdruck und namentlich auch die obigen Wurzeln „ausrechnen", d. h. auf die Form $\alpha + \beta\cdot i$ bringen zu können, wollen wir noch die Cardani'sche Formel betrachten. Im I. Th. d. W. haben wir nämlich gefunden, daß die drei Werthe von x, welche der reducirten kubischen Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

---

*) Da wir im (§. 161.)

$$Cos\tfrac{1}{3}\pi = Sin\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}$$

und $$Sin\tfrac{1}{3}\pi = Cos\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

gefunden haben, so zeigen sich diese letztern beiden

$$= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\cdot\sqrt{3}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Genau so haben wir $\sqrt[3]{1}$ im I. Th. d. W. auf algebraischem Wege gefunden.

genügen, durch diese (Cardani'sche) Formel

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}b - \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{27}a^3}}$$

ausgedrückt sind, wenn man nur in ihr statt der ersten Kubikwurzel jeden ihrer drei Werthe setzt, von den drei Werthen der andern Kubikwurzel dagegen jedesmal denjenigen dazu nimmt, der mit dem erstern multiplicirt, genau $-\frac{1}{3}a$ giebt.

So lange nun $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3$ (unter der Voraussetzung, daß a und b reell gegeben sind) positiv ist, geschieht die Ausrechnung der Werthe von x, auf dem Wege der Elemente dadurch, daß man die Radikanden der Kubikwurzeln ausrechnet, welche positiv oder negativ werden, — im erstern Fall die absoluten Kubikwurzeln findet, im andern Fall aber $-\sqrt[3]{R}$ statt $\sqrt[3]{-R}$ schreibt und so einen negativen Werth der Kubikwurzel leicht ausmittelt, auf dem gewöhnlichen elementaren Wege des Quadrat- und Kubikwurzel-Ausziehens. Sind dann α und β die positiven oder negativen Werthe dieser beiden Kubikwurzeln, so hat man

$$x = \begin{cases} \alpha + \beta \\ \alpha \cdot (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + \beta \cdot (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \\ \alpha \cdot (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + \beta \cdot (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \end{cases},$$

wo die Werthe der beiden Kubikwurzeln immer so zusammen genommen sind, daß ihr Produkt stets $= \alpha \cdot \beta$ ist, während $\alpha \cdot \beta = -\frac{1}{3}a$ sein muß.

Ganz anders aber ist es, wenn die Quadratwurzel $\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}$ imaginär wird, d. h. wenn $\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3$ negativ wird, was nur dann, aber dann auch allemal der Fall ist, wenn a negativ und der absolute Werth von $(\frac{1}{3}a)^3$, $> \frac{1}{4}b^2$ ist. Dann werden nämlich die Radikanden der beiden Kubikwurzeln imaginär und nehmen die Form

$$-\tfrac{1}{2}b \pm i \cdot \sqrt{-\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{27}a^3}$$

an, wo die jetzige Quadratwurzel wieder reell und sogar positiv ist, weil wir die Zweideutigkeit auf das doppelte Vorzeichen gelegt haben. Nun reicht das Rechnen mit den im I. Th. d. W. gelehrten elementaren Hilfsmitteln nicht mehr aus, und deshalb nannte man früher diesen Fall den irreduciblen Fall der Cardani'schen Formel. Mittelst des §. 170. ist er natürlich nicht mehr irreducible, wenn man das Wort der Wortbedeutung nach nehmen will.

Berechnet man nämlich

1) $r = +\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + (-\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)} = \sqrt{-\frac{1}{27}a^3}$, welches positiv ist, und dann φ aus den Gleichungen

2) $Cos\,\varphi = \dfrac{-\frac{1}{2}b}{r}$ und 3) $Sin\,\varphi = \dfrac{+\sqrt{-\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3}}{r}$,

so liegt φ im ersten oder zweiten Quadranten, je nachdem b negativ oder positiv ist; — und man hat nun

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{r}\cdot(Cos\,\frac{1}{3}\varphi + i\cdot Sin\,\frac{1}{3}\varphi) + \sqrt[3]{r}\cdot(Cos\,\frac{1}{3}\varphi - i\cdot Sin\,\frac{1}{3}\varphi) \text{ *)} \\ \sqrt[3]{r}\cdot\left(Cos\frac{2\pi+\varphi}{3} + i\cdot Sin\frac{2\pi+\varphi}{3}\right) + \sqrt[3]{r}\cdot\left(Cos\frac{2\pi+\varphi}{3} - i\cdot Sin\frac{2\pi+\varphi}{3}\right) \\ \sqrt[3]{r}\cdot\left(Cos\frac{2\pi-\varphi}{3} - i\cdot Sin\frac{2\pi-\varphi}{3}\right) + \sqrt[3]{r}\cdot\left(Cos\frac{2\pi-\varphi}{3} + i\cdot Sin\frac{2\pi-\varphi}{3}\right) \text{ **)} \end{cases}$$

---

*) Da sich der Radikand der ersteren Kubikwurzel von dem der andern nur dadurch unterscheidet, daß in dem einen $-i$ steht, wo in dem andern i, — so gehen die drei Werthe der andern Kubikwurzeln aus denen der erstern dadurch hervor, daß man in den letzterwähnten, $-i$ statt i schreibt. Da ferner nach der Bedingung, unter welcher allein die Cardani'sche Formel gilt, das Produkt der zusammengehörigen Werthe beider Kubikwurzeln allemal $-\frac{1}{3}a$ geben, also reell werden muß, so konnte man nur die Werthe zusammennehmen, welche hier wirklich genommen worden sind; das Produkt dieser (beiden zusammengesuchten) Werthe (in der ersten, der andern und der dritten Linie) ist nämlich stets $= (\sqrt[3]{r})^2$, also (weil $\sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{1}{3}a}$ gefunden wird) $= -\frac{1}{3}a$.

**) Es ist hier $n = -1$ gesetzt worden; dadurch hat man zum Werth

d. h. weil $\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}a^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{-\frac{1}{27}a^3}} = +\sqrt{-\frac{1}{3}a}$ ist,

$$x = \begin{cases} 2\sqrt{-\frac{1}{3}a} \cdot Cos\,\frac{1}{3}\varphi \\ 2\sqrt{-\frac{1}{3}a} \cdot Cos\,\frac{2\pi+\varphi}{3} = -2\sqrt{-\frac{1}{3}a} \cdot Cos\,\frac{\pi-\varphi}{3} \\ 2\sqrt{-\frac{1}{3}a} \cdot Cos\,\frac{2\pi-\varphi}{3}, \end{cases}$$

wenn $\sqrt{-\frac{1}{3}a}$ ihren positiven Werth vorstellt.

Dies sind die drei ausgerechneten Werthe von x, da $-\frac{1}{3}a$ positiv ist und die Quadratwurzel $\sqrt{-\frac{1}{3}a}$ mittelst der Elemente vollends ausgerechnet werden kann.

Wir sehen zugleich, daß gerade in diesem sogenannten irreduciblen Falle, die Werthe von x, welche der kubischen Gleichung $x^3+ax+b=0$ genügen, alle drei reell sind, während die Auflösung des erstern (reducible genannten) Falles zeigt, daß dann allemal nur einer der Werthe von x reell, die beiden andern aber imaginär sind.

Anmerkg. 3. In allen diesen und ähnlichen Fragen ist es gut recht fest zu halten, daß (nach §. 163. Anmerkg.)

I. $e^{2n\pi \cdot i} = +1$ und II. $e^{(2n+1)\pi \cdot i} = -1$

---

der ersten Kubikwurzel gefunden

$$\sqrt[3]{r} \cdot \left(Cos\,\frac{-2\pi+\varphi}{3} + i \cdot Sin\,\frac{-2\pi+\varphi}{3}\right).$$

Weil aber $\frac{-2\pi+\varphi}{3} = -\frac{2\pi-\varphi}{3}$ und $Cos(-\nu) = Cos\,\nu$, so wie $Sin(-\nu) = -Sin\,\nu$ ist, so geht dieser Werth in die Form über, welche wir für den praktischen Gebrauch bequemer, oben gesetzt haben.

Auch ist noch $Cos\,\frac{2\pi+\varphi}{3} = -Cos\,\frac{\pi-\varphi}{3}$ und $Sin\,\frac{2\pi+\varphi}{3} = Sin\,\frac{\pi-\varphi}{3}$ (weil $\frac{2\pi+\varphi}{3} = \pi - \frac{\pi-\varphi}{3}$), so daß die zweite Zeile (der zweite Werth von x) auch so geschrieben werden kann, wie er oben umgeformt sich findet.

ist, welche positive oder negative ganze Zahl auch immer statt n geschrieben werden mag, wie auch für $n=0$, wie solches aus der Formel

$$e^{x \cdot i} = Cos\, x + i \cdot Sin\, x$$

augenblicklich hervorgeht, wenn man $2n\pi$ und $(2n+1)\pi$ statt x setzt, weil

$$Sin\, 2n\pi = 0 \quad \text{und} \quad Cos\, 2n\pi = +1,$$

dagegen

$$Sin\,(2n+1)\pi = 0 \quad \text{und} \quad Cos\,(2n+1)\pi = -1$$

ist.

Dritte Abtheilung.

Von den natürlichen Logarithmen.

§. 172.

Wir haben im §. 144. den Gang der reellen Werthe von e^x verfolgt und gesehen:

1) daß, während die Werthe von x, von $-\infty$ an, durch Null hindurch bis zu $+\infty$ hin, stetig wachsend gedacht werden, die zugehörigen Werthe von e^x, stets positiv bleiben, aber ebenfalls stetig und ohne Unterbrechung wachsen, von $\frac{1}{\infty}$ an, durch alle ächten Brüche und zuletzt durch 1 hindurch, bis zu $+\infty$ hin.

2) daß also zu jedem positiven Werth a von e^x, allemal ein reeller Werth von x, aber auch nur ein einziger existirt, welcher $e^x = a$ macht, und daß derselbe negativ, Null oder positiv ist, je nachdem der positive Werth a kleiner, gleich oder größer als 1 gegeben ist;

3) daß, wenn a negativ oder imaginär ist, dann nie ein reeller Werth von x existirt, welcher $e^x = a$ macht.

Den (nach 2.) immer existirenden reellen Werth von x, welcher e^x der positiv gegebenen (ganzen oder gebrochenen, rationalen oder irrationalen) Zahl a gleich macht, bezeichnen wir von nun an durch

$$\mathit{L}a$$

und nennen dieses Zeichen den Neper'schen Logarithmen von a (weil Baron Neper zuerst Tabellen dieser Werthe berechnet und bekannt gemacht hat).

Dieser Neper'sche Logarithme ist also immer nur eindeutig und existirt gar nicht mehr, so oft der Logarithmand a negativ oder imaginär wird.

Diese Definition des Neper'schen Logarithmen ist ausgesprochen in der Gleichung

(⊙)... $$e^{\mathit{L}a} = a.$$

§. 173.

Weil (wie wir schon in der Uebersicht gezeigt haben, welche im ersten Kapitel des I. Th. d. W. gegeben worden ist) der Logarithme allemal der Potenz gegenüber liegt, wie der Quotient dem Produkt, u. s. w.; — so müssen wir die Eigenschaften des Neper'schen Logarithmen auch aus denen der natürlichen Potenz ableiten.

Betrachten wir nun die drei Gesetze der natürlichen Potenzen, nämlich

1) $e^{x+z} = e^x \cdot e^z$

2) $e^{x-z} = e^x : e^z$

und 3) $(e^x)^m = e^{mx}$,

wo m eine Differenz ganzer Zahlen sein muß, — so finden wir aus ihnen sogleich, daß wenn

4) $e^x = a$ und 5) $e^z = b$

ist, dann

6) $e^{x+z} = a \cdot b$; 7) $e^{x-z} = \frac{a}{b}$ und 8) $e^{mx} = a^m$

sein müsse, während aus 4.) und 5.)

9) $x = \mathit{L}a$ und 10) $z = \mathit{L}b$

hervorgeht, und die Gleichungen 6.–8.) bezüglich

$$\mathit{L}(ab) = x + z = \mathit{L}a + \mathit{L}b;$$

$$\mathit{L}\frac{a}{b} = x - z = \mathit{L}a - \mathit{L}b;$$

$$\mathit{L}(a^m) = m \cdot x = m \cdot \mathit{L}a$$

geben.

Und da a positiv ist, so existirt (nach dem I. Th. d. W.) auch die (absolute) Wurzel $\sqrt[m]{a}$ als eindeutig und positiv, und setzt man diese statt a in die letztere Gleichung, so erhält man (weil $(\sqrt[m]{a})^m = a$ ist),

$$\mathit{L}a = m \cdot \mathit{L}\sqrt[m]{a}, \text{ d. h. } \mathit{L}\sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot \mathit{L}a.$$

Man hat daher für das Rechnen mit Neper'schen Logarithmen folgende vier Gesetze

I. $\mathit{L}(ab) = \mathit{L}a + \mathit{L}b;$

II. $\mathit{L}\frac{a}{b} = \mathit{L}a - \mathit{L}b;$

III. $\mathit{L}(a^m) = m \cdot \mathit{L}a;$

IV. $\mathit{L}\sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot \mathit{L}a,$

wo a und b nie anders als positiv gedacht werden dürfen, während in der III. m positiv oder negativ ganz oder $= 0$ oder $= 1$ gedacht wird (weil wir andere Potenzen, neben den natürlichen, noch nicht kennen als die im I. Th. d. W. definirten Differenz-Potenzen), — während endlich in der IV. m positiv ganz gedacht werden muß, weil sonst $\sqrt[m]{a}$ keine Bedeutung hätte.

Außerdem ist aber noch, wie unmittelbar aus der Definition des §. 172. hervorgeht,

V. $\mathit{L}1 = 0$ und VI. $\mathit{L}e = 1,$

während die Zahl

$$e\left(= S\left[\frac{1}{a!}\right] = 2{,}718281\ 828459\ 045235\ 36028\ \ldots\right)$$

die Basis der Neper'schen Logarithmen genannt wird *).

§. 174.

Ist a eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl, und soll $e^x = a$ werden, so wird es (nach dem, was wir bereits in der Anmerkg. zu §. 163. für $a = \pm 1$ nnd für $a = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$ gesehen haben) höchst wahrscheinlich allemal unendlich viele, einander nicht gleiche Werthe von x geben, welche dieser Bedingung genügen.

Alle diese Werthe fassen wir von nun an in dem Zeichen

$$\mathit{log}\, a$$

zusammen, und nennen dasselbe einen natürlichen Logarithmen.

Diese Definition ist ausgesprochen in der Gleichung

$$(\mathfrak{C}) \ldots \qquad e^{\mathit{log}\, a} = a.$$

Die Zahl e wird wiederum die Basis der natürlichen Logarithmen genannt.

Anmerkung. Ist a positiv, dann ist der Neper'sche Logarithme La offenbar einer der Werthe des natürlichen Logarithmen, weshalb man den Neper'schen Logarithmen gewöhnlich ebenfalls einen natürlichen Logarithmen nennt. — Wir

---

*) Daß

$$L(e^2) = 2, \qquad L(e^3) = 3, \text{ u. s. f.},$$

$$L\frac{1}{e} = -1, \qquad L\frac{1}{e^2} = -2, \text{ u. s. f.}$$

sein müsse, versteht sich von selbst. Eben so geht aus der II. auf's Neue hervor, daß der Neper'sche Logarithme eines ächten Bruches, negativ sein werde, so wie der einer ganzen Zahl oder eines unächten Bruches allemal positiv werden muß.

wollen aber hier, der größern Deutlichkeit des Vortrags wegen, die beiden Begriffe auch in den Worten stets streng aus einander halten.

§. 175.

In so ferne die Form $p+q \cdot i$ jede beliebige reelle Zahl p vorstellt, sobald $q=0$ gedacht wird, und außerdem jede bis jetzt uns bekannt gewordene imaginäre Zahl, — so werden wir die Werthe des natürlichen Logarithmen einer jeden reellen oder imaginären Zahl „ausgerechnet" d. h. in die Form $P+Q \cdot i$ umgeformt haben, sobald diese Umformung für den $log(p+q \cdot i)$ stattgefunden hat.

Soll aber

1) $\qquad log(p+q \cdot i) = \alpha + \beta \cdot i$

werden, wo p und q gegebene, α und β aber gesuchte reelle Zahlen sind, so muß α und β so sein, daß

2) $\qquad e^{\alpha+\beta \cdot i} = p+q \cdot i$

wird. Nun ist aber

3) $\qquad e^{\alpha+\beta \cdot i} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta \cdot i} = e^{\alpha} \cdot (Cos\beta + i \cdot Sin\beta)$;

also müssen α und β so gesucht werden, daß

4) $\qquad e^{\alpha} \cdot Cos\beta = p \qquad$ und $\qquad$ 5) $\qquad e^{\alpha} \cdot Sin\beta = q$

wird. Eliminirt man nun aus letzteren Gleichungen zuerst β (dadurch, daß man die Gleichungen quadrirt und addirt), so findet sich

6) $\qquad (e^{\alpha})^2 = p^2+q^2, \quad$ also $\quad e^{\alpha} = \sqrt{p^2+q^2}.$

Weil aber α reell sein soll, so kann e^{α} nie negativ sein; also hat man, wenn unter r der positive Werth der Quadratwurzel $\sqrt{p^2+q^2}$ verstanden wird

7) $\qquad e^{\alpha} = r, \quad$ folglich $\quad \alpha = Lr,$

wo Lr den Neper'schen Logarithmen der positiven Zahl r vor-

stellt, während wir aus §. 172. wissen, daß α nicht mehr als diesen einzigen Werth haben kann.

Die Gleichungen 4.) und 5.) geben nun, weil $e^\alpha = r$ ist, noch

8) $Cos\beta = \frac{p}{r}$ und 9) $Sin\beta = \frac{q}{r}$,

woraus ein Werth φ von β sich ergiebt und nur ein einziger, welcher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, mit q zugleich positiv oder negativ ist, und dabei (absolut gedacht) im ersten oder zweiten Quadranten liegt, je nachdem p positiv oder negativ ist; und der genau bestimmt sich findet durch die Gleichungen

I. $Cos\varphi = \frac{p}{r}$ und II. $Sin\varphi = \frac{q}{r}$,

während r gegeben ist durch die Gleichung

III. $r = +\sqrt{p^2+q^2}$.

Alle Werthe von β sind nun ausgedrückt durch $2n\pi+\varphi$, wenn unter n sowohl Null als auch jede positive und auch jede negative ganze Zahl verstanden wird; also hat man

10) $\beta = 2n\pi+\varphi$;

und β hat nur diese Werthe und keine weiteren (nach §. 163.), wenn nur n die festgesetzte Bedeutung hat.

Man hat also nun gefunden

IV. $log(p+q\cdot i) = Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i$,

wenn r und φ nach I.–III. berechnet werden, wenn Lr den Neper'schen Logarithmen und n sowohl 0 als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt.

Und die Formel IV. liefert alle unendlich vielen Werthe, welche der natürliche Logarithme haben kann und hat.

Anmerkung. Da e^α für $\alpha = -\infty$ den Werth $+\frac{1}{\infty}$, und für $\alpha = +\infty$ den Werth $+\infty$, für alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden, stets wachsend gedachten Werthe von α,

stets positiv, also nie der Null gleich wird, so existirt ein reeller Werth von α nicht, welcher $e^{\alpha} = 0$ machte; das Zeichen Lr hat also keine Bedeutung mehr, wenn $r = 0$ ist. — Aber eben deshalb ist auch $log(p+q \cdot i)$ im Kalkul unzulässig, so oft $r = \sqrt{p^2+q^2} = 0$ wird, also wenn $p = q = 0$ ist. — Es ist daher $log 0$ eine im Kalkul unzulässige Form.

Wenn also zuweilen gesagt wird, $L0$ wäre negativ unendlich groß, so beruht solches wieder auf der Verwechslung der Form $q-q$ oder Null, mit der Form $\frac{1}{\infty}$; denn

$$L\frac{1}{\infty} = L1 - L\infty = -\infty.$$

§. 176.

Betrachten wir nun einige specielle Fälle hiervon. — Setzen wir $q = 0$ und statt p zuerst eine positive (ganze oder gebrochene rationale oder irrationale) Zahl a, — dann aber auch eine negative Zahl $-a$.

Im erstern Fall, wo $q = 0$ und $p = +a$ ist, findet sich (aus I.–III.) $r = +a$, $Cos\varphi = +1$, $Sin\varphi = 0$, also $\varphi = 0$, während $Lr = La$ wird. Man hat also

$$1) \quad log\, a = La + 2n\pi \cdot i,$$

wenn n sowohl 0 als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt. — Und dieser Ausdruck zur Rechten (in 1.) enthält alle unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen der positiven Zahl a.

Ist $q = 0$ und $p = -a$, so berechnet sich (aus I.–III.) $r = +a$, $Cos\varphi = -1$, $Sin\varphi = 0$, also $\varphi = \pi$; und das Resultat IV. giebt jetzt:

$$2) \quad log(-a) = La + (2n+1)\pi \cdot i,$$

wo n dieselbe Bedeutung hat.

Setzt man in den Gleichungen 1. und 2. $a = 1$, so erhält man noch (weil nach §. 173. V. $L1 = 0$ wird):

3) $\log 1 = 2n\pi \cdot i$

und 4) $\log(-1) = (2n+1)\pi \cdot i$,

wenn n die obige Bedeutung behält *).

Und diese Gleichungen 2.–4. enthalten zur Rechten (wie die 1.) alle unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen der Zahlen $-a$, $+1$ und -1.

§. 177.

Denkt man sich in der Formel IV. des §. 175. statt n irgend eine bestimmte positive oder negative ganze Zahl m gesetzt oder die Null, so hat man einen einzigen der Werthe des $\log(p+q\cdot i)$, nämlich den Werth $Lr+(2m\pi+\varphi)\cdot i$. Addirt man nun zu diesem Werth alle Werthe des natürlichen Logarithmen von 1, welche (nach 3.) durch $2n\pi\cdot i$ ausgedrückt sind, so erhält man $Lr+(2(n+m)\pi+\varphi)\cdot i$. — Weil aber $n+m$ eben so wie n allein, doch wieder nichts anders ausdrückt, als alle ganzen Zahlen von $-\infty$ an, durch 0 hindurch, bis zu $+\infty$ hin, so drückt dieses letztere Resultat nichts anders als alle Werthe von $\log(p+q\cdot i)$ aus. Man findet also den wichtigen Satz:

Alle Werthe des natürlichen Logarithmen einer jeden reellen oder imaginären Zahl, findet man allemal dadurch, daß man zu irgend einem einzigen Werth desselben, alle Werthe von $\log 1$ addirt **).

---

*) Diese Resultate sind schon in der Anmerkung zu §. 163. gefunden, nämlich

$$e^{2n\pi\cdot i} = +1 \quad \text{und} \quad e^{(2n+1)\pi\cdot i} = -1.$$

**) Dieses Resultat ist ganz analog den im I. Th. d. W. bereits erhaltenen, nach welchen z. B. alle (drei) Werthe der $\sqrt[3]{a}$ erhalten werden, wenn man irgend einen derselben mit allen (drei) Werthen der $\sqrt[3]{1}$ multiplicirt; (hier oben wird addirt).

§. 178.

Unter allen Werthen $Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i$ des $log(p+q\cdot i)$, zeichnet sich derjenige, in welchem $n=0$ gedacht ist, als der einfachste aus. Ist $p+q\cdot i$ eine positive Zahl a (also $q=0$ und $p=a$), so ist $r=a$ und dann ist allemal der, den wir durch La oder Lr bezeichnet und den Neper'schen Logarithmen genannt haben, dieser einfachste Werth von $log\,a$.

Deshalb können wir die Bedeutung dieses Logarithmen-Zeichens L dahin erweitern, daß wir von nun an den „einfachsten Werth" des $log(p+q\cdot i)$ durch $L(p+q\cdot i)$ bezeichnen.

Man hat also

1) $$L(p+q\cdot i)=Lr+\varphi\cdot i,$$

wenn r und φ die in I.–III. des §. 175. festgesetzte Bedeutung haben, so daß $r=+\sqrt{p^2+q^2}$ und φ eindeutig ist, zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, mit q zugleich positiv oder negativ ist und im ersten oder zweiten Quadranten liegt (absolut genommen), je nachdem p positiv oder negativ ist, übrigens aber durch die Gleichungen

$$Cos\,\varphi=\frac{p}{r} \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi=\frac{q}{r}$$

gegeben sich findet.

Ferner ist noch (nach §. 177.)

2) $$log(p+q\cdot i)=L(p+q\cdot i)+log\,1=L(p+q\cdot i)+2n\pi\cdot i$$

eine, auf beiden Seiten des (=) Zeichens unendlich viele und genau dieselben Werthe vorstellende Gleichung.

In dieser Gleichung steckt die Nr. 1. des §. 176., so oft $q=0$ und $p=a$ und a positiv gedacht wird; und $L(p+q\cdot i)$ geht dann in La über und letzterer ist der Neper'sche Logarithme der positiven Zahl a.

§. 179.

Verfährt man nun genau so, wie im §. 173., so überzeugt man sich bald, daß, welchen ihrer Werthe man auch unter $log\,a$

und $log\,b$ verstehen mag, und wie auch a und b selbst reell oder imaginär gedacht werden mögen, doch allemal die Summe

$$log\,a + log\,b \text{ ein Werth von } log(ab),$$

die Differenz

$$log\,a - log\,b \text{ ein Werth von } log\,\frac{a}{b}$$

und das Produkt

$$m \cdot log\,a \text{ ein Werth von } log(a^m) \text{ *)}$$

sein muß, so lange m eine Differenz ganzer Zahlen ist, damit die Potenz a^m zur Zeit für jedes a eine Bedeutung habe. — Es entsteht jedoch die Frage, ob die gedachten Summe, Differenz und Produkt jedesmal auch alle Werthe bezüglich von $log(ab)$, $log\,\frac{a}{b}$ und $log(a^m)$ ausdrücken, wenn unter $log\,a$ und $log\,b$ jeder seiner Werthe gedacht wird.

Es sind aber alle Werthe

von $log\,a$ ausgedrückt durch $La + 2n\pi \cdot i$,
und von $log\,b$ " " $Lb + 2\nu\pi \cdot i$,

wo n und ν Null und alle positiven und negativen ganzen Zahlen und La, Lb die „einfachsten Werthe" von bezüglich $log\,a$, $log\,b$ vorstellen; also sind alle Werthe

von $log\,a + log\,b$ ausgedrückt durch $La + Lb + 2(n+\nu)\pi \cdot i$,
und von $log\,a - log\,b$ " " $La - Lb + 2(n-\nu)\pi \cdot i$;

und da $n+\nu$ und $n-\nu$ auch nichts weiter vorstellen als alle ganzen Zahlen von $-\infty$ an, durch Null hindurch, bis zu $+\infty$

---

*) Es ist nämlich (nach §. 143. I.–III.)

$$e^{log\,a + log\,b} = e^{log\,a} \cdot e^{log\,b} = a \cdot b \quad \text{(nach §. 174. ☾);}$$

ferner

$$e^{log\,a - log\,b} = e^{log\,a} : e^{log\,b} = \frac{a}{b};$$

endlich

$$e^{m \cdot log\,a} = (e^{log\,a})^m = a^m.$$

hin, so kann man $2n\pi\cdot i$ oder $log\,1$ schreiben, sowohl statt $2(n+\nu)\pi\cdot i$, wie statt $2(n-\nu)\pi\cdot i$; während $La+Lb$ zwar nicht nothwendig $=L(ab)$, aber doch ein Werth von $log(ab)$ sein muß, und $La-Lb$ zwar nicht nothwendig $=L\frac{a}{b}$, aber doch ein Werth von $log\frac{a}{b}$ sein wird. Nach §. 177. drücken also die Summe $log\,a+log\,b$ und die Differenz $log\,a-log\,b$ alle Werthe bezüglich von $log(ab)$ und $log\frac{a}{b}$ aus, so daß die beiden Gleichungen

$$\text{I.} \qquad log(ab)=log\,a+log\,b$$

und

$$\text{II.} \qquad log\frac{a}{b}=log\,a-log\,b,$$

wo a und b ganz allgemein gedacht sind (also reell oder imaginär) vollkommen richtige Gleichungen sind, d. h. so, daß beide Seiten derselben unbedingt für einander gesetzt werden können.

Besonders wichtig ist es aber, daß aus der vorstehenden Entwickelung auch noch auf das deutlichste hervorgeht, daß dieselben Gleichungen I. und II. auch schon vollkommene (allgemeingültige) Gleichungen sind (die auf beiden Seiten gleich viele und genau dieselben Werthe haben), wenn auch rechts statt eines der beiden Logarithmen nur ein einziger seiner Werthe gesetzt und nur der andere allgemein gedacht wird. — Nimmt man beide Logarithmen zur Rechten allgemein, so reproduciren sich rechts die unendlich vielen Werthe, welche der Logarithme zur Linken hat, unendlich oft *).

---

*) So war es gerade auch z. B. mit der dreideutigen Kubikwurzel im I. Th. d. W. In der Gleichung

$$\sqrt[3]{(ab)}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$$

z. B. stehen rechts 3 mal 3 (also 9 Werthe) aber doch nur die 3 Werthe der $\sqrt[3]{(ab)}$ zur Linken; aber jeder derselben reproducirte sich rechts 3 mal,

Dagegen ist nicht allgemeingültig die Gleichung

$$log(a^m) = m \cdot log\, a,$$

wenn auch m eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt; denn es sind alle Werthe von $m \cdot log\, a$ ausgedrückt durch $m \cdot L\, a + 2mn\pi \cdot i$, während $m \cdot L\, a$ (weil $e^{m \cdot L a} = (e^{L a})^m = a^m$ wird) zwar nicht nothwendig $= L(a^m)$, aber doch einer der Werthe von $log(a^m)$ sein wird, etwa der Werth $L(a^m) + 2\mu\pi \cdot i$, wo μ eine einzige bestimmte positive oder negative ganze Zahl oder 0 vorstellt. Man hat also nun

$$m \cdot log\, a = L(a^m) + 2\mu\pi \cdot i + 2mn\pi i = L(a^m) + 2(mn + \mu)\pi \cdot i$$

als eine vollkommene Gleichung, d. h. als eine solche, wo rechts und links genau dieselben Werthe ausgedrückt sind und rechts nicht mehr und nicht weniger als links. Weil aber $mn + \mu$ (da m und μ entweder 0 oder bestimmte ganze (positive oder negative) Zahlen sind) nicht mehr jede positive oder negative ganze Zahl, und auch nicht nothwendig die Null noch vorstellt, so hat man in der Gleichung $log(a^m) = m \cdot log\, a$, zur Rechten nicht mehr alle, sondern nur den m^{ten} Theil aller Werthe von $log(a^m)$ *), oder den $(-m)^{ten}$ Theil aller Werthe, wenn m negativ, also $-m$ positiv sein sollte.

Die Gleichung

$$(♀) \cdots \qquad log(a^m) = m \cdot log\, a$$

---

und man bekam zur Rechten schon alle 3 Werthe, wenn man einen Werth von $\sqrt[3]{a}$ mit allen Werthen der $\sqrt[3]{b}$ multiplicirte.

*) Ist z. B. $m = 3$ und $\mu = 2$, so drückt, wenn

n die Werthe	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	2c. 2c.	hat,
3n+2 die Werthe	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	2c. 2c.	aus,

während, wenn

n die Werthe	−1,	−2,	−3,	−4,	−5,	−6,	2c. 2c.	hat,
3n+2 die Werthe	−1,	−4,	−7,	−10,	−13,	−16,	2c. 2c.	

ausdrückt; man sieht also, daß 3n+2 weit entfernt davon ist, 0 und alle ganzen positiven und negativen Zahlen zu liefern.

ist also keine vollkommene Gleichung, sondern sie hat zur Linken m mal so viele und ganz andere Werthe als zur Rechten.

Wenn die Gleichung (♀) aber in dem Sinne gebraucht wird, daß der Ausdruck zur Rechten allemal einen Theil (den m^{ten} Theil) aller Werthe des $log(a^m)$ liefert, so ist sie in diesem Sinne zuzulassen, bei allgemeinen Rechnungen dagegen darf sie nicht verwandt werden.

Weil aber $m \cdot log\, a$ doch stets ein Werth von $log(a^m)$ ist, so folgt, daß man alle Werthe von $log(a^m)$ erhält, wenn man zu $m \cdot log\, a$ noch $log\, 1$ d. h. $2n\pi \cdot i$ addirt (nach §. 177.).

Die Gleichung

III. $$log(a^m) = m \cdot log\, a + 2n\pi \cdot i,$$

wenn man sich unter n alle ganzen Zahlen (die positiven und die negativen) und die Null sich denkt, ist daher eine vollkommene, allgemeingültige, richtige Gleichung.

§. 180.

Ferner können wir statt der Gleichung ♀ des §. 179., die rechts nicht alle Werthe giebt, welche links stehen, die nachstehenden allgemeingültigen (vollkommenen) Gleichungen setzen, nämlich:

III. 1. $$log(a^2) = 2 \cdot log(a \cdot \sqrt{1}) = 2 log(\pm a),$$

III. 2. $$log(a^3) = 3 \cdot log(a \cdot \sqrt[3]{1}),$$

III. 3. $$log(a^4) = 4 \cdot log(a \cdot \sqrt[4]{1})\ *),$$

---

*) Es ist nämlich

1) $$2 \cdot log\, a = 2L\, a + 2 \cdot 2n\pi \cdot i$$

und $log(-a) = L\, a + log(-1)$ (nach §. 179. I. in so ferne $(-a) = a(-1)$ ist); also ist

2) $$2 \cdot log(-a) = 2L\, a + 2(2n'+1)\pi \cdot i.$$

wenn nur die Wurzeln, wie die Logarithmen, ganz allgemein gedacht sind, während a selbst ebenfalls allgemein gedacht wird, also eben so gut reell, wie imaginär.

Setzt man in III. 1.–3. bezüglich $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ statt a und bedenkt man, daß alle Werthe dieser allgemeinen Wurzeln erhalten werden, wenn man irgend einen einzigen derselben, be-

---

Ferner ist, weil $2L\,a$ jedenfalls einen Werth von $log(a^2)$ vorstellt,

$$3)\qquad log(a^2) = 2L\,a + log\,1 = 2L\,a + 2\mu\pi\cdot i;$$

und da in 1.) zur Rechten nur alle doppelten geraden, in 2.) dagegen nur alle doppelten ungeraden Zahlen vorkommen, in 3.) aber alle doppelten ganzen Zahlen, so machen die Werthe von $log\,a$ nebst den Werthen von $log(-a)$ zusammen genau alle Werthe von $log(a^2)$ aus, wodurch die III. 1. außer Zweifel gestellt sich findet.

Die drei Werthe der $\sqrt[3]{1}$ d. h. von $\sqrt[3]{e^{2n\pi\cdot i}}$ sind ausgedrückt durch $e^{\frac{2}{3}n\pi\cdot i}$, d. h. durch 1, $e^{\frac{2}{3}\pi\cdot i}$ und $e^{\frac{4}{3}\pi\cdot i}$; also hat man (nach §. 179. I.)

$$log(a\cdot\sqrt[3]{1}) = \begin{cases} log\,a \\ log\,a + \frac{2}{3}\pi\cdot i \\ log\,a + \frac{4}{3}\pi\cdot i \end{cases} = \begin{cases} L\,a + 2\mu\pi\cdot i \\ L\,a + (2\mu + \frac{2}{3})\pi\cdot i \\ L\,a + (2\mu + \frac{4}{3})\pi\cdot i; \end{cases}$$

also

$$4)\qquad 3log(a\cdot\sqrt[3]{1}) = \begin{cases} 3L\,a + 2\cdot 3\mu\pi\cdot i \\ 3L\,a + 2\cdot(3\mu+1)\pi\cdot i \\ 3L\,a + 2\cdot(3\mu+2)\pi\cdot i \end{cases} = 3L\,a + 2n\pi\cdot i,$$

weil, da μ alle (positiven und negativen) ganzen Zahlen (und die Null) vorstellt, 3μ, $3\mu+1$ und $3\mu+2$ zusammen genau wieder alle ganzen Zahlen (oder die Null) ausmachen, welche jetzt durch n ausgedrückt sind. — Auf der andern Seite hat man, weil $3L\,a$ jedenfalls ein Werth von $log(a^3)$ ist (nach §. 179. Q.),

$$5)\qquad log(a^3) = 3L\,a + log\,1 = 3L\,a + 2n\pi\cdot i,$$

und dadurch ist die III. 2. außer Zweifel.

Ganz analog wird nun auch die III. 3. erwiesen. Zugleich erkennt man, daß wenn später die allgemeine m^te Wurzel $(\sqrt[m]{a})$ wird eingeführt und als m deutig erkannt worden sein, — daß dann die Formel III. auch ganz allgemein wird aufgestellt und erwiesen werden können.

züglich mit allen Werthen der $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$ multiplicirt, so erhält man augenblicklich noch die nachstehenden vollkommenen Gleichungen, (welche links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe haben), nämlich

IV. 1. $log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\cdot log\,a$;

IV. 2. $log(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3}\cdot log\,a$;

IV. 3. $log(\sqrt[4]{a}) = \frac{1}{4}\cdot log\,a$,

wenn nur alle Wurzeln, wie alle Logarithmen, allgemein, d. h. vielförmig angesehen werden.

Dabei ist überall a selbst ganz allgemein gedacht, also eben so gut reell wie imaginär*).

---

*) In dem berühmten Streite zwischen Leibnitz und Bernoulli, welcher später zwischen Euler und d'Alembert fortgesetzt wurde, schloß man so: Es ist $(-a)^2 = a^2$, also $log[(-a)^2] = log(a^2)$; nun ist aber $log(a^2) = 2log\,a$ und $log[(-a)^2] = 2\cdot log(-a)$; folglich ist auch $2log(-a) = 2log\,a$; demnach auch $log(-a) = log\,a$; und dadurch wollte man bewiesen haben, daß der Logarithme einer negativen Zahl $-a$ reell und dem Logarithmen der positiven Zahl a gleich ist. — Euler schloß diesen Streit dadurch, daß er nachwies, daß der Logarithme einer jeden Zahl unendlich viele Werthe habe und daß $2log(-a)$ die eine Hälfte und $2log\,a$ die andere Hälfte der Werthe von $log(a^2)$ sei, und daß daher aus $log(a^2) = 2log(-a)$ und $log(a^2) = 2log\,a$ nicht gefolgert werden könne, daß $2log(-a) = 2log\,a$ sei.

Aber eben deshalb muß man keine anderen Formeln, nach denen gerechnet werden soll, aufstellen, als nur solche, welche wirklich dem, im 1ten Kapitel des I. Th. d. W. aufgestellten Begriff der Gleichung entsprechen, so daß ihre beiden Seiten unbedingt und unbeschränkt für einander gesetzt werden können. Sind daher die Seiten der Gleichung mehrdeutig, so müssen sie alle beide gleich viele und genau dieselben Werthe haben, um in allgemeinen Rechnungen mit Sicherheit angewandt werden zu können. — Deshalb haben wir schon im I. Th. d. W. die Gleichung $\sqrt{(a^2)} = a$ oder $\sqrt[3]{(a^3)} = a$ nicht aufgestellt, sondern dafür diese anderen, nämlich

$\sqrt{(a^2)} = a\cdot\sqrt{1} = \pm a$; $\sqrt[3]{(a^3)} = a\cdot\sqrt[3]{1}$; u. s. w.

Anmerkung. Bei dem unendlich vieldeutigen Zeichen *log* a muß natürlich dem Rechner dieselbe Vorsicht empfohlen werden, welche wir bereits im I. Th. d. W. für die 2-, 3- und 4deutigen $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[4]{a}$ empfehlen mußten, nämlich: „dasselbe „mehrdeutige Zeichen, wenn es mehreremale erscheint, nicht als „einen und denselben Ausdruck anzusehen und danach zu „behandeln, so lange man sich nicht überzeugt hat, daß „dasselbe Zeichen auch jedesmal einen und denselben „seiner Werthe vorstelle.“ Man darf also bei allgemeinen Rechnungen nicht schreiben:

$$2\cdot log\,a \quad \text{statt} \quad log\,a + log\,a,$$

nicht 0 statt $log\,a - log\,a$,

nicht $(p \pm q)\cdot log\,a$ statt $p\cdot log\,a \pm q\cdot log\,a$

u. s. w. f.; obgleich diese Substitutionen alle erlaubt sind, sobald man sich überzeugt hat, daß in jedem der Ausdrücke zur Rechten, das Zeichen *log* a, welches zweimal vorkommt, jedesmal einen und denselben seiner Werthe vorstellt. — So wäre es ganz richtig, aus 1) $log(a^2) = 2\cdot log\,a$ und 2) $log(a^2) = 2\cdot log(-a)$ zu folgern, daß auch $2\cdot log\,a = 2\cdot log(-a)$ und dann auch $log\,a = log(-a)$ sein müsse, — wenn man nur überzeugt wäre, daß in den Gleichungen 1.) und 2.), das zweimal vorkommende Zeichen $log(a^2)$ jedesmal dieselben seiner Werthe vorstelle. Wir haben uns aber so eben überzeugt, daß dies gerade hier nicht der Fall ist, sondern daß die Gleichungen 1.) und 2.) nur unter der Voraussetzung richtige Gleichungen sind, daß $log(a^2)$ in 1.) die eine Hälfte, — in 2.) aber die andere Hälfte seiner Werthe vorstelle. Deshalb ist der Schluß, daß $2\cdot log\,a = 2\cdot log(-a)$ sein müsse, ein verwerflicher.

Die Einführung des „einfachsten Werthes“ $L(p+q\cdot i)$, welche es möglich macht, alle Werthe von $log(p+q\cdot i)$ sichtbar zu machen und von einander abzusondern, erleichtert das Arbeiten mit solchen unendlich vieldeutigen Logarithmen (-Zeichen) bedeutend.

Nach §. 179. I. und II. kann man aber *unbedingt* setzen

$$log(a^2) \quad \text{statt} \quad log\,a + log\,a;$$

$$log\,1 \quad \text{statt} \quad log\,a - log\,a;$$

d. h. wenn man jeden Werth des erstern $log\,a$ zu oder von jedem Werth des andern $log\,a$ addirt oder subtrahirt, so erhält man im erstern Falle *alle* Werthe von $log(a^2)$, im andern Falle aber alle Werthe von $log\,1$; und dies ist auch schon der Fall (nach §. 179.), wenn man statt *eines* der beiden Logarithmen zur Rechten nur *einen einzigen* seiner Werthe setzt. Setzte man aber statt $log\,a + log\,a$ lieber $2 \cdot log\,a$, oder statt $log\,a - log\,a$ lieber 0 (Null), so hätte man die beiden Summanden, oder Minuend und Subtrahend, als *dieselben* Werthe angesehen, also nicht mehr $\left\{\begin{matrix}\text{einen}\\ \text{jeden}\end{matrix}\right\}$ Werth $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{von}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}\text{jedem}\\ \text{einem}\end{matrix}\right\}$ Werth, sondern nur jeden Werth $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{von}\end{matrix}\right\}$ *demselben* Werth $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$.

Setzte man endlich statt $log\,a + log\,a$ einmal $log(a^2)$ und das anderemal $2\,log\,a$, so daß man folgerte

$$log(a^2) = 2\,log\,a;$$

und setzte man statt $log\,a - log\,a$ einmal 0, und das anderemal $log\,1$, und folgerte man so daß

$$log\,1 = 0$$

sei, so wären diese beiden letztern Gleichungen

$$log(a^2) = 2\,log\,a \quad \text{und} \quad log\,1 = 0$$

nicht mehr allgemein wahr, weil rechts in der erstern Gleichung nur die Hälfte der Werthe von $log(a^2)$ ausgedrückt sind, in der andern Gleichung aber rechts nur ein einziger der unendlich vielen Werthe von $log\,1$ zur Linken, gefunden werden würde. Beide Ausdrücke links und rechts, einer jeden dieser letztern Gleichungen, könnten also nicht unbedingt für einander gesetzt

werden, und gerade dieses unbedingte für einander Setzen der gleichen Ausdrücke, ist unserem Begriffe einer allgemein wahren Gleichung allein entsprechend.

§. 181.

Nach Einführung der natürlichen Potenz kann der wichtige Satz **IV.** des §. 139. so umgeformt werden, nämlich:

Ist $e^c = a$, so ist allemal $S\left[\frac{c^a \cdot x^a}{a!}\right] = a^x$, so lange nur x eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt, also eine positive oder negative ganze Zahl, oder Null oder 1.

Weil jedoch aus der Gleichung

$$e^c = a \quad \text{jetzt} \quad c = \mathit{log}\, a$$

hervorgeht, wo $\mathit{log}\, a$ unendlich viele Werthe hat, so läßt sich derselbe Satz nun auch so geben, nämlich:

Es ist allemal für jedes allgemeine a, wenn nur x eine Differenz ganzer Zahlen vorstellt,

$$(\odot)\cdots \qquad S\left[\frac{x^a \cdot (\mathit{log}\, a)^a}{a!}\right] = a^x \quad \text{oder} \quad e^{x \cdot \mathit{log}\, a} = a^x$$

(nach §. 142.); und zwar liefert die unendliche Reihe zur Linken, immer ein und dasselbe a^x (d. h. ein und dasselbe Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots$, wenn x positiv ganz ist, oder einen und denselben Quotienten $\frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots}$, wenn x negativ ganz ist), welchen seiner unendlich vielen Werthe man auch statt $\mathit{log}\, a$ setzen mag *).

---

*) Die unendliche Reihe zur Linken in $\odot$., nämlich die Reihe

$$1 + x \cdot \mathit{log}\, a + \frac{x^2 \cdot (\mathit{log}\, a)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (\mathit{log}\, a)^3}{3!} + \text{in inf.}$$

nimmt für verschiedene reelle oder imaginäre Werthe von x, verschiedene Werthe an, und zwar für einen und denselben gebrochenen oder imaginären Werth von x, selbst noch verschiedene Werthe, nach den verschiedenen Werthen des $\mathit{log}\, a$. — Sie, diese Reihe, ist nämlich (nach §. 142.)

Diese Gleichung giebt uns ein bequemes Mittel an die Hand, um $log(1+z)$ in eine nach ganzen Potenzen von z fortlaufende unendliche Reihe zu verwandeln. — Setzt man nämlich in ihr $1+z$ statt a, und bedenkt man, daß dann rechts $(1+z)^x$ zu stehen kommt, während nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+z)^x = S\left[\frac{x^{b|-1}}{b!}\cdot z^b\right]$$

gefunden worden ist, so geht die Gleichung ⊙ über in diese:

$$(☾)\cdots \quad S\left[\frac{x^a\cdot[log(1+z)]^a}{a!}\right] = S\left[\frac{x^{b|-1}}{b!}\cdot z^b\right],$$

welche Gleichung unvollkommener geschrieben, so aussieht, nämlich

$$1+x\cdot log(1+z)+\frac{x^2\cdot[log(1+z)]^2}{2!}+\frac{x^3\cdot[log(1+z)]^3}{3!}+ \text{ in inf.}$$

$$= 1+x\cdot z+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot z^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot z^3+ \text{ in inf.}$$

Subtrahirt man nun 1 auf beiden Seiten, dividirt man nach-

$$= e^{x\cdot log\, a} = e^{x\cdot[L\, a+2n\pi\cdot i]}$$
$$= e^{x\cdot L a}\cdot e^{2nx\pi\cdot i}$$
$$= e^{x\cdot L a}\cdot[Cos\, 2nx\pi+i\cdot Sin\, 2nx\pi],$$

wo La, mag a reell oder imaginär sein, den „einfachsten Werth" des $log\, a$, und deshalb, so oft a positiv ist, den Neper'schen Logarithmen vorstellt (§. 176. Nr. 1.). — Ist nun x z. B. $=\frac{7}{8}$, so wird $2n\pi x$ nach und nach $=0$, $\pm\frac{7}{4}\pi$, $\pm\frac{7}{2}\pi$, $\pm 2\frac{1}{4}\pi$, rc. rc.; oder, — wenn man diese Werthe um 2π, 4π, rc. rc. größer oder kleiner nimmt, weil dadurch weder der Kosinus noch der Sinus geändert wird, — es kommen statt $2nx\pi$ nach und nach die Werthe 0, $\pm\frac{1}{4}\pi$, $\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{3}{4}\pi$, rc. rc., deren Kosinus und Sinus bezüglich nicht alle einander gleich sind. — Ist aber x positiv oder negativ ganz, dann ist $2nx\pi$ stets eine positive oder negative gerade Anzahl von π, deren $Cos, =1$ und deren $Sin, =0$ ist. Es hat also nun $e^{x\cdot log\, a}$ bloß den einzigen Werth $e^{x\cdot La}$ und dieser ist, wie wir oben gesehen haben, das durch a^x vorgestellte Produkt oder der Quotient aus 1, dividirt durch ein solches Produkt.

gehends durch x auf beiden Seiten, und setzt man in der neuen Gleichung zuletzt 0 statt x, so bleibt zur Linken bloß $log(1+z)$, während rechts die gesuchte Entwickelung sich ergiebt. — Wir wollen dies aber mit der allgemeinen Form (in ☾) so machen. Wir sondern zu dem Ende links und rechts (in ☾) das allererste Glied 1 ab (dadurch, daß wir links $\mathfrak{a}=0$ und dann $\mathfrak{a}+1$ statt $\mathfrak{a}$, rechts aber $\mathfrak{b}=0$ und dann $\mathfrak{b}+1$ statt $\mathfrak{b}$ setzen); lassen wir dann links und rechts das Glied 1 weg, so bleibt

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}+1}\cdot[log(1+z)]^{\mathfrak{a}+1}}{(\mathfrak{a}+1)!}\right]=S\left[\frac{x^{\mathfrak{b}+1|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\cdot z^{\mathfrak{b}+1}\right].$$

Dividirt man nun jedes Glied dieser Gleichung, also die Repräsentanten aller Glieder links und rechts durch x, so ergiebt sich

$$S\left[\frac{x^{\mathfrak{a}}\cdot[log(1+z)]^{\mathfrak{a}+1}}{(\mathfrak{a}+1)!}\right]=S\left[\frac{(x-1)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\cdot z^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

wo zur Linken das allererste Glied (für $\mathfrak{a}=0$) bloß $log(1+z)$ wird, während die folgenden Glieder alle entweder x, oder x^2, oder höhere Potenzen von x zu Faktoren haben, daher mit x zugleich der Null gleich werden. Wird also nun 0 statt x gesetzt, so ergiebt sich

$$log(1+z)=S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{b}|-1}}{(\mathfrak{b}+1)!}\cdot z^{\mathfrak{b}+1}\right].$$

Und weil $(-1)^{\mathfrak{b}|-1}=(-1)^{\mathfrak{b}}1^{\mathfrak{b}|+1}=(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\mathfrak{b}!$ und noch $\frac{\mathfrak{b}!}{(\mathfrak{b}+1)!}=\frac{1}{\mathfrak{b}+1}$ ist, so geht diese Gleichung in ihre einfachste Form über, nämlich in

$$\text{I.}\qquad log(1+z)=S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{b}+1}\cdot z^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

d. h. $log(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5-$ in inf.,

zu welcher Gleichung rechts noch $log\,1$ addirt werden muß, um links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe zu haben.

Anmerkung. Diese Reihe ist es also, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man mit ihr die Zahl e potenzirt, dann $1+z$ herauskommt; es findet sich also

$$e^{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\text{ in inf.}} = 1+z$$

d. h. $e^z \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \cdot e^{\frac{1}{3}z^3} \cdot e^{-\frac{1}{4}z^4} \cdot e^{\frac{1}{5}z^5} \cdot \text{ in inf.} = 1+z,$

d. h., wenn man statt der Potenzen e^z, $e^{-\frac{1}{2}z^2}$, 2c. 2c. die unendlichen Reihen setzt, welche sie vorstellen,

$$S\left[\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right] \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\frac{z^{2\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!\,2^{\mathfrak{b}}}\right] \cdot S\left[\frac{z^{3\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!\,3^{\mathfrak{c}}}\right] \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{d}} \cdot \frac{z^{4\mathfrak{d}}}{\mathfrak{d}!\,4^{\mathfrak{d}}}\right] \cdot \text{in inf.} = 1+z$$

d. h.

$$S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}+\cdots} z^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}+3\mathfrak{c}+4\mathfrak{d}+5\mathfrak{e}+6\mathfrak{f}+\cdots}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\,\mathfrak{e}!\,\mathfrak{f}!\cdots 2^{\mathfrak{b}}\cdot 3^{\mathfrak{c}}\cdot 4^{\mathfrak{d}}\cdot 5^{\mathfrak{e}}\cdot 6^{\mathfrak{f}}\cdots}\right] = 1+z.$$

Und in der That: ordnet man dieses Resultat zur Linken, nach Potenzen von z, dadurch daß man den Exponenten von z, $= \mathfrak{p}$ setzt, also

$$\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}+3\mathfrak{c}+4\mathfrak{d}+5\mathfrak{e}+6\mathfrak{f}+ \text{ in inf.} = \mathfrak{p},$$

und dann nach und nach statt $\mathfrak{p}$ zuerst 0, dann 1, dann 2, 3, 4, 5 und alle positiven ganzen Zahlen, — so zeigt sich das allererste Glied $= 1$, das erste (für $\mathfrak{p}=1$) $= 1\cdot z$, und die Koeffizienten aller übrigen Glieder (für $\mathfrak{p} = 2, 3, 4,$ in inf.) zeigen sich wirklich, so weit man auch die Rechnung fortsetzt, alle einzeln der Null gleich, so daß sich die letztere Gleichung wirklich als eine richtige (identische) ausweist.

Wir wollen z. B. $\mathfrak{p} = 4$ nehmen. Der Koeffizient von z^4 in der letztern Gleichung zur Linken, ist nun

$$= S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}+\cdots}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\,\mathfrak{e}!\,\mathfrak{f}!\cdots 2^{\mathfrak{b}}\cdot 3^{\mathfrak{c}}\cdot 4^{\mathfrak{d}}\cdot 5^{\mathfrak{e}}\cdot 6^{\mathfrak{f}}\cdots}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}+3\mathfrak{c}+4\mathfrak{d}+5\mathfrak{e}+6\mathfrak{f}+\cdots = 4}.$$

Die deutschen Buchstaben können, der unten stehenden Gleichung zu Folge, keine anderen Werthe haben, als die nachstehenden, nämlich

$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathfrak{e}$,	$\mathfrak{f}$,	⋯
0,	0,	0,	1,	0,	0,	0,⋯
1,	0,	1,	0,	0,	0,	0,⋯
0,	2,	0,	0,	0,	0,	0,⋯
2,	1,	0,	0,	0,	0,	0,⋯
4,	0,	0,	0,	0,	0,	0,⋯,

so daß, wenn man diese Werthe nach und nach substituirt, der eben erwähnte Koeffizient aus folgenden 5 Gliedern besteht, nämlich

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 2^2}-\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$, und diese Summe ist offenbar $=0$, wie wir behauptet haben.

Setzte man $p=1$, so hätten

die Buchstaben a, b, c, d, e, f, ⋯

bloß die Werthe 1, 0, 0, 0, 0, 0, ⋯

und der gedachte Koeffizient von z^1 oder z, bestünde nur aus einem einzigen Gliede und solches ist

$= \frac{(-1)^0}{1!\,0!\,0!\cdots 2^0\cdot 3^0\cdot 4^0\cdots}$ d. h. $=1$, wie wir ebenfalls behauptet haben.

Da nun in der gefundenen Gleichung

$$\log(1+z) = z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\tfrac{1}{4}z^4+ \text{ in inf.},$$

die unendliche Reihe rechts die durch das Logarithmen-Zeichen links vorgestellte Eigenschaft hat, während z ganz allgemein (als ein bloßer Träger der Operations-Zeichen) gedacht wird, so folgt von selbst, daß wenn für irgend einen reellen oder imaginären Ziffernwerth von z, (der, wenn reell, <1 sein muß, und in welchem, wenn er imaginär und von der Form $p+q\cdot i$ d. h. $r\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)$ ist, der Modul r, (nach §. 171.) <1 sein muß) die Reihe zur Rechten einen Werth hat (d. h. konvergent ist), — dann dieser Werth der Reihe auch einer der Werthe des $\log(1+z)$ oder des $\log[(1+p)+q\cdot i]$ sein müsse; — daß aber so oft die gedachte unendliche Reihe divergent ist, d. h. gar keinen Werth hat, sie auch nicht geeignet ist, den Werth von $\log(1+z)$ oder $\log[(1+p)+q\cdot i]$ zu geben, wenn auch die Gleichung im Allgemeinen stets der Definition der Gleichung vollkommen entspricht, d. h. stets eine richtige Gleichung bleibt.

§. 182.

Schreibt man

II. $$log(1+z) = log\,1+z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\tfrac{1}{4}z^4+ \text{ in inf.},$$

so hat man der logarithmischen Reihe ein allererstes Glied gegeben; die Reihe hat jetzt noch die durch $log(1+z)$ ausgedrückte Eigenschaft; sie giebt aber jetzt, so oft sie konvergent ist, alle Werthe des $log(1+z)$; sie ist eine vollkommen richtige Gleichung, d. h. eine solche, wo beide Ausdrücke links und rechts des (=) Zeichens unbedingt für einander gesetzt werden können, wie dies nach unserer Definition der (allgemeinen) Gleichung stets verlangt werden muß.

Dabei kann man noch $2n\pi\cdot i$ oder $2\mu\pi\cdot i$ statt $log\,1$ schreiben, wenn man unter n oder μ jede positive und jede negative ganze Zahl versteht und auch die Null.

Setzt man aber in II. $-z$ statt z, und subtrahirt man das Resultat von der I., so erhält man (weil

$$log\,1-log\,1 = log\frac{1}{1} = log\,1,$$

und $$log(1+z)-log(1-z) = log\frac{1+z}{1-z}$$ ist).

III. $$log\frac{1+z}{1-z} = log\,1+2(z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{7}z^7+ \text{ in inf.})$$

oder $$log\frac{1+z}{1-z} = log\,1+2S\left[\frac{z^{2a+1}}{2a+1}\right].$$

Setzt man $\frac{1+z}{1-z} = \frac{x+y}{x}$, also $z = \frac{y}{2x+y}$, so findet sich hieraus noch, wenn auf beiden Seiten $log\,x$ addirt wird (weil $log\,x+log\,1 = log(x\cdot 1) = log\,x$ ist).

IV. $$log(x+y) = log\,x+2S\left[\frac{1}{2a+1}\cdot\left(\frac{y}{2x+y}\right)^{2a+1}\right]$$

oder $$log(x+y) = log\,x+2\left[\frac{y}{2x+y}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5+\text{in inf.}\right],$$

welche Gleichung allgemein wahr ist, wenn man nur unter $log(x+y)$ und $log\,x$ alle ihre Werthe vorgestellt sich denkt.

§. 183.

Denkt man sich hier (in IV.), x und y positiv und $\frac{y}{2x+y}<1$, damit die Reihe zur Rechten konvergirt, so nimmt die Gleichung IV. diese specielle Form an, nämlich

$$\text{V.}\quad L(x+y) = Lx + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \text{in inf.}\right].$$

Die Gleichung III. giebt für Neper'sche Logarithmen

$$\text{VI.}\quad L\frac{1+z}{1-z} = 2(z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{7}z^7+\cdots)$$

$$\text{d. h.}\quad = 2S\left[\frac{1}{2\mathfrak{a}+1}\cdot z^{2\mathfrak{a}+1}\right].$$

Die Gleichung II. giebt, wenn man sich $1+z$ positiv und z an sich <1 denkt, so daß die Reihe zur Rechten eine konvergente ist, für Neper'sche Logarithmen,

$$\text{VII.}\quad L(1+z) = z-\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3-\tfrac{1}{4}z^4+\tfrac{1}{5}z^5-\text{ in inf.}$$

$$\text{d. h.}\quad = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{z^{\mathfrak{b}+1}}{\mathfrak{b}+1}\right].$$

In dieser Gleichung hat man noch $1+z=\sqrt[m]{a}$ gesetzt, wo a positiv und unter $\sqrt[m]{a}$ die im I. Th. d. W. definirte, stets eindeutige und positive „absolute Wurzel" verstanden wird, und (weil $L\sqrt[m]{a}=\frac{1}{m}La$ ist) erhalten

$$\text{VIII.}\quad La = m\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{b}+1}\cdot(\sqrt[m]{a}-1)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$= m\cdot[(\sqrt[m]{a}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[m]{a}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[m]{a}-1)^3-\text{ in inf.}].\text{*)}$$

---

*) Der Gleichung V. konnte man sich bedienen, um die Neper'schen Logarithmen näherungsweise zu berechnen. Setzt man nämlich $x=y=1$,

Man schlug nun vor, von jeder positiven Zahl, deren Neper'schen Logarithmen man finden will, erst hinter einander die Quadratwurzel auszuziehen, so daß man nach und nach die $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[16]{a}$, $\sqrt[32]{a}$, u. s. w. erhält, während diese Wurzeln nach und nach von der Einheit immer weniger verschieden werden. Hat man nun den Wurzel-Exponenten m groß genug, so daß $\sqrt[m]{a}-1$ ein sehr kleiner Bruch ist, so reichen sehr wenige erste Glieder der Reihe zur Rechten aus (oftmals nur ein einziges) um einen verlangten Näherungswerth von La zu liefern.

---

so erhält man $L2$ (weil $L1=0$ ist); weil aber die Reihe dann sehr langsam konvergirt, so setzt man lieber in VI. $\frac{1+z}{1-z}=2$, was $z=\frac{1}{3}$ ergiebt; oder endlich man wendet die VIII. an um gerade $L2$ möglichst genau zu bekommen. Setzt man dann in V. $x=2$ und $y=1$, so erhält man $L3$ (in $L2$ ausgedrückt) auch näherungsweise. Und weil $L4=2{\cdot}L2$ ist, so würde man nun (in V.) $x=4$ und $y=1$ setzen um $L5$ zu haben. Weil dann $L6=L3+L2$ ist, so würde man $x=6$ und $y=1$ setzen um $L7$ zu bekommen; dann findet sich $L8=3{\cdot}L2$ und $L9=2{\cdot}L3$, so wie $L10=L5+L2$; hierauf würde man $x=10$ und $y=1$ setzen und erhielte (aus V.) den Werth von $L11$; u. s. w. f. — Mit einem Worte: Jede absolute Primzahl ist um 1 größer als die nächstvorhergehende Zahl, welche immer ein Produkt kleinerer Zahlen ist; setzt man also diese letztere statt x, und $y=1$, so erhält man den Neper'schen Logarithmen der Primzahl $x+1$ in den Lx ausgedrückt, während, weil $x=a{\cdot}b$ ist, $Lx=La+Lb$ aus den schon gefundenen Logarithmen der kleineren Zahlen a und b durch bloße Addition gebildet wird. Und je größer x genommen wird, wenn $y=1$, desto schneller konvergirt die Reihe zur Rechten in V., d. h. desto weniger Glieder braucht man, um eine bestimmte Annäherung zu haben. Im 8ten Theile dieses Werkes und zwar in der „Lehre der endlichen Differenzen" sind jedoch die Mittel angedeutet, welche schneller zur Construktion einer Logarithmen-Tafel führen.

Und weil $L\frac{a}{b}=La-Lb$ ist, so hat man den Neper'schen Logarithmen jeder gebrochenen Zahl, sobald die der ganzen Zahlen gefunden sind.

In diesem Sinne kann man auch sagen: es sei (indem man nur das erste Glied der Reihe in VIII. nimmt)

$$\text{IX.} \qquad \mathcal{L}a = m\cdot(\sqrt[m]{a}-1) \quad \text{für} \quad m = \infty,$$

d. h. je größer man m nimmt, desto mehr nähert sich der Werth von $m\cdot(\sqrt[m]{a}-1)$ dem Werthe des Neper'schen Logarithmen $\mathcal{L}a$, und der Unterschied zwischen beiden Werthen kann so klein werden, als man nur immer will, also auch unendlich klein, wenn man nur m unendlich groß sich denkt.

§. 184.

Denkt man sich x, y und z positiv und x sehr groß gegen y und auch gegen z, so daß $\frac{y}{2x+y}$ und $\frac{z}{2x+z}$ sehr kleine Brüche sind, z. B. $< \frac{1}{10000}$, so sind die 3ten und 5ten und noch höheren Potenzen von $\frac{y}{2x+y}$ und $\frac{z}{2x+z}$ ungemein viel kleiner, im Beispiel $< \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}$, und haben also auf spätere Decimalstellen, im Beispiel auf die 12te Decimalstelle, keinen Einfluß mehr. Will man daher nur eine Annäherung, die bis zur z. B. 12ten Decimalstelle genau ist, so darf man in der Reihe V. zur Rechten die 3ten und höhern Potenzen außer Acht lassen, und man hat näherungsweise

$$\mathcal{L}(x+y) - \mathcal{L}x = \frac{2y}{2x+y}$$

und

$$\mathcal{L}(x+z) - \mathcal{L}x = \frac{2z}{2x+z},$$

folglich, wenn man dividirt,

$$\frac{\mathcal{L}(x+y) - \mathcal{L}x}{\mathcal{L}(x+z) - \mathcal{L}z} = \frac{y}{z} \cdot \frac{2x+z}{2x+y}.$$

Nun ist aber $\frac{2x+z}{2x+y}=1+\frac{z-y}{2x+y}$,

folglich, bei unserer Annahme, um weniger als $\frac{1}{10000}$ von 1 verschieden. Schreibt man daher die letztere Gleichung so:

$$\text{X.}\quad \frac{L(x+y)-Lx}{L(x+z)-Lz}=\frac{y}{z}$$

so ist sie sehr genähert wahr. Sie lehrt uns aber:

„Wenn x sehr groß ist und x+y und x+z nahe an x „liegende Zahlen sind, so verhalten sich die Differenzen zwischen „ihren (Neper'schen) Logarithmen und dem Lx, wie die Dif„ferenzen zwischen ihren Logarithmanden und dem Logarithman„den x (sehr genähert).

Hat man also z. B. $L983750$ und $L983760$ bereits gefunden und wünscht man den Neper'schen Logarithmen der zwischen liegenden Zahl 983756, so setzt man die erstere Zahl statt x, die andere statt x+z, so daß z = 10 wird, die dritte aber statt x+y, so daß y = 6 wird, und die Gleichung X. giebt uns nun

$$L983756-L983750=\frac{6}{10}\cdot(L983760-L983750).$$

Da nun, der Voraussetzung zu Folge, die letztere (eingeklammerte) Differenz augenblicklich gefunden und ein sehr kleiner Bruch ist, so ist bis auf eine Genauigkeit von mindestens 9 Decimalstellen auch die Differenz zur Linken gefunden, die zu dem bekannt vorausgesetzten $L983750$ addirt werden muß, um den gesuchten $L983756$ zu haben.

Sind daher die Neper'schen Logarithmen aller 5ziffrigen Zahlen, also auch der Zahlen 98375 und 98376 gefunden und in eine Tabelle gebracht, so darf man nur $L10$ hinzu addiren, um $L983750$ und $L983760$ zu haben, und das eben beschriebene Verfahren giebt dann leicht und sehr genähert die Neper'schen Logarithmen aller zwischen 983750 und 983760 liegenden

6ziffrigen Zahlen, so daß man durch dieses Hilfsmittel eine Tabelle, welche die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 enthält, in jedem einzelnen Rechnungsfall als eine solche benützen kann, welche die Logarithmen von 10 mal mehr Zahlen, nämlich bis zu 1000000 hin enthält. Ja man kann diese Erweiterung der Tafel noch einmal auf das 10fache des neuen Umfanges versuchen, muß aber dann mit Sorgfalt erst nachsehen, ob die verlangte Annäherung noch erreicht wird.

Vierte Abtheilung.

Von denjenigen logarithmischen Funktionen, welche Argumente und Arcus genannt werden *).

§. 185.

Sind gegeben die Gleichungen

1) $z = Sin\,x$ d. h. $z = \frac{1}{2i} \cdot (e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i})$,

oder

2) $z = Cos\,x$ d. h. $z = \frac{1}{2} \cdot (e^{x \cdot i} + e^{-x \cdot i})$,

oder

3) $z = Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x}$ d. h. $z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i}}{e^{x \cdot i} + e^{-x \cdot i}}$,

oder endlich

4) $z = Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sin\,x}$ d. h. $z = i \cdot \frac{e^{x \cdot i} + e^{-x \cdot i}}{e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i}}$,

so ist jedesmal z eine Funktion von x, aber eben deshalb auch x jedesmal eine Funktion von z. Man kann nun diese vier Gleichungen nach x auflösen und somit diese Funktionen von z

---

*) Diese Abtheilung kann der Anfänger vom §. 187. ab bis zum §. 196 incl., bei dem ersten Studiren, überschlagen.

herstellen. Die Gleichungen selbst sind zwar alle vier, in Bezug auf den Unbekannten x, solche, die wir (im I. Th. d. W.) transcendente genannt haben; sie gehen aber sogleich in algebraische über, sobald man

$$e^{x\cdot i} = u, \quad \text{also} \quad e^{-x\cdot i} = \frac{1}{u}$$

setzt und dann zunächst u als den Unbekannten ansieht. Die Gleichungen werden dann, alle vier, nach u quadratische; eine jede derselben liefert für u zwei Werthe und aus $e^{x\cdot i} = u$, folgt dann

$$x = \frac{1}{i}\cdot log\, u,$$

so daß x jedesmal noch, für jeden der beiden Werthe von u, unendlich viele Werthe hat, die alle der, in der entsprechenden der Gleichungen 1.—4. ausgesprochenen Eigenschaft genügen, ohne einander gleich zu sein, ja ohne daß nur zwei dieser Werthe einander gleich werden. Sie sind jedesmal alle von einander verschieden.

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt nun:

I. Aus $z = Sin\, x$ wird $x = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-z^2} + z\cdot i)$.

II. Aus $z = Cos\, x$ folgt $x = \frac{1}{i}\cdot log(z + i\cdot\sqrt{1-z^2})$

$$= \frac{1}{i}\cdot log(z + \sqrt{z^2-1}).$$

III. Aus $z = Tg\, x$ ergiebt sich $x = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i}$.

IV. Aus $z = Cotg\, x$ wird $x = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{z+i}{z-i}$. *)

---

*) Gewöhnlich stellt man diese Resultate, wie folgt, her:

Es ist 1) $e^{x\cdot i} = Cos\, x + i\cdot Sin\, x$

und $e^{-x\cdot i} = Cos\, x - i\cdot Sin\, x$.

Diese vier unendlich vieldeutigen logarithmischen Funktionen von z (incl. der Faktoren $\frac{1}{i}$ oder $\frac{1}{2i}$, für welche man noch bezüglich $-i$ und $-\frac{1}{2}i$ schreiben könnte) zur Rechten der Gleichheitszeichen in I.–IV., bezeichnen wir von nun an bezüglich durch die Zeichen

$$\frac{1}{Sin}\cdot z,\quad \frac{1}{Cos}\cdot z,\quad \frac{1}{Tg}\cdot z \quad \text{und} \quad \frac{1}{Cotg}\cdot z$$

und wir nennen diese Zeichen: die zu z, als Sinus, Kosinus, Tangente oder Kotangente gedacht, gehörigen Argumente und wir sprechen sie bezüglich aus

Argum. Sinus, *Argum. Cosinus*, *Argum. Tangens*, *Argum. Cotangens*,

---

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander, so ergiebt sich

$$e^{2x\cdot i} = \frac{Cos\,x + i\cdot Sin\,x}{Cos\,x - i\cdot Sin\,x};$$

oder, je nachdem man Zähler und Nenner dieses Quotienten durch $Cos\,x$, oder durch $Sin\,x$ dividirt,

$$2)\quad e^{2x\cdot i} = \frac{1+i\cdot Tg\,x}{1-i\cdot Tg\,x};\qquad 3)\quad e^{2x\cdot i} = \frac{Cotg\,x+i}{Cotg\,x-i}.$$

Die Gleichungen 1.–3. geben nun bezüglich

$$4)\qquad x = \frac{1}{i}\cdot log\,(Cos\,x + i\cdot Sin\,x);$$

$$5)\qquad x = \frac{1}{2i}\cdot log\,\frac{1+i\cdot Tg\,x}{1-i\cdot Tg\,x};$$

$$6)\qquad x = \frac{1}{2i}\cdot log\,\frac{Cotg\,x+i}{Cotg\,x-i}.$$

Ist nun $Sin\,x = z$ gegeben, so ist $Cos\,x = \sqrt{1-z^2}$ und die hiesige 4.) giebt dann die obige I. — Ist aber $Cos\,x = z$ gegeben, so ist $Sin\,x = \sqrt{1-z^2}$ und dieselbe 4.) giebt dann die obige II. — Ist ferner $Tg\,x = z$ gegeben, so ist die hiesige 5.) von der obigen III. nicht verschieden. — Und ist endlich $Cotg\,x = z$ gegeben, so fällt die hiesige 6.) mit der obigen IV. zusammen.

indem wir den gegebenen Sinus oder Kosinus, oder die gegebene Tangente oder Cotangente unmittelbar mit aussprechen.

Die Bedeutung der hier eben eingeführten Zeichen

$$\frac{1}{Sin}, \quad \frac{1}{Cos}, \quad \frac{1}{Tg} \text{ und } \frac{1}{Cotg},$$

ist also ausgesprochen in den Gleichungen

$$\text{V.} \quad Sin\left(\frac{1}{Sin}\cdot z\right) = z; \qquad \text{VI.} \quad Cos\left(\frac{1}{Cos}\cdot z\right) = z;$$

$$\text{VII.} \quad Tg\left(\frac{1}{Tg}\cdot z\right) = z \text{ und } \text{VIII.} \quad Cotg\left(\frac{1}{Cotg}\cdot z\right) = z;$$

eben so wie in den Gleichungen

$$\text{IX.} \quad \frac{1}{Sin}\cdot z = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-z^2}+z\cdot i);$$

$$\text{X.} \quad \frac{1}{Cos}\cdot z = \frac{1}{i}\cdot log(z+i\cdot\sqrt{1-z^2});$$

$$\text{XI.} \quad \frac{1}{Tg}\cdot z = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i};$$

$$\text{XII.} \quad \frac{1}{Cotg}\cdot z = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{z+i}{z-i}.$$

§. 186.

Setzt man in IX., XI. und XII. zur Rechten, $-z$ statt z, so werden die Logarithmanden, wenn sie vorher $=N$ waren, jetzt $=\frac{1}{N}$; und da $log\frac{1}{N} = -log N$ ist, so ergeben sich sogleich folgende drei Resultate, nämlich

$$1) \quad \frac{1}{Sin}\cdot(-z) = -\frac{1}{Sin}\cdot z;$$

$$2) \quad \frac{1}{Tg}\cdot(-z) = -\frac{1}{Tg}\cdot z;$$

und $3) \quad \frac{1}{Cotg}\cdot(-z) = -\frac{1}{Cotg}\cdot z$ *).

*) Diese Resultate ergeben sich auch aus den Gleichungen
$Sin(-x) = -Sin x$, $Tg(-x) = -Tg x$ und $Cotg(-x) = -Cotg x$.

Setzt man aber in der X. zur Rechten, $-z$ statt z, so erhält man einen Logarithmanden $-z+i\cdot\sqrt{1-z^2}$, welcher mit dem Logarithmanden in X., nämlich mit $z+i\cdot\sqrt{1-z^2}$ multiplicirt, -1 giebt. Man hat also

$$log(-z+i\cdot\sqrt{1-z^2}) = log(-1) - log(z+i\cdot\sqrt{1-z^2})$$

wo man (nach §. 179.) statt $log(-1)$ eben so wohl alle seine Werthe $(2n+1)\pi\cdot i$, als auch nur einen einzigen (z. B. $\pi\cdot i$) derselben, setzen kann. Man erhält also

$$4)\qquad \frac{1}{Cos}\cdot(-z) = (2n+1)\pi - \frac{1}{Cos}\cdot z$$

$$\text{oder}\qquad = \pi - \frac{1}{Cos}\cdot z, \text{ *)}$$

wenn nur unter n, sowohl Null als auch jede positive und negative ganze Zahl verstanden wird; und man ist überzeugt, daß diese Gleichung 4.) in der einen, wie in der andern Form, eine vollkommene (richtige) Gleichung ist, welche rechts nicht mehr und nicht weniger Werthe hat und genau dieselben, wie links.

Endlich ist noch

$$5)\qquad -\frac{1}{Cos}\cdot z = \frac{1}{Cos}\cdot z;$$

Setzt man nämlich $Sin\,x = z$, so wird $Sin(-x) = -z$, also $-x = \frac{1}{Sin}\cdot(-z)$, während $x = \frac{1}{Sin}\cdot z$ ist. — Gerade so verfährt man mit den beiden andern Gleichungen.

*) Dies Resultat kann man auch aus $Cos(\pi-x) = -Cos\,x$ folgern, indem man $Cos\,x = z$ setzt, dann $Cos(\pi-x) = -z$, also $\pi-x = \frac{1}{Cos}\cdot(-z)$ hat, während statt x selbst $\frac{1}{Cos}\cdot z$ gesetzt werden kann. — Man müßte aber nun erst untersuchen, ob die Gleichung links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe hat.

wie sowohl daraus hervorgeht, daß, wenn $\mathit{Cos}\,x = z$ ist, dann auch $\mathit{Cos}(-x) = z$ sein muß, — als auch daraus, daß

$$-\frac{1}{\mathit{Cos}}\cdot z = -\frac{1}{i}\cdot \mathit{log}\,(z+i\cdot\sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{i}\cdot \mathit{log}\frac{1}{z+i\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

(nach §. 179.) $$= \frac{1}{i}\cdot \mathit{log}\,(z-i\cdot\sqrt{1-z^2})$$

gefunden wird, — weil

$$\frac{1}{z+i\cdot\sqrt{1-z^2}} = z-i\cdot\sqrt{1-z^2}$$

ist; — während wegen der Zweiförmigkeit der $\sqrt{1-z^2}$ $z-i\cdot\sqrt{1-z^2}$ derselbe doppelförmige Ausdruck ist, als $z+i\cdot\sqrt{1-z^2}$, so daß sich wiederum

$$\frac{1}{i}\cdot \mathit{log}(z-i\cdot\sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{\mathit{Cos}}\cdot z$$

findet.

§. 187.

Die nächsten Aufgaben, welche man sich zu stellen hat, sind nun: „die unendlich vielen Werthe der Funktionen

$$\frac{1}{\mathit{Sin}}\cdot(p+q\cdot i),\quad \frac{1}{\mathit{Cos}}\cdot(p+q\cdot i),\quad \frac{1}{\mathit{Tg}}\cdot(p+q\cdot i) \text{ und } \frac{1}{\mathit{Cotg}}\cdot(p+q\cdot i)$$

„„auszurechnen““, d. h. auf die Form $\alpha+\beta\cdot i$ zu bringen.“

Man muß zu dem Ende in IX.–XII. des §. 185. zur Rechten, $p+q\cdot i$ statt z setzen, die dadurch entstehenden Logarithmanden ebenfalls auf die Form $P+Q\cdot i$ bringen, dann aber die Formel des §. 175. anwenden, welche $\mathit{log}(P+Q\cdot i)$ in der „ausgerechneten“ Form liefert. — Versuchen wir dies zunächst mit zwei derselben, nämlich mit $\frac{1}{\mathit{Tg}}\cdot(p+q\cdot i)$ und $\frac{1}{\mathit{Cotg}}\cdot(p+q\cdot i)$.

A. Setzt man in der XI. des §. 185. $p+q\cdot i$ statt z, so erhält man

$$\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i} = \frac{1-q+p\cdot i}{1+q-p\cdot i} = \frac{1-q^2-p^2}{(1+q)^2+p^2} + \frac{2p}{(1+q)^2+p^2}\cdot i.$$

Um nun den Logarithmen dieses Ausdrucks „auszurechnen" (nach §. 175.), berechnet man sich zuerst

$$1)\quad r = +\sqrt{\frac{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}{[(1+q)^2+p^2]^2}} = \frac{+\sqrt{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}}{(1+q)^2+p^2},$$

dann aber φ aus den Gleichungen

$$2)\quad Cos\,\varphi = \frac{1-q^2-p^2}{+\sqrt{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}}$$

und

$$3)\quad Sin\,\varphi = \frac{2p}{+\sqrt{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}},$$

nimmt φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so daß φ mit p zugleich positiv, oder mit p zugleich negativ ist und dabei (abgesehen vom Vorzeichen) im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Quadranten liegt, je nachdem $1-q^2-p^2$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist; und hat nun (für $z = p+q\cdot i$)

$$log\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i} = Lr + (2n\pi+\varphi)\cdot i$$

und dann (aus §. 185. XI.)

$$\text{I.}\quad \frac{1}{Tg}\cdot(p+q\cdot i) = n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2i}\cdot Lr = n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}i\cdot Lr,$$

wenn nur n sowohl 0 als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt, während φ und r aus den Gleichungen 1.—3. hergeholt werden müssen. — Dadurch ist aber gelöst, was im §. 167^{bis}. nur besprochen werden konnte.

Denken wir uns den besondern Fall, wo $q = 0$ und p positiv (beliebig groß oder beliebig klein) ist, so wird $r = 1$, also $Lr = 0$ und

$$4)\quad Cos\,\varphi = \frac{1-p^2}{1+p^2},\qquad 5)\quad Sin\,\varphi = \frac{2p}{1+p^2};$$

und man findet, wenn p positiv ist,

$$\text{I. 1.}\quad \frac{1}{Tg}\cdot p = n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi;$$

und alle diese Werthe sind reell, während φ, da $Sin\,\varphi$ positiv ist, selbst positiv ist und im ersten oder zweiten Quadranten liegt, je nachdem $1-p^2$ positiv oder negativ, d. h. $p<1$ oder $p>1$ ist; so daß $\frac{1}{2}\varphi$ jedenfalls im ersten Quadranten liegen muß. — Für $n=0$ zeigt sich aber (aus I. 1.) $\frac{1}{2}\varphi$ als ein Werth von $\frac{1}{Tg}\cdot p$, so daß $Tg\frac{1}{2}\varphi = p$ ist *).

Dächte man sich den andern besondern Fall, wo $p+q\cdot i$ eine negative Zahl wird, wo also $q=0$ und p negativ ist, so würde man ein analoges Resultat erhalten. Man kommt aber aus I. 1. unmittelbar dazu, wenn man bedenkt, daß (nach §. 186.) $\frac{1}{Tg}\cdot(-p) = -\frac{1}{Tg}\cdot p$ ist; denn daraus folgt sogleich, indem wir p positiv, also $-p$ negativ voraussetzen.

$$\text{I. 2.}\qquad \frac{1}{Tg}\cdot(-p) = -(n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi) = n\pi-\tfrac{1}{2}\varphi,$$

in so ferne man $n\pi$ statt $-n\pi$ schreiben kann, weil n doch eben so gut alle negativen, wie alle positiven ganzen Zahlen vorstellt; nur muß φ aus den Gleichungen 4.) und 5.) bestimmt werden, oder aus der Gleichung

$$Tg\tfrac{1}{2}\varphi = p,$$

wo p positiv ist, so daß $\frac{1}{2}\varphi$ im ersten Quadranten genommen werden muß.

B. Gehen wir nun zur „Ausrechnung" von $\frac{1}{Cotg}\cdot(p+q\cdot i)$ über. — Setzt man deshalb in XII. des §. 185. zur Rechten, $p+q\cdot i$ statt z, so hat man

---

*) Dies findet man auch aus $Sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-Cos\,\varphi}{2}}$ und $Cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+Cos\,\varphi}{2}}$, also $Tg\frac{1}{2}\varphi = \frac{Sin\frac{1}{2}\varphi}{Cos\frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\frac{1-Cos\,\varphi}{1+Cos\,\varphi}} = \sqrt{\frac{2p^2}{2}} = \sqrt{p^2} = \pm p$, während, da $\frac{1}{2}\varphi$ im ersten Quadranten liegt, nur $+p$ (nicht aber $-p$) genommen werden darf.

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{p+(q+1)\cdot i}{p+(q-1)\cdot i} = \frac{p^2+q^2-1}{p^2+(q-1)^2} + \frac{2p}{p^2+(q-1)^2}\cdot i.$$

Daher findet sich (nach §. 175.)

$$log\frac{z+i}{z-i} = L\,r+(2n\pi+\varphi)\cdot i$$

wenn

$$6)\quad r = \frac{+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{p^2+(q-1)^2}$$

genommen und φ berechnet wird aus

$$7)\quad Cos\,\varphi = \frac{p^2+q^2-1}{+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}$$

und

$$8)\quad Sin\,\varphi = \frac{2p}{+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}$$

während φ wieder mit p zugleich positiv oder mit p zugleich negativ ist, und (abgesehen vom Vorzeichen) im $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}\right\}$ Quadranten liegt, je nachdem p^2+q^2-1 $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist; und die XII. des §. 185. giebt nun

$$\text{II.}\quad \frac{1}{Cotg}\cdot(p+q\cdot i) = n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}i\cdot L\,r$$

dazu.

Setzt man in diesem allgemeinen Resultate wiederum $q=0$ und denkt man sich gleichzeitig p positiv, so wird abermals $r=1$, $L\,r=0$ und φ bestimmt durch die Gleichungen

$$9)\quad Cos\,\varphi = \frac{p^2-1}{p^2+1} \quad \text{und} \quad 10)\quad Sin\,\varphi = \frac{2p}{p^2+1};$$

und die Gleichung II. giebt nun, wenn p positiv ist,

$$\text{II. 1.}\quad \frac{1}{Cotg}\cdot p = n\pi+\tfrac{1}{2}\varphi,$$

während $\frac{1}{2}\varphi$ im ersten Quadranten genommen werden muß,

auch der kleinste positive Werth von $\frac{1}{Cotg}\cdot p$ ist (für $n=0$ genommen) *).

Wegen $\frac{1}{Cotg}\cdot(-p) = -\frac{1}{Cotg}\cdot p$ (§. 186.) folgt hieraus wiederum

II. 2. $\frac{1}{Cotg}\cdot(-p) = n\pi - \tfrac{1}{2}\varphi$,

wenn φ aus den Gleichungen 9.) und 10.) berechnet wird, oder aus der Gleichung $Cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi = p$, während p positiv, also $-p$ negativ gedacht ist, so daß $\tfrac{1}{2}\varphi$ im ersten Quadranten genommen werden muß.

§. 188.

Will man auf dieselbe Weise $\frac{1}{Sin}\cdot(p+q\cdot i)$ oder $\frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i)$ „ausrechnen", so hat man etwas mehr Mühe, weil in den Formeln IX. und X. des §. 185., $\sqrt{1-z^2}$ vorkommt, welche, für $z=p+q\cdot i$, in $\sqrt{1-(p+q\cdot i)^2} = \sqrt{(1-p^2+q^2)-2pq\cdot i}$ übergeht, so daß also diese Quadratwurzel selbst erst „ausgerechnet" (d. h. auf die Form $\alpha+\beta\cdot i$ gebracht) werden muß. Setzt man aber

1) $\sqrt{(1-p^2+q^2)-2pq\cdot i} = \pm(\alpha+\beta\cdot i)$,

so hat man zur Bestimmung von α und β die Gleichungen

2) $\alpha^2-\beta^2 = 1-p^2+q^2$ und 3) $\alpha\beta = -pq$;

und aus diesen findet sich

$$\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2} = \alpha^2+\beta^2 = +\sqrt{(1-p^2+q^2)^2+4p^2q^2} = R,$$

*) Dies wird wieder bestätigt aus der Gleichung

$$Cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+Cos\,\varphi}{1-Cos\,\varphi}} = \sqrt{\frac{2p^2}{2}} = \sqrt{p^2} = \pm p,$$

während $+p$ genommen werden muß, weil $\tfrac{1}{2}\varphi$ im ersten Quadranten liegt.

wenn man der Abkürzung wegen, diese letztere Wurzel positiv, wie sie gedacht ist, $=\mathrm{R}$ setzt, so daß

$$4)\quad \mathrm{R}^2=(1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)^2+4\mathrm{p}^2\mathrm{q}^2$$

oder

$$5)\quad \mathrm{R}^2=(-1+\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)^2+4\mathrm{q}^2$$

oder auch

$$6)\quad \mathrm{R}^2=(1+\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)^2-4\mathrm{p}^2$$

ist, in so ferne die drei letztern Ausdrücke zur Rechten, alle einander gleich sind. Daraus folgt dann

$$7)\quad \alpha=+\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{R}}$$

und

$$8)\quad \beta=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{R}},$$

wo, wegen $\alpha\beta=-\mathrm{pq}$, nachdem α absichtlich bloß positiv genommen ist, β mit $-\mathrm{pq}$ einerlei Vorzeichen bekommen muß *).

A. Es wird nun, für $\mathrm{z}=\mathrm{p}+\mathrm{q}\cdot i$, der Logarithmand in IX. des §. 185. zur Rechten, nämlich

$$9)\quad \sqrt{1-\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}\cdot i, =(\pm\alpha-\mathrm{q})+(\pm\beta+\mathrm{p})\cdot i,$$

wo $+\alpha-\mathrm{q}$ stets positiv, $-\alpha-\mathrm{q}$ stets negativ sein wird **), und wo $+\beta+\mathrm{p}$ und $-\beta+\mathrm{p}$ bald positiv bald negativ sein

---

*) Man kann natürlich die $\sqrt{(1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)-2\mathrm{pq}\cdot i}$ auch nach §. 171. ausrechnen; also dadurch, daß man $\mathrm{R}=+\sqrt{(1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2)^2+4\mathrm{p}^2\mathrm{q}^2}$ und $Cos\,\psi=\frac{1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2}{\mathrm{R}}$, so wie $Sin\,\psi=\frac{-2\mathrm{pq}}{\mathrm{R}}$ und ψ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ nimmt, mit $-\mathrm{pq}$ zugleich positiv oder negativ und im ersten oder zweiten Quadranten, je nachdem $1-\mathrm{p}^2+\mathrm{q}^2$ positiv oder negativ ist, und zuletzt die gedachte Quadratwurzel $=\sqrt{\mathrm{R}}\cdot(Cos\,(\mathrm{n}\pi+\tfrac{1}{2}\psi)+i\cdot Sin\,(\mathrm{n}\pi+\tfrac{1}{2}\psi))$, wobei man hier bloß $\mathrm{n}=0$ nehmen und $\pm\sqrt{\mathrm{R}}$ statt $\sqrt{\mathrm{R}}$ setzen kann, so daß man die Quadratwurzel $=\pm\sqrt{\mathrm{R}}\cdot(Cos\,\tfrac{1}{2}\psi+i\cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\psi)$ hat.

**) Es findet sich nämlich $2\alpha^2-2\mathrm{q}^2=1-\mathrm{p}^2-\mathrm{q}^2+\mathrm{R}$, während R positiv und (aus 5.) größer ist als $\pm(1-\mathrm{p}^2-\mathrm{q}^2)$, d. h. größer ist, als der absolute Werth von $1-\mathrm{p}^2-\mathrm{q}^2$, es mag letzteres positiv oder negativ sein; folglich ist $2\alpha^2-2\mathrm{q}^2$, also auch $\alpha^2-\mathrm{q}^2$ positiv, also auch α größer als der absolute Werth von q; und deshalb ist $\alpha-\mathrm{q}$ positiv, dagegen $-\alpha-\mathrm{q}$ negativ.

können, aber beide mit p zugleich positiv oder mit p zugleich negativsein müssen *).

Nachdem nun der Logarithmand „ausgerechnet" ist, so berechnet sich (nach §. 175.) sogleich der Logarithme selbst. Man muß zu dem Ende r und φ berechnen aus den Gleichungen

$$10) \quad r = +\sqrt{(\alpha-q)^2+(\beta+p)^2}$$

$$11) \quad Cos\,\varphi = \frac{\alpha-q}{r} \quad \text{und} \quad 12) \quad Sin\,\varphi = \frac{\beta+p}{r};$$

aber eben so muß man auch r′ und φ' berechnen aus den Gleichungen

$$13) \quad r' = +\sqrt{(-\alpha-q)^2+(-\beta+p)^2}$$

$$14) \quad Cos\,\varphi' = \frac{-\alpha-q}{r'} \quad \text{und} \quad 15) \quad Sin\,\varphi' = \frac{-\beta+p}{r'},$$

wobei φ (abgesehen vom Vorzeichen) im ersten Quadranten liegt, weil $\alpha-q$ positiv ist, dagegen φ' (ebenfalls absolut genommen) im zweiten Quadranten liegt, weil $-\alpha-q$ negativ ist, während φ und φ' beide, zugleich mit p positiv, oder beide mit p zugleich negativ sind. Dann hat man (nach §. 175.), für $z = p+q\cdot i$,

$$16) \quad log\left(\sqrt{1-z^2}+z\cdot i\right) = \begin{cases} Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i \\ Lr'+(2n\pi+\varphi')\cdot i \end{cases},$$

wo n sowohl 0 als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt, so daß dieser Logarithme zwei Reihen unendlich vieler Werthe hat.

Es ist aber auch noch

$$17) \quad r\cdot r' = 1\ ^{**}), \quad \text{also} \quad Lr' = -Lr,$$

*) Es ist $2p^2-2\beta^2 = 1+p^2+q^2-R$, während (aus 6.) $R<1+p^2+q^2$ ist. Also ist $2p^2-2\beta^2$ positiv, folglich ist $p^2>\beta^2$ und deshalb auch der absolute Werth von p, größer als der absolute Werth von β (es ist nämlich β mit $-pq$ zugleich positiv oder negativ); und deshalb haben $p+\beta$ und $p-\beta$ stets das Vorzeichen von p.

**) Multiplicirt man nämlich $(+\alpha-q)^2+(+\beta+p)^2$
mit $(-\alpha-q)^2+(-\beta+p)^2$,

und deshalb findet sich auch noch

$$Cos(\varphi+\varphi') = Cos\,\varphi \cdot Cos\,\varphi' - Sin\,\varphi \cdot Sin\,\varphi'$$
$$= (q^2-\alpha^2)-(p^2-\beta^2) = q^2-p^2-(\alpha^2-\beta^2)$$

d. h. $Cos(\varphi+\varphi') = -1,$

also 18) $\varphi+\varphi' = \pm\pi$, je nachdem p $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist.

Dadurch geht $2n\pi+\varphi'$ in $(2n+1)\pi-\varphi$ über (in 16.) und die IX. des §. 185. giebt nun

$$\text{III.}\quad \frac{1}{Sin}\cdot(p+q\cdot i) = \begin{Bmatrix} 2n\pi+\varphi-i\cdot Lr \\ (2n+1)\pi-\varphi+i\cdot Lr \end{Bmatrix}$$

wofür man schreiben könnte $n\pi\pm(\varphi-i\cdot Lr)$, wenn man mit Worten hinzufügen wollte, daß n positiv und negativ und gerade (oder Null) genommen werden muß, sobald das + (des ± Zeichens) gewählt wird, daß aber auch das − Zeichen genommen werden muß und dann statt n nur alle ungeraden positiven oder negativen Zahlen gesetzt werden dürfen.

B. Geht man nun zu der andern Aufgabe über, nämlich $\frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i)$ zu finden, so muß man in der X. des §. 185. $p+q\cdot i$ statt z setzen. Dadurch erhält man den Logarithmanden

19) $z+i\cdot\sqrt{1-z^2}, = (p\mp\beta)+q\pm\alpha)\cdot i.$

Wird nun (nach §. 175.) der Logarithme ausgerechnet, so muß man nehmen

---

so erhält man zunächst

$$(q^2-\alpha^2)^2+(p^2-\beta^2)^2+2(p\alpha+q\beta)^2$$

sobald man bedenkt, daß $\alpha\beta+pq=0$ ist. Subtrahirt man nun hiervon $2\alpha^2\beta^2-2p^2q^2$, welches wiederum $=0$ ist, so wird das gedachte Produkt

$$= (\alpha^2-\beta^2)^2+(p^2+q^2)^2-2q^2\alpha^2-2p^2\beta^2+2(p^2\alpha^2+q^2\beta^2+2pq\alpha\beta).$$

Und setzt man nun hier herein statt $\alpha^2-\beta^2$ den Werth $1-p^2+q^2$, so wie statt $\alpha\beta$ den Werth $-pq$, so findet sich dasselbe Produkt $=1$.

$$20) \quad r = +\sqrt{(p-\beta)^2+(q+\alpha)^2}$$

$$21) \quad Cos\,\varphi = \frac{p-\beta}{r} \quad \text{und} \quad 22) \quad Sin\,\varphi = \frac{q+\alpha}{r};$$

ferner $$23) \quad r' = +\sqrt{(p+\beta)^2+(q-\alpha)^2}$$

$$24) \quad Cos\,\varphi' = \frac{p+\beta}{r'} \quad \text{und} \quad 25) \quad Sin\,\varphi' = \frac{q-\alpha}{r'},$$

wo φ und φ' zugleich im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Quadranten liegen, je nachdem p $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist, während φ positiv, φ' dagegen negativ genommen werden muß, weil $q+\alpha$ positiv, $q-\alpha$ dagegen entschieden negativ ist.

Nun findet man (aus §. 175.)

$$log\left(z+i\cdot\sqrt{1-z^2}\right) = \begin{Bmatrix} Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i \\ Lr'+(2n\pi+\varphi')\cdot i \end{Bmatrix}.$$

Weil aber wiederum

$$26) \quad r\cdot r' = 1\ ^{*)}, \quad \text{also} \quad Lr' = -Lr$$

ist, und weil eben deshalb

$$Cos(\varphi+\varphi') = Cos\,\varphi\cdot Cos\,\varphi' - Sin\,\varphi\cdot Sin\,\varphi'$$
$$= (p^2-\beta^2)-(q^2-\alpha^2) = 1$$

wird, so wird

$$27) \quad \varphi+\varphi' = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi' = -\varphi.$$

Die X. des §. 185. giebt daher jetzt

$$\text{IV.} \quad \frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i) = \begin{Bmatrix} 2n\pi+\varphi-i\cdot Lr \\ 2n\pi-\varphi+i\cdot Lr \end{Bmatrix},$$

so daß rechts wiederum zwei Reihen unendlich vieler Werthe des $\frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i)$ und zwar alle Werthe zu finden sind.

---

*) Multiplicirt man nämlich $(p-\beta)^2+(q+\alpha)^2$ mit $(p+\beta)^2+(q-\alpha)^2$, so erhält man zunächst $(p^2-\beta^2)^2+(q^2-\alpha^2)^2+2(\alpha p+\beta q)^2$, wenn man berücksichtigt, daß $\alpha\beta+pq=0$ ist. Das Weitere folgt dann, wie in der vorhergehenden Note, um zu zeigen, daß dasselbe Produkt $=1$ ist.

Durch diese Lösungen III. und IV. ist aber geleistet, was im §. 164. nur besprochen und versprochen werden konnte.

§. 189.

Gehen wir nun an die besonderen Fälle der beiden letztern Aufgaben. Denkt man sich $q=0$ und p positiv, und will man zuerst (aus III.) $\frac{1}{Sin}\cdot p$ berechnen, so findet sich (aus §. 188. NNr. 7. 8.) zunächst

$$\alpha = +\sqrt{+\tfrac{1}{2}(1-p^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-p^2)^2}}$$

und

$$\beta = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}(1-p^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-p^2)^2}},$$

wo die innere Quadratwurzel $\sqrt{(1-p^2)^2}$ ihren positiven Werth vorstellen muß (wenn sie nicht $=0$ ist), so daß sie

$$=p^2-1 \text{ ist, wenn } p>1$$

aber $=1-p^2$, wenn p nicht >1 ist.

Nehmen wir zuerst $p>1$ an; dann wird $\alpha=0$, $\beta=\sqrt{p^2-1}$ (zweideutig, weil jetzt $\alpha\beta=-pq$ in $0=0$ übergeht), daher ist (aus 10.—12.)

$$r=p+\sqrt{p^2-1},\quad Cos\,\varphi=0 \text{ und } Sin\,\varphi=1;$$

folglich $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

Aus III. geht also hervor, wenn p positiv und >1 ist,

III. 1. $$\frac{1}{Sin}\cdot p=(2n+\tfrac{1}{2})\pi\pm i\cdot L\left(p+\sqrt{p^2-1}\right),$$

in so ferne $2n\pi+\frac{1}{2}\pi$ und $(2n+1)\pi-\frac{1}{2}\pi$ ein und dasselbe ist, und man auch noch ein und dasselbe bekommt, ob man die $\sqrt{p^2-1}$ im Logarithmanden (zur Rechten von III. 1.) positiv oder negativ nimmt, sobald man beide Vorzeichen $\pm$ gelten läßt.

Alle diese Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot p$, wenn p positiv und >1 ist, sind imaginär.

Nehmen wir nun $p \overline{\overline{<}} 1$, aber noch positiv, so wird jetzt (aus 7. 8. des §. 188.)

$$\alpha = +\sqrt{1-p^2} \quad \text{und} \quad \beta = 0,$$

daher (aus 10.–12.)

$$r = 1, \quad \text{also} \quad Lr = 0;$$

und

$$Cos\,\varphi = +\sqrt{1-p^2} \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi = p;$$

wo φ im ersten Quadranten liegt. Die Gleichung III. giebt also jetzt, wenn p positiv und nicht >1 ist,

$$\text{III. 2.} \quad \frac{1}{Sin}\cdot p = \begin{Bmatrix} 2n\pi+\varphi \\ (2n+1)\pi-\varphi \end{Bmatrix} \text{*)},$$

wo φ im ersten Quadranten liegt und der kleinste positive Werth von $\frac{1}{Sin}\cdot p$ ist (für $n = 0$).

Wegen $\frac{1}{Sin}\cdot(-p) = -\frac{1}{Sin}\cdot p$ (§. 186.) geht aus den Gleichungen III. 1. und III. 2. sogleich noch hervor, wenn p positiv, also −p negativ vorausgesetzt wird

$$\text{III. 3.} \quad \frac{1}{Sin}\cdot(-p) = (2n-\tfrac{1}{2})\pi \pm i\cdot L(p+\sqrt{p^2-1}) \quad \text{für } p>1$$

und

$$\text{III. 4.} \quad \frac{1}{Sin}\cdot(-p) = \begin{Bmatrix} 2n\pi-\varphi \\ (2n+1)\pi+\varphi \end{Bmatrix} \quad \text{für } p \overline{\overline{<}} 1, \text{**)}$$

wo $-\varphi$ der an sich kleinste negative Werth von $\frac{1}{Sin}\cdot(-p)$ ist.

---

*) Dasselbe Resultat so wie auch das in III. 4. folgende, haben wir bereits im §. 163. und genau eben so gefunden, für denselben Fall, wo $p \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ und nicht >1 ist.

**) Es drücken +2n und −2n ein und dasselbe aus; eben so −(2n+1) und +(2n+1), weil n sowohl 0 als auch jede positive und auch jede negative ganze Zahl vorstellt.

Die Gleichung IV. (des §. 188.) giebt für $q=0$ und p positiv und >1, (weil aus 20.–22.

$$r = p + \sqrt{p^2-1} \quad \text{(wo die Wurzel zweideutig)},$$

$$Cos\,\varphi = 1 \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi = 0,$$

also $\varphi = 0$ hervorgeht),

IV. 1. $\frac{1}{Cos}\cdot p = 2n\pi \pm i\cdot L\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$,

wo nur ein Werth der Quadratwurzel genommen zu werden braucht, weil der andere dasselbe liefert.

Und für p positiv und nicht >1 giebt dieselbe Gleichung IV., weil nun $\alpha = +\sqrt{1-p^2}$ und $\beta = 0$ wird, so daß (aus den Gleichungen 20.–22.) $r=1$, also $Lr = 0$ und

$$Cos\,\varphi = p, \quad \text{so wie} \quad Sin\,\varphi = \sqrt{1-p^2}$$

hervorgeht, — jetzt das nachstehende Resultat, nämlich:

IV. 2. $\frac{1}{Cos}\cdot p = 2n\pi \pm \varphi$,

wo φ im ersten Quadranten genommen wird. Dabei weist sich auch (aus IV. 2. selbst) φ als der kleinste positive Werth von $\frac{1}{Cos}\cdot p$ (für $n=0$) aus, d. h. als der kleinste Werth von x, der aus $Cos\,x = p$ hervorgeht *).

Und weil $\frac{1}{Cos}\cdot(-p) = \pi - \frac{1}{Cos}\cdot p$ gefunden worden ist (§. 186. IV.), so geht nun aus IV. 1. und IV. 2. augenblicklich noch hervor, wenn p positiv, also $-p$ negativ ist,

IV. 3. $\frac{1}{Cos}\cdot(-p) = (2n+1)\pi \pm i\cdot L\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$ für $p>1$;

und

IV. 4. $\frac{1}{Cos}\cdot(-p) = (2n+1)\pi \mp \varphi$ für $p \overline{\overline{<}} 1$,

*) Auch dieses Resultat so wie noch das in IV. 4. folgende, haben wir bereits genau eben so im §. 163. gefunden.

während (für $n=0$) $\pi-\varphi$ sich als der kleinste positive Werth von $\frac{1}{Cos}\cdot(-p)$ ausweist, also φ selbst als der kleinste positive, im ersten Quadranten liegende Werth von $\frac{1}{Cos}\cdot(+p)$, wie dasselbe auch aus dem Gange der Untersuchung bereits bekannt ist, da φ nur im ersten Quadranten genommen worden ist.

Anmerkung 1. Die in diesen beiden letztern Paragraphen gelösten Aufgaben konnte man auch alle dadurch lösen, daß man z. B.

1) $$\frac{1}{Sin}\cdot(p+q\cdot i)=\alpha+\beta\cdot i$$

setzte, α und β reell und unbestimmt dachte, dann aus der hingeschriebenen Gleichung diese andere, nämlich

2) $$p+q\cdot i=Sin(\alpha+\beta\cdot i)$$

ableitete, hierauf den $Sin(\alpha+\beta\cdot i)$ „ausrechnete" und den reellen Theil davon $=p$, den andern $=q$ setzte, und dadurch zwei Gleichungen erhielt, aus denen nun die beiden unbekannten, aber reell vorausgesetzten Werthe von α und β, gefunden werden müssen. Die Gleichung 2.) giebt z. B. weiter

$$p+q\cdot i=Sin\,\alpha\cdot Cos(\beta\cdot i)+Cos\,\alpha\cdot Sin(\beta\cdot i)$$
$$=\tfrac{1}{2}Sin\,\alpha\cdot(e^{\beta}+e^{-\beta})+\tfrac{1}{2}i\cdot Cos\,\alpha\cdot(e^{\beta}-e^{-\beta}).$$

Aus der Vergleichung links und rechts erhält man dann

3) $(e^{\beta}+e^{-\beta})\cdot Sin\,\alpha=2p$ und 4) $(e^{\beta}-e^{-\beta})\cdot Cos\,\alpha=2q$

aus denen nun α und β gefunden werden müssen. Findet man aber aus diesen Gleichungen $Sin\,\alpha$ und $Cos\,\alpha$, quadrirt und addirt man dann die erhaltenen Ausdrücke, so daß sich α eliminirt, so giebt dies

5) $$\frac{4p^2}{e^{2\beta}+2+e^{-2\beta}}+\frac{4q^2}{e^{2\beta}-2+e^{-2\beta}}=1.$$

Aus dieser Gleichung findet sich nun β dadurch, daß man

$e^{2\beta} = u$ setzt, dann die Gleichung nach u auflöst, zuletzt aber $\beta = \frac{1}{2} log\, u$ hat. Die Gleichung in u wird:

$$6)\qquad \frac{4p^2}{u+2+u^{-1}} + \frac{4q^2}{u-2+u^{-1}} = 1,$$

und da hier u nur in der Form $u+u^{-1}$ oder $u+\frac{1}{u}$ vorkommt, so setze man

$$u+\frac{1}{u} = y$$

und man hat dann (aus 6.)

$$7)\qquad \frac{4p^2}{y+2} + \frac{4q^2}{y-2} = 1,$$

aus welcher Gleichung

$$8)\qquad y^2-4(p^2+q^2)y+(8p^2-8q^2-4) = 0$$

hervorgeht. Daraus erhält man für y die beiden Werthe

$$9)\qquad y = 2(p^2+q^2) \pm 2\sqrt{(p^2+q^2)^2-2p^2+2q^2+1}\ ^{*)},$$

während dann, wegen $u+\frac{1}{u} = y$ oder $u^2-yu+1 = 0$, wiederum aus jedem Werth von y, zwei Werthe von u sich ergeben, nämlich

---

*) Der Radikand dieser Quadratwurzel kann auch so geschrieben werden, nämlich

$$(-p^2+q^2+1)^2+4p^2q^2 \quad \text{und auch noch so:} \quad (p^2+q^2+1)^2-4p^2,$$

endlich auch noch so: $(p^2+q^2-1)^2+4q^2$. — Aus der ersten und dritten dieser Formen ersieht man, daß die obige Quadratwurzel nie imaginär ist, und aus der mittlern Form ergiebt sich, daß dieselbe Quadratwurzel, positiv genommen, nie $>p^2+q^2+1$ sein kann. Die ursprüngliche Form des Radikanden in 9.) läßt endlich sehen, daß einer der beiden Werthe von y negativ wird, so oft $1+2q^2>2p^2$ ist, daß aber beide Werthe von y positiv sind, so oft $1+2q^2<2p^2$ ist.

Zugleich wird man bemerken, daß dieser Radikand genau derselbe ist, den wir im §. 188. durch R^2 bezeichnet haben.

10) $u = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{1}{4}y^2 - 1}$,

wobei in die Augen fällt, daß wenn der eine dieser beiden Werthe statt u genommen wird, der andere dann $= \frac{1}{u}$ sein müsse, endlich auch, daß beide Werthe von u negativ würden, wenn y negativ genommen werden dürfte.

Zuletzt ergiebt sich aus $e^{2\beta} = u$,

11) $\beta = \frac{1}{2} Lu$

weil β reell werden soll. Und weil u positiv werden muß, in so ferne sonst *log* u den reellen Werth *L* u nicht hätte, so wird man von den 4 Werthen von u noch die positiven heraussuchen müssen, und von letzteren noch untersuchen, ob sie auch den Gleichungen 3.) und 4.) und namentlich den darin noch ausgesprochenen Bedingungen genügen, daß sie nämlich $Sin\,\alpha$ und $Cos\,\alpha$ (weil α reell vorausgesetzt ist) positiv oder negativ, aber an sich nicht größer als 1 machen.

Quadrirt man aber die Gleichungen 3.) und 4.) und setzt man statt $e^{2\beta} + e^{-2\beta}$ zunächst $u + \frac{1}{u}$, dann y, so erhält man $(y+2) \cdot (Sin\,\alpha)^2 = 4p^2$ und $(y-2) \cdot (Cos\,\alpha)^2 = 4q^2$, woraus

$$(Sin\,\alpha)^2 = \frac{4p^2}{y+2} \quad \text{und} \quad (Cos\,\alpha)^2 = \frac{4q^2}{y-2}$$

d. h.

12) $$(Sin\,\alpha)^2 = \frac{2p^2}{p^2+q^2+1 \pm \sqrt{(p^2+q^2+1)^2 - 4p^2}}$$

und

13) $$(Cos\,\alpha)^2 = \frac{2q^2}{p^2+q^2-1 \pm \sqrt{(p^2+q^2-1)^2 + 4q^2}}.$$

Aus der letztern Gleichung ersieht man aber, daß der negative Werth der Quadratwurzel (welche in allen diesen verschiedenen Formen, nach der Note, eine und dieselbe und im §. 188. durch R bezeichnete ist) nicht genommen werden darf, weil sonst $(Cos\,\alpha)^2$ negativ, also $Cos\,\alpha$ und deshalb auch α imaginär

werden würde, daß man also überall (auch in dem Ausdruck für y) nur den einzigen positiven Werth der Quadratwurzel nehmen darf, daß also auch u nur zwei Werthe hat, die beide positiv sind, und so, daß wenn der eine u ist, dann der andere jedesmal $\frac{1}{u}$ sein müsse.

Läßt man nun in 12.) und 13.) die (—) Zeichen fort, und schafft man aus den Nennern die Wurzel weg, so erhält man

14) $(Sin\,\alpha)^2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2+1)^2-4p^2}+\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+1)$

15) $(Cos\,\alpha)^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4q^2}-\tfrac{1}{2}(p^2+q^2-1)$,

woraus $Sin\,\alpha$ und $Cos\,\alpha$ reell sich ergeben, während

16) $\tfrac{1}{2}y = p^2+q^2+\sqrt{(p^2+q^2)^2-2p^2+2q^2+1}$

und

17) $u = \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2-1}$

genommen werden muß, und die Radikanden der Quadratwurzeln in 14.—16.) alle drei einander gleich sind und diese Quadratwurzeln selbst nur ihren positiven Werth vorstellen und denselben, den wir im §. 188. durch R bezeichnet haben. Die 11.) endlich kann auch so geschrieben werden, nämlich

18) $\beta = \tfrac{1}{2}L\,u = \pm\tfrac{1}{2}L\,u = \pm L\sqrt{u}$,

weil wenn u' der eine Werth von u ist, dann $\frac{1}{u'}$ der andere sein wird, so daß für diesen anderen Werth $L\,u = L\frac{1}{u'} = -L\,u'$ wird.

Wegen der 3.) muß aber $Sin\,\alpha$ mit p zugleich positiv, oder mit p zugleich negativ genommen werden, während zu jedem Werth von $Sin\,\alpha$, der $Cos\,\alpha$ noch beide Werthe annehmen kann*);

*) Es giebt nämlich die 4.) sogleich $Cos\,\alpha = \frac{2q}{\sqrt{u}-\sqrt{\frac{1}{u}}}$, während u zwei Werthe hat, von denen der eine $\frac{1}{u'}$ ist, wenn der andere u' ge-

daher hat α jedesmal zwei Werthe innerhalb der vier ersten Quadranten, und außerdem noch alle die, welche durch Addition von $2n\pi$ zu jedem dieser beiden Werthe, sich ergeben. — Und so ist also das Problem auf's Neue vollständig gelöst. — Auch ist $\sqrt{u}$ hier der im §. 188. durch r bezeichnete positive Ausdruck.

Eben so kann man nun die drei übrigen Probleme behandeln. Da wir dieses in der Einleitung zum „Geist der Differenzial- und Integral-Rechnung." Erlangen 1846. gethan und die Resultate (die eine andere Form als hier haben, aber mit den hiesigen übereinstimmen) in der Einleitung zum VIII. Th. d. W. niedergelegt haben, so wollen wir die Behandlung der drei übrigen Aufgaben auf diesem Wege, dem Leser überlassen, der sich noch üben will.

Anmerkung 2. Eben so wie $Tg(n+\frac{1}{2})\pi$ und $Cotg\, n\pi$, weil sie die Form $\frac{1}{0}$ annehmen im Kalkul nicht zugelassen werden dürfen, eben so ist dies, wie solches aus den Resultaten des §. 187. hervorgeht, mit $\frac{1}{Tg}\cdot(\pm i)$ und $\frac{1}{Cotg}\cdot(\pm i)$ der Fall, weil sie sich auf den $log\, 0$ zurückziehen, welcher eben so wie $\frac{1}{0}$ eine im Kalkul unzulässige Form ist.

§. 190.

Unter den unendlich vielen Werthen, welche wir in den §§. 187. 188. für $\frac{1}{Tg}\cdot(p+q\cdot i)$, $\frac{1}{Cotg}\cdot(p+q\cdot i)$, $\frac{1}{Sin}\cdot(p+q\cdot i)$ und $\frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i)$ gefunden haben, heben sich diejenigen als die „einfachsten" hervor, welche sich für $n=0$

---

nannt wird. Ist also $u'>1$, so ist der andere Werth von u, nämlich $\frac{1}{u'}<1$, und es ändert daher $\sqrt{u}-\sqrt{\frac{1}{u}}$ sein Vorzeichen, wenn man statt u erst den einen, dann den andern seiner beiden Werthe setzt.

ergeben. Sie entsprechen dem „einfachsten Werth" der natürlichen Logarithmen, welchen wir im §. 178. durch L bezeichnet haben. Weil aber in

$$\frac{1}{Sin}\cdot z = \frac{1}{i} log(\sqrt{1-z^2}+i\cdot z) \text{ und } \frac{1}{Cos}\cdot z = \frac{1}{i} log(z+i\cdot\sqrt{1-z^2})$$

noch eine zweideutige Wurzel vorkommt, so erhält man, selbst wenn man L statt log setzt, doch noch zwei Werthe, nach den beiden Werthen der $\sqrt{1-z^2}$, und diese zwei Werthe geben auch die Gleichungen III. und IV. des §. 188. für $n=0$; der eine hat die Zahl π gar nicht und der andere enthält π einmal.

Wir nehmen von den beiden Werthen den ersteren, welcher π gar nicht hat (für $n=0$) und welcher (nach §. 188.) dem Werth von $\sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-(p+q\cdot i)^2} = \alpha+\beta\cdot i$ entspricht, in welchem α positiv ist, oder welcher, so oft $\sqrt{1-z^2}$ reell wird, dem positiven Werth dieser Quadratwurzel entspricht, und wir bezeichnen diesen „einfachsten Werth" von

$$\frac{1}{Sin}\cdot(p+q\cdot i) \quad \text{und} \quad \frac{1}{Cos}\cdot(p+q\cdot i)$$

bezüglich durch

$$Arc\,sin.(p+q\cdot i) \quad \text{und} \quad Arc\,cos.(p+q\cdot i).$$

Desgleichen bezeichnen wir den „einfachsten Werth" von

$$\frac{1}{Tg}\cdot(p+q\cdot i) \quad \text{und} \quad \frac{1}{Cotg}\cdot(p+q\cdot i)$$

den wir aus §. 187. I. und II. für $n=0$ erhalten, bezüglich durch

$$Arc\,tg.(p+q\cdot i) \quad \text{und} \quad Arc\,cotg.(p+q\cdot i)$$

und wir sprechen diese Zeichen bezüglich durch

Arcus sinus, *Arcus cosinus*, *Arcus tangens* und *Arcus cotangens*

aus. — Dabei kann auch $q=0$ sein.

Nach diesen Definitionen hat man also (in Verbindung mit §. 185. IX.–XII.)

$$\text{I.}\quad Arc\,tg.\,z = \frac{1}{2i}\cdot L\frac{1+z\cdot i}{1-z\cdot i};$$

$$\text{II.}\quad Arc\,cotg.\,z = \frac{1}{2i}\cdot L\frac{z+i}{z-i};$$

$$\text{III.}\quad Arc\,sin.\,z = \frac{1}{i}\cdot L(\sqrt{1-z^2}+z\cdot i);$$

$$\text{IV.}\quad Arc\,cos.\,z = \frac{1}{i}\cdot L(z+i\cdot\sqrt{1-z^2}),$$

wo jedoch in III. und IV. zur Rechten die Quadratwurzel $\sqrt{1-z^2}$ nur eindeutig und so zu nehmen ist, daß wenn $\sqrt{1-z^2}=\alpha+\beta\cdot i$ gefunden worden, der reelle Theil α positiv sein muß, wie §. 188. erkennen läßt.

Ferner hat man nach diesen Definitionen und nach den Resultaten I.–IV. der §§. 187. 188.

$$\text{V.}\quad \frac{1}{Tg}\cdot z = n\pi + Arc\,tg.\,z;$$

$$\text{VI.}\quad \frac{1}{Cotg}\cdot z = n\pi + Arc\,cotg.\,z;$$

$$\text{VII.}\quad \frac{1}{Sin}\cdot z = \left\{\begin{matrix} 2n\pi + Arc\,sin.\,z \\ (2n+1)\pi - Arc\,sin.\,z \end{matrix}\right\} = \mu\pi \pm Arc\,sin.\,z;$$

$$\text{VIII.}\quad \frac{1}{Cos}\cdot z = 2n\pi \pm Arc\,cos.\,z,$$

wo rechts beide Vorzeichen gelten, aber in VII. statt μ sowohl 0 als auch jede positive und negative gerade Zahl genommen werden muß, wenn das obere (+) Zeichen genommen wird, wo dagegen unter μ jede positive und negative ungerade Zahl verstanden werden muß, sobald man das untere (–) Zeichen nimmt, während n überall 0 und jede positive und negative ganze Zahl vorstellt.

Endlich findet sich noch, vermöge dieser Definitionen, unmittelbar aus I.–IV. der §§. 187. und 188., indem man dort $n=0$ nimmt:

IX. $Arc\,tg.(p+q\cdot i) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}i\cdot L\,r$,

wo $$r = \frac{+\sqrt{(1-p^2-q^2)^2+4p^2}}{(1+q)^2+p^2},$$

$$Cos\,\varphi = \frac{1-q^2-p^2}{+\sqrt{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}}$$

und

$$Sin\,\varphi = \frac{2p}{+\sqrt{(1-q^2-p^2)^2+4p^2}}$$

ist, und $\frac{1}{2}\varphi$ mit p zugleich positiv oder negativ und abgesehen vom Vorzeichen, im ersten Quadranten genommen werden muß.

Ferner

X. $Arc\,cotg.(p+q\cdot i) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}i\cdot L\,r$,

wo $$r = \frac{+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}{p^2+(q-1)^2},$$

$$Cos\,\varphi = \frac{p^2+q^2-1}{+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}}$$

und

$$Sin\,\varphi = \frac{2p}{+\sqrt{(p^2+q^2-1)^2+4p^2}},$$

ist, und $\frac{1}{2}\varphi$ mit p zugleich positiv oder negativ und, abgesehen vom Vorzeichen, im ersten Quadranten genommen werden muß.

Ferner

XI. $Arc\,sin.(p+q\cdot i) = \varphi - i\cdot L\,r$,

wo $r = \sqrt{(\alpha-q)^2+(\beta+p)^2}$

und

$$Cos\,\varphi = \frac{\alpha-q}{r}, \qquad Sin\,\varphi = \frac{\beta+p}{r},$$

wo ferner

$$\alpha = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-p^2+q^2)^2+4p^2q^2}}$$

und

$$\beta = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}(1-p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-p^2+q^2)^2+4p^2q^2}},$$

ist, während $\beta \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ genommen werden muß, je nachdem p und q $\begin{Bmatrix} \text{verschiedene} \\ \text{einerlei} \end{Bmatrix}$ Vorzeichen haben; wo endlich φ mit p zugleich positiv oder negativ zu nehmen ist und, abgesehen vom Vorzeichen, im ersten Quadranten.

Endlich

XII. $\quad Arc\,cos.(p+q\cdot i) = \varphi - i\cdot Lr,$

wo $\quad r = +\sqrt{(p-\beta)^2+(q+\alpha)^2},$

$$Cos\,\varphi = \frac{p-\beta}{r} \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi = \frac{q+\alpha}{r}$$

und α und β wie im Vorstehenden zu nehmen sind, und wo φ stets positiv ist und im $\begin{Bmatrix} \text{ersten} \\ \text{zweiten} \end{Bmatrix}$ Quadranten liegt, je nachdem p $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ gegeben worden.

Ist $q = 0$, also $z = p+q\cdot i = p$ reell, so gehen die Gleichungen IX.–XII. über in:

XIII. $\quad Arc\,tg.z = \frac{1}{2}\varphi,$

$$\text{wo} \quad Cos\,\varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi = \frac{2z}{1+z^2},$$

und wo $\frac{1}{2}\varphi$ mit z zugleich positiv oder negativ und abgesehen vom Vorzeichen, im ersten Quadranten zu nehmen ist, so daß $Arc\,tg.z$ der kleinste, mit z zugleich positiv oder negativ zu nehmende Werth von x ist, für welchen $tg.x = z$ wird; ferner

XIV. $\quad Arc\,cotg.z = \frac{1}{2}\varphi,$

$$\text{wo} \quad Cos\,\varphi = \frac{z^2-1}{z^2+1} \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi = \frac{2z}{z^2+1}$$

und wo $\frac{1}{2}\varphi$ mit z zugleich positiv oder negativ und, abgesehen vom Vorzeichen, im ersten Quadranten zu nehmen ist, so daß $Arc\,cotg.z$ der kleinste mit z zugleich positiv oder negativ zu

nehmende Werth von x ist, für welchen $Cotg\,x = z$ wird; dabei ist (in XIII. und XIV.) z ganz beliebig reell gedacht.

Ist dagegen z positiv oder negativ, aber an sich nicht >1, oder Null, so findet sich aus XI. und XII. (für $n = 0$).

XV. $Arc\,sin.z = \varphi$, wo φ mit z zugleich positiv oder negativ und an sich der kleinste, im ersten Quadranten liegende Werth von x ist, für welchen $Sin\,x = z$ wird; ferner

XVI. $Arc\,cos.z = \varphi$, wo φ stets positiv, und im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Quadranten zu nehmen ist, je nachdem z $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ vorausgesetzt wird, und wo φ ein Werth von x ist, welcher $Cos\,x = z$ macht.

Zuletzt müssen wir noch anführen, daß, wenn z reell und, abgesehen vom Vorzeichen, nicht >1 ist, in den Formeln III. und IV. die $\sqrt{1-z^2}$ ihren positiven Werth vorstellen muß.

Anmerkung. Für den Fall, daß z reell ist und wenn z ein Sinus- oder ein Kosinus-Werth sein soll, abgesehen vom Vorzeichen, auch nicht >1, lehren aber die Formeln V.—VIII. des §. 190. nichts anders, als was bereits im §. 166. und §. 163. gelehrt worden ist.

Alle Gleichungen I.—XVI. sind aber vollkommene (allgemeingültige) Gleichungen.

§. 191.

Ist z beliebig reell, also positiv, negativ oder Null, aber an sich $<\frac{1}{2}\pi$, und ist

$$Tg\,z = x, \quad \text{also} \quad z = Arc\,tg.x,$$

so ist gleichzeitig (nach §. 154.)

$$Cotg\,z = \frac{1}{x}, \quad Sin\,z = \frac{x}{+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad Cos\,z = \frac{1}{+\sqrt{1+x^2}},$$

und man hat nun

1) $Arc\,tg.\,x = Arc\,cotg.\,\frac{1}{x} = Arc\,sin.\,\frac{x}{+\sqrt{1+x^2}}$;

aber

2) $Arc\,tg.\,x = \pm Arc\,cos.\,\frac{1}{+\sqrt{1+x^2}}$, je nachdem x $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist,

wenn nur $+\sqrt{1+x^2}$ stets ihren positiven Werth vorstellt.

Gerade eben so findet sich, weil, wenn irgend eine der trigonometrischen Funktionen *Sin* z oder *Cos* z, *Tg* z oder *Cotg* z gegeben und $=x$ ist, die übrigens (nach §. 154.) sich sofort in x ausdrücken lassen,

3) $Arc\,cotg.\,x = Arc\,tg.\,\frac{1}{x} = \pm Arc\,sin.\,\frac{1}{+\sqrt{1+x^2}}$,

je nachdem x $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$

ist; aber

4) $Arc\,cotg.\,x = \begin{cases} Arc\,cos.\,\frac{x}{+\sqrt{1+x^2}}, & \text{wenn x positiv,}\\ -\pi + Arc\,cos.\,\frac{x}{+\sqrt{1+x^2}}, & \text{wenn x negativ;}\end{cases}$

wo $+\sqrt{1+x^2}$ ihren positiven Werth vorstellt.

Ferner erhält man, wenn x reell, aber an sich nicht größer als die Einheit ist, durch ganz analoge Betrachtungen

5) $Arc\,sin.\,x = Arc\,tg.\,\frac{x}{+\sqrt{1-x^2}} = Arc\,cotg.\,\frac{+\sqrt{1-x^2}}{x}$;

aber

6) $Arc\,sin.\,x = \pm Arc\,cos.\,(+\sqrt{1-x^2})$,

je nachdem x $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ oder Null ist.

Endlich hat man noch

wenn x positiv ist und nicht größer als 1,

7) $Arc\,cos.\,x = Arc\,tg.\,\frac{+\sqrt{1-x^2}}{x} = Arc\,cotg.\,\frac{x}{+\sqrt{1-x^2}}$

$= Arc\,sin.\,(+\sqrt{1-x^2})$;

wenn aber x negativ ist und an sich nicht >1, so ist

8) $Arc\,cos.\,x = \pi + Arc\,tg.\,\frac{+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \pi + Arc\,cotg.\,\frac{x}{+\sqrt{1-x^2}} = \pi - Arc\,sin.\,(+\sqrt{1-x^2})$ *),

wenn nur $+\sqrt{1-x^2}$ ihren positiven Werth vorstellt.

Weil ferner

$$Sin\,z = Cos\,(\tfrac{1}{2}\pi - z) \quad \text{und} \quad Tg\,z = Cotg\,(\tfrac{1}{2}\pi - z)$$

ist, so findet man bald:

9) $Arc\,tg.\,x = \pm\tfrac{1}{2}\pi - Arc\,cotg.\,x$ **), je nachdem x $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$

10) $Arc\,cotg.\,x = \pm\tfrac{1}{2}\pi - Arc\,tg.\,x$, je nachdem x $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$

11) $Arc\,sin.\,x = \tfrac{1}{2}\pi - Arc\,cos.\,x$ ***);

12) $Arc\,cos.\,x = \tfrac{1}{2}\pi - Arc\,sin.\,x$;

---

*) Ist nämlich x negativ, also $-x$ positiv, und ist $Cos\,z = -x$, dabei z im ersten Quadranten gedacht, so ist $z = Arc\,cos.\,(-x)$

$= Arc\,tg.\,\frac{+\sqrt{1-x^2}}{-x} = Arc\,cotg.\,\frac{-x}{+\sqrt{1-x^2}} = Arc.\,sin.\,(+\sqrt{1-x^2})$;

während wenn man die Vorzeichen der Sinus, Tangenten und Kotangenten von (+) in (−) umändert, die letzten drei Arcus dann $= -z$ sind, so daß man also hat

$$Arc\,tg.\,\frac{+\sqrt{1-x^2}}{x} = Arc\,cotg.\,\frac{x}{+\sqrt{1-x^2}} = -Arc\,sin.\,(+\sqrt{1-x^2}) = -z$$

hat. Und weil, der Definition zu Folge, $Arc\,cos.\,x = \pi - z$ ist, so folgt Nr. 8. hieraus augenblicklich.

**) Ist nämlich x negativ, also $-x$ positiv und z im ersten Quadranten und so, daß $z = Arc\,tg.\,(-x)$, so ist $-x = Tg\,z$, also auch $-x = Cotg\,(\tfrac{1}{2}\pi - z)$ oder $x = Cotg\,(-\tfrac{1}{2}\pi + z)$, folglich $-\tfrac{1}{2}\pi + z = Arc\,cotg.\,x$, während man $z = Arc\,tg.\,(-x) = -Arc\,tg.\,x$ hat. So ist die 9.), wenn x negativ, außer Zweifel gestellt, und dadurch auch die 10.), welche dieselbe ist.

***) Ist x negativ, also $-x$ positiv, und $z = Arc\,sin\,(-x)$, also

für jeden reellen Werth von x, für welche die Zeichen noch eine Bedeutung haben.

Und alle diese 12 Gleichungen enthalten links und rechts nur eindeutige Ausdrücke.

§. 192.

Gehen wir nun zu der Frage über, ob diese Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen zwischen diesen (eindeutigen und) reell gedachten Arcus, verallgemeinert werden können, d. h. ob analoge Gleichungen zwischen den (unendlich vieldeutigen) Argumenten $\frac{1}{Sin}\cdot x$, $\frac{1}{Cos}\cdot x$, $\frac{1}{Tg}\cdot x$ und $\frac{1}{Cotg}\cdot x$ existiren; — in so fern letztere in allgemeinen Rechnungen, — wo man oft nicht weiß, ob x reell oder imaginär ist, und wenn reell, ob x größer oder kleiner als 1 ist, — viel wichtiger noch, ja unentbehrlich sind.

Da die logarithmischen Funktionen

$$\frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2i}\cdot log\frac{x+i}{x-i},$$

welche wir nach §. 185. XI. XII. bezüglich durch

$$\frac{1}{Tg}\cdot x \quad \text{und} \quad \frac{1}{Cotg}\cdot x$$

bezeichnet haben, in einander übergehen, wenn $\frac{1}{x}$ statt x gesetzt wird, so folgt ganz allgemein:

$$1)\quad \frac{1}{Tg}\cdot x = \frac{1}{Cotg}\cdot\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{Cotg}\cdot x = \frac{1}{Tg}\cdot\frac{1}{x},$$

und diese Gleichungen sind vollkommene, d. h. sie haben links

---

$-z = Arc\,sin.x$, so ist auch $-x = Sin\,z = Cos(\frac{1}{2}\pi - z)$; folglich ist auch $Cos[\pi-(\frac{1}{2}\pi-z)] = x$, d. h. $\frac{1}{2}\pi+z = Arc\,cos.x$, und dadurch sind die Nummern 11. und 12.) auch für den Fall außer Zweifel gesetzt, in welchem x negativ ist.

und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe. Will man aber ferner untersuchen, ob auch $\frac{1}{Sin}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ oder $\frac{1}{Cos}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ statt $\frac{1}{Tg}\cdot x$ gesetzt werden dürfe, so setzen wir in die logarithmischen Funktionen

$$\frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i) \quad \text{und} \quad \frac{1}{i}\cdot log(x+i\cdot\sqrt{1-x^2}),$$

welche wir bezüglich durch

$$\frac{1}{Sin}\cdot x \quad \text{und} \quad \frac{1}{Cos}\cdot x$$

bezeichnet haben, in die erstere $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, in die andere $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ statt x. Der erstere Logarithmand geht dadurch über in $\frac{1+x\cdot i}{\sqrt{1+x^2}}$, d. h. in $\sqrt{\frac{(1+x\cdot i)^2}{1+x^2}}$, d. h. in $\sqrt{\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}}$ über, so daß man hat

$$2)\quad \frac{1}{Sin}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{i}\cdot log\sqrt{\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}}.$$

Nun haben wir aber (im §. 180.) gesehen, daß die Gleichung

$$log(\sqrt{a}) = \tfrac{1}{2}\cdot log\, a$$

eine vollkommene Gleichung ist, die rechts und links gleich viele und genau dieselben Werthe hat. Also geht aus der 2.) auch noch die vollkommene Gleichung hervor, nämlich:

$$3)\quad \frac{1}{Sin}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i} = \frac{1}{Tg}\cdot x,$$

welche rechts und links gleich viele und genau dieselben Werthe hat, wenn nur $\sqrt{1+x^2}$ allgemein, also zweiförmig gedacht wird.

Durch die andere Substitution in $\frac{1}{Cos}\cdot x$ finden wir aber

sogleich denselben Logarithmanden $\frac{1+x\cdot i}{\sqrt{1+x^2}}$ und daher auch die analoge Folgerung. Wir finden also

$$\text{I.}\quad \frac{1}{Tg}\cdot x = \frac{1}{Cotg}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{Sin}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{Cos}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

als eine Gleichung, welche in ihren vier Ausdrücken gleich viele und genau dieselben Werthe hat, d. h. als eine vollkommene Gleichung.

Genau auf dieselbe Weise überzeugt man sich aber auch von der vollkommenen Richtigkeit dieser andern Gleichung

$$\text{II.}\quad \frac{1}{Cotg}\cdot x = \frac{1}{Tg}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{Sin}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{Cos}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

wenn nur die $\sqrt{1+x^2}$ überall als zweiförmig gedacht wird.

Will man untersuchen, ob $\frac{1}{Sin}\cdot x$ und $\frac{1}{Cos}\cdot\sqrt{1-x^2}$ unbedingt für einander gesetzt werden können, so muß man in $\frac{1}{Cos}\cdot x$ jetzt $\sqrt{1-x^2}$ statt x setzen; dadurch geht der Logarithmand von $\frac{1}{Cos}\cdot x$ über in $\sqrt{1-x^2}\pm x\cdot i$, so daß man hat

$$4)\ \frac{1}{Cos}\cdot\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-x^2}\pm x\cdot i) = \frac{1}{Sin}\cdot(\pm x) = \pm\frac{1}{Sin}\cdot x.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{Cos}\cdot\sqrt{1-x^2}$ enthält also nicht bloß alle Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$, sondern auch alle Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot(-x)$ oder von $-\frac{1}{Sin}x$; und es würde nichts nützen, die $\sqrt{1-x^2}$ bloß einförmig sich zu denken, weil sie dann auch in $\frac{1}{i}\cdot log\,(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i)$ nur einförmig sein, dieser Ausdruck also auch nur die Hälfte der Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$ vorstellen würde

und die andere Hälfte nicht, wo $\sqrt{1-x^2}$ die andere ihrer Formen vorstellt.

Will man weiter untersuchen, ob $\frac{1}{Sin}\cdot x$ und $\frac{1}{Tg}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ mit einander vollkommen übereinstimmen, so muß man in $\frac{1}{Tg}\cdot x$ jetzt $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ statt x setzen; dadurch erhält man

$$\frac{1}{Tg}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2i}\cdot log\frac{\sqrt{1-x^2}+x\cdot i}{\sqrt{1-x^2}-x\cdot i}=\frac{1}{2i}\cdot log[(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i)^2].$$

Weil aber $log(a^2)$ nicht bloß alle Werthe von $2\,log\,a$, sondern auch noch alle Werthe von $2\,log(-a)$ hat (nach §. 180.) so muß man hier statt $\frac{1}{2i}\cdot log[(\overline{1-x^2}+x\cdot i)^2]$ nicht bloß setzen $\frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i)$ d. h. $\frac{1}{Sin}\cdot x$, sondern auch noch $\frac{1}{i}\cdot log(-\sqrt{1-x^2}-x\cdot i)$, welches $\frac{1}{Sin}\cdot(-x)$ oder $-\frac{1}{Sin}\cdot x$ ist, weil die Quadratwurzel **zweiförmig** ist, daher $-\sqrt{1-x^2}$ genau dasselbe ist, als $+\sqrt{1-x^2}$ oder $\sqrt{1-x^2}$.

Genau eben so findet man, daß die Werthe von $\frac{1}{Cotg}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ nicht bloß alle Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$, sondern noch alle Werthe von $\frac{1}{Sin}(-x)$ enthalten. Man hat daher die Gleichungen

$$\text{III.}\ \pm\frac{1}{Sin}\cdot x=\frac{1}{Cos}\cdot\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{Tg}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{Cotg}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

wo die Wurzel als **zweiförmig** gedacht werden muß. — In diesen Gleichungen enthält jeder der vier gleichen Ausdrücke genau gleich viele und genau dieselben Werthe.

Ganz eben so findet man

$$\text{IV.}\ \frac{1}{Cos}(\pm x)=\frac{1}{Sin}\cdot\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{Tg}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1}{Cotg}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

welche Gleichungen, wenn die Quadratwurzel als zweiförmig angesehen wird, vollkommene Gleichungen sind, d. h. solche, deren einzelne Seiten gleich viele und genau dieselben Werthe haben.

Und wollte man in einem der drei letztern Ausdrücke der Gleichung IV., die Wurzel nur einförmig (eindeutig) nehmen, so würde man nur die Hälfte der Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$ haben und außerdem noch die Hälfte der Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot(-x)$.

Endlich konnte man zwar in III.) $\pm\frac{1}{Sin}\cdot x$ statt $\frac{1}{Sin}\cdot(\pm x)$ setzen; aber man kann nicht in IV.) $\pm\frac{1}{Cos}\cdot x$ statt $\frac{1}{Cos}\cdot(\pm x)$ schreiben, weil wir (nach §. 186.) wissen, daß $\frac{1}{Cos}\cdot(-x)=\pi-\frac{1}{Cos}\cdot x$ ist (also nicht $=-\frac{1}{Cos}\cdot x$) ist; im Gegentheil haben wir (in Nr. 5. des §. 186.) gesehen, daß $-\frac{1}{Cos}\cdot x=+\frac{1}{Cos}\cdot x$ eine vollkommene (richtige) Gleichung ist.

Um zu untersuchen, ob die Formeln 9.—12. des §. 191. sich verallgemeinern lassen, in dem oben näher beschriebenen Sinne, — so kann man zunächst $\frac{1}{Sin}\cdot x$ und $\frac{1}{Cos}\cdot x$ zu einander addiren. Man erhält dann

$$4)\quad \frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot x=\frac{1}{i}\cdot log[(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i)\cdot(x+i\cdot\sqrt{1-x^2})].$$

Das Produkt, welches hier den Logarithmanden bildet, ist aber

$$5)\quad =x\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\sqrt{1-x^2}+(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}+x^2)\cdot i.$$

Da man nun zu jedem Werth der $\sqrt{1-x^2}$ in $\frac{1}{Sin}\cdot x$, jeden Werth der $\sqrt{1-x^2}$ in $\frac{1}{Cos}\cdot x$ nehmen muß, so sind diese beiden Quadratwurzeln entweder dieselben, oder sie haben ent-

gegengesetzte Vorzeichen und sind dann übrigens wieder dieselben. Daher findet sich der Ausdruck in 5.)

6) erstens $= i$ und dann noch $= 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + (-1+2x^2) \cdot i$ *), wo die Wurzel noch zweiförmig ist, während dieser letztere Ausdruck wieder $= \frac{\sqrt{1-x^2}+x \cdot i}{x+ \cdot i\sqrt{1-x^2}}$ gefunden wird, sobald man die Quadratwurzel (oben und unten) zwar als zweiförmig, aber oben und unten als jedesmal einen und denselben ihrer Werthe vorstellend sich denkt, damit

$\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = (\sqrt{1-x^2})^2 = +(1-x^2)$ und

$x \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \sqrt{1-x^2} = 0$ ist. — Man findet also (aus 4. und 5. und 6.)

$$7) \frac{1}{Sin} \cdot x + \frac{1}{Cos} \cdot x = \begin{Bmatrix} \frac{1}{i} \cdot log\, i \\ \frac{1}{i} log(\sqrt{1-x^2}+x \cdot i) - \frac{1}{i} log(x+i \cdot \sqrt{1-x^2}) \end{Bmatrix},$$

wo jedoch die Wurzel in beiden Logarithmanden zwar noch zweiförmig, aber stets eine und dieselbe ihrer beiden Formen vorstellt. Nun rechnet sich $\frac{1}{i} \cdot log\, i$ (nach §. 175., wenn man daselbst 0 statt p, und 1 statt q setzt) $= (2n+\frac{1}{2})\pi$ aus, wo n sowohl Null als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt, während der übrige Theil der Werthe zur Rechten von 7.) offenbar

$$= \frac{1}{Sin} \cdot x - \frac{1}{Cos} \cdot x$$

---

*) Da $\sqrt{1-x^2}$ zweiförmig ist, so muß man bei dem Multipliciren die allgemeingültige Formel $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, also $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{(a^2)} = \pm a$ anwenden und nicht die nur halb wahre $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$; deshalb darf man hier oben nicht $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = (\sqrt{1-x^2})^2 = 1-x^2$ nehmen, sondern $= \sqrt{(1-x^2)^2} = \pm(1-x^2)$. (S. das Kapitel von den allgemeinen Quadratwurzeln im I. Th. d. W.)

ist, jedoch mit der Maaßgabe, daß nicht jeder Werth von $\frac{1}{Cos}\cdot x$ von jedem Werth des $\frac{1}{Sin}\cdot x$ subtrahirt wird, sondern nur jeder der Werthe des erstern von jedem der Werthe des andern, für welche

$$Cos\left(\frac{1}{Sin}\cdot x\right)=\sqrt{1-x^2}=Sin\left(\frac{1}{Cos}\cdot x\right)$$

ist, daß aber nicht die Werthe von einander subtrahirt werden, für welche

$$Cos\left(\frac{1}{Sin}\cdot x\right)=-Sin\left(\frac{1}{Cos}\cdot x\right)$$

sein wird. Man findet also

8) $$\frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot x=(2n+\tfrac{1}{2})\pi,$$

wenn man links diejenigen Werthe zusammennimmt, für welche

9) $$Cos\left(\frac{1}{Sin}\cdot x\right)=Sin\left(\frac{1}{Cos}\cdot x\right)$$

ist; dagegen

10) $$\frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot x=\frac{1}{Sin}\cdot x-\frac{1}{Cos}\cdot x,$$

wenn man rechts nur die Werthe zusammennimmt, welche der Bedingung 9.) genügen, links aber nur jeden der Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$ mit jedem der Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$ zusammennimmt (durch Addition) für welche

11) $$Cos\left(\frac{1}{Sin}\cdot x\right)=-Sin\left(\frac{1}{Cos}\cdot x\right)$$

ist. — Beide Gleichungen 8. und 10. enthalten links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe *). Schreiben wir in

---

*) So parador dies Resultat jedem Anfänger erscheinen mag, so richtig ist es doch. Betrachten wir den besondern Fall z. B., wo x positiv und <1

der Gleichung 8.) statt der $\frac{1}{Sin}$, $\frac{1}{Cos}$ die logarithmischen Funktionen, welche diese Zeichen bloß bezeichnen, und rechts statt $(2n+\frac{1}{2})\pi$ wiederum $\frac{1}{i}\cdot log\, i$, und bringen wir $\frac{1}{Cos}\cdot x$ auf die andere Seite, so finden wir

$$12)\quad \frac{1}{i}\cdot log\left(\sqrt{1-x^2}+x\cdot i\right)=\frac{1}{i}\cdot log\, i-\frac{1}{i}\cdot log\left(x+\cdot i\sqrt{1-x^2}\right),$$

---

ist, und es sei u der kleinste positive Werth von $\frac{1}{Sin}\cdot x$,

so wie v der kleinste positive Werth von $\frac{1}{Cos}\cdot x$,

so sind alle Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$, deren Kosinus positiv $(=+\sqrt{1-x^2})$ ist, ausgedrückt durch $2n\pi+u$; dagegen alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$, deren Sinus positiv $(=+\sqrt{1-x^2})$ ist, ausgedrückt durch $2n'\pi+v$. — Die Differenz in 10.) zur Rechten ist daher ausgedrückt durch $2\mu\pi+u-v$. — Ferner sind alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$, deren Sinus negativ $(=-\sqrt{1-x^2})$ ist, ausgedrückt durch $2n''\pi-v$; folglich ist die Summe in 10.) zur Linken ausgedrückt durch $2\mu\pi+u-v$ und dies ist genau das, was wir zur Rechten gefunden hatten.

Ganz eben so findet man, wenn alle Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$, deren Kosinus negativ $(=-\sqrt{1-x^2})$ ist, ausgedrückt werden sollen, die Form $(2n+1)\pi-u$. Alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$, deren Sinus negativ $(=-\sqrt{1-x^2})$ ist, sind ausgedrückt durch $2n'\pi-v$. Die Differenz zur Rechten in 10.) wird daher jetzt ausgedrückt sein durch $(2\mu+1)\pi-u+v$. — Ferner sind alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$, deren Sinus positiv $(=+\sqrt{1-x^2})$ ist, ausgedrückt durch $2n''\pi+v$; daher ist die Summe zur Linken in 10.) ausgedrückt durch $(2\mu+1)\pi-u+v$, und dadurch wieder die Wahrheit der Gleichung 10.) bestätigt.

Die Gleichungen 8.) und 10.) gelten aber für jeden reellen, wie für jeden imaginären Werth von x.

wo $\sqrt{1-x^2}$ zwar zweiförmig vorausgesetzt ist, wo aber dieselbe links und rechts doch jedesmal eine und dieselbe ihrer beiden Formen vorstellt. Da nun (nach §. 179.), wenn man $\frac{1}{i}$ sich wegdenkt, die Differenz der Logarithmen zur Rechten nicht weniger Werthe hat, wenn man auch statt eines der beiden Logarithmen, z. B. statt $log\, i$, nur einen einzigen seiner Werthe setzt, z. B. den einzigen Werth $\frac{1}{2}\pi\cdot i$, so folgt aus der 12.) augenblicklich; daß die Gleichung:

$$\text{V.}\qquad \frac{1}{Sin}\cdot x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{Cos}\cdot x$$

und aus demselben Grunde auch die Gleichung

$$\text{VI.}\qquad \frac{1}{Cos}\cdot x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{Sin}\cdot x$$

vollkommene Gleichungen sind, d. h. solche, welche rechts und links gleich viele und auch genau dieselben Werthe haben, sobald man nur voraussetzt, daß links und rechts nur diejenigen Reihen der Werthe von $\frac{1}{Sin}\cdot x$ und $\frac{1}{Cos}\cdot x$ zusammengenommen werden, für welche

$$(\text{♀})\cdots\qquad Sin\left(\frac{1}{Cos}\cdot x\right) = Cos\left(\frac{1}{Sin}\cdot x\right)$$

ist.

So sehen wir nun die Nummern 11.) und 12.) des §. 191. verallgemeinert.

Addirt man nun $\frac{1}{Tg}\cdot x$ und $\frac{1}{Cotg}\cdot x$ zu einander, so erhält man augenblicklich

$$\frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i} + \frac{1}{2i}\cdot log\frac{x+i}{x-i} = \frac{1}{2i}\cdot log\left(\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}\cdot\frac{x+i}{x-i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} log(-1),$$

folglich

$$\frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}=\frac{1}{2i}\cdot log(-1)-\frac{1}{2i}\cdot log\frac{x+i}{x-i},$$

während (nach §. 175.) $log(-1)=(2n+1)\pi\cdot i$ ist. Dabei kann man rechts (nach §. 179.) statt $log(-1)$ nur einen einzigen seiner Werthe nehmen, etwa den Werth $\pi\cdot i$. — Man erhält also sogleich und ohne alle Beschränkung

$$\text{VII.}\qquad \frac{1}{Tg}\cdot x=\tfrac{1}{2}\pi-\frac{1}{Cotg}\cdot x$$

und

$$\text{VIII.}\qquad \frac{1}{Cotg}\cdot x=\tfrac{1}{2}\pi-\frac{1}{Tg}\cdot x,$$

in welchen beiden Gleichungen, man mag x reell oder imaginär sich denken, links und rechts stets gleich viele und genau dieselben Werthe stehen, so daß man beide Seiten der Gleichung unbedingt für einander setzen kann; was eben der Charakter der (vollkommenen) Gleichung ist.

Es ist aber in allen Gleichungen I.—VIII. dieses Paragraphen der Werth von x eben so gut reell wie imaginär vorausgesetzt.

§. 193.

Wir haben früher (im §. 153.) gefunden

$$Tg(u\pm v)=\frac{Tg\,u\pm Tg\,v}{1\mp Tg\,u\cdot Tg\,v}.$$

Setzt man nun

$$Tg\,u=x \quad \text{und} \quad Tg\,v=y,$$

so daß
$$u=\frac{1}{Tg}\cdot x \quad \text{und} \quad v=\frac{1}{Tg}\cdot y$$

wird, so geht die obige Gleichung über in

$$\text{I.}\qquad \frac{1}{Tg}\cdot x+\frac{1}{Tg}\cdot y=\frac{1}{Tg}\cdot\frac{x+y}{1-xy};$$

$$\text{II.}\qquad \frac{1}{Tg}\cdot x-\frac{1}{Tg}\cdot y=\frac{1}{Tg}\cdot\frac{x-y}{1+xy}.$$

Sehen wir nun zu, ob diese Gleichungen in allgemeinen Rechnungen zu gebrauchen, d. h. ob sie vollkommene (richtige) Gleichungen sind, d. h. ob sie links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe haben.

Nach §. 185. XI. hat man

$$\frac{1}{Tg}\cdot x+\frac{1}{Tg}\cdot y=\frac{1}{2i}\cdot log\left(\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}\cdot\frac{1+y\cdot i}{1-y\cdot i}\right);$$

nun ist aber

$$\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}\cdot\frac{1+y\cdot i}{1-y\cdot i}=\frac{1-xy+(x+y)\cdot i}{1-xy-(x+y)\cdot i}$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner durch $1-xy$ dividirt,

$$=\frac{1+\frac{x+y}{1-xy}\cdot i}{1-\frac{x+y}{1-xy}\cdot i};$$

und weil $\frac{1}{2i}\cdot log$ dieses letztern Ausdruckes nichts anders als $\frac{1}{Tg}\cdot\frac{x+y}{1-xy}$ ist, so erhellet, daß die Gleichung I. eine vollkommene ist, also überall unbeschränkt zum Rechnen benutzt werden kann.

Ganz analog wird dasselbe auch von der Gleichung II. erwiesen. — Dabei ist x ganz allgemein, eben so gut imaginär als reell gedacht.

Aus den Gleichungen

$$Cotg\,(u\pm v)=\frac{Cotg\,u\cdot Cotg\,v\mp 1}{Cotg\,v\pm Cotg\,u}$$

gehen ferner hervor (wenn $Cotg\,u=x$ und $Cotg\,v=y$ gesetzt wird)

III. $$\frac{1}{Cotg}\cdot x+\frac{1}{Cotg}\cdot y=\frac{1}{Cotg}\cdot\frac{xy-1}{y+x}$$

und

IV. $$\frac{1}{Cotg}\cdot x-\frac{1}{Cotg}\cdot y=\frac{1}{Cotg}\cdot\frac{xy+1}{y-x};$$

und daß diese beiden Formeln allgemeine Gültigkeit haben, d. h. rechts und links gleich viele und genau dieselben Werthe liefern, kann wieder unmittelbar aus den Gesetzen der natürlichen Logarithmen abgeleitet werden. — Auch gehen diese Formeln III. und IV. aus denen in I. und II. hervor, sobald man in letzteren $\frac{1}{x}$ statt x, und $\frac{1}{y}$ statt y schreibt, und die entsprechenden Formeln des vorhergehenden Paragraphen in Anwendung bringt. Dabei sind x und y beliebig reell oder imaginär, nämlich ganz allgemein gedacht (bloße Träger der Operationszeichen).

§. 194.

Fragen wir uns nun, wie diese Gleichungen §. 193. I.–IV. zwischen den unendlich vieldeutigen Argumenten auf die eindeutigen und hier reell gedachten Arcus übertragen werden können, so finden wir, indem wir x und y als beliebige reelle Werthe voraussetzen:

I. 1. $$\mathit{Arc\,tg}.\,x + \mathit{Arc\,tg}.\,y = \mathit{Arc\,tg}.\frac{x+y}{1-xy},$$

so lange x und y verschiedene Vorzeichen haben, oder so lange, im Falle x und y einerlei Vorzeichen haben sollten, 1—xy positiv ist*).

Dagegen ist

I. 2. $$\mathit{Arc\,tg}.\,x + \mathit{Arc\,tg}.\,y = \pm\pi + \mathit{Arc\,tg}.\frac{x+y}{1-xy},$$

wenn 1—xy negativ ist; wobei das obere (+) Zeichen gilt,

*) Im erstern Fall kann die Summe der Bogen zur Linken nie in den zweiten Quadranten kommen, weil der eine davon negativ, der andere positiv ist. Und im andern Falle bleibt $Tg(u+v)$, wenn $u = \mathit{Arc\,tg}.x$ und $v = \mathit{Arc\,tg}.y$ gedacht wird, mit x und y zugleich positiv, oder zugleich negativ, so lange 1—xy positiv ist; also liegt die Summe der Bogen zur Linken, da sie mit x und y zugleich positiv oder negativ ist, wiederum jedesmal im ersten Quadranten.

wenn x und y positiv sind, wo aber das untere (—) Zeichen genommen werden muß, sobald x und y negativ sind *).

Ferner hat man

II. 1.) $Arc\,tg.\,x - Arc\,tg.\,y = Arc\,tg.\,\frac{x-y}{1+xy}$,

so lange x und y einerlei Vorzeichen haben, oder, bei verschiedenen Vorzeichen, 1+xy positiv machen.

Dagegen wird

II. 2.) $Arc\,tg.\,x - Arc\,tg.\,y = \pm\pi + Arc\,tg.\,\frac{x-y}{1+xy}$,

sobald 1+xy negativ wird, wobei das obere (+) Zeichen gilt, wenn x positiv und y negativ ist, dagegen das untere (—) Zeichen, wenn umgekehrt y positiv und x negativ sein sollte **).

---

*) Denn, sind x und y positiv, ist aber 1—xy negativ, so ist $Tg\,(u+v)$ negativ, also liegt u+v im zweiten Quadranten. Sind aber x und y negativ, zugleich mit 1—xy, so ist u+v negativ aber $Tg\,(u+v)$ positiv, demnach liegt der negative Werth von u+v, an sich angesehen, im zweiten Quadranten.

**) Setzt man $Arc\,tg.\,x = u$ und $Arc\,tg.\,y = v$, so daß $x = Tg\,u$ und $y = Tg\,v$ ist, und wird $Arc\,tg.\,\frac{x-y}{1+xy} = w$ gesetzt, so daß man noch $\frac{x-y}{1+xy} = Tg\,w$ hat, so ist erstlich

$$Tg\,(\pm\pi + w) = \frac{Tg\,(\pm\pi) + Tg\,w}{1 - Tg\,(\pm\pi) \cdot Tg\,w} = Tg\,w = \frac{x-y}{1+xy},$$

weil $Tg\,(\pm\pi) = \frac{Sin\,(\pm\pi)}{Cos\,(\pm\pi)} = 0$ ist. Folglich ist $\pm\pi + w$ ein Werth von $\frac{1}{Tg} \cdot \frac{x-y}{1+xy}$, und es fragt sich daher nur noch, ob es der Werth u—v ist. Haben aber x und y verschiedene Vorzeichen und ist 1+xy negativ, so ist $\frac{x-y}{1+xy}$ d. h. $Tg\,(u-v)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, wenn x $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist, also auch wenn u und —v, folglich auch u—v $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$; also liegt u—v gleichzeitig im $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ zweiten Quadranten.

Weiter findet sich

III. 1. $\quad Arc\,cotg.\,x + Arc\,cotg.\,y = Arc\,cotg.\,\frac{xy-1}{y+x}$,

wenn x und y verschiedene Vorzeichen haben, oder, im Falle x und y einerlei Vorzeichen haben, wenn xy−1 positiv ist (weil dann $Cotg(u+v)$ d. h. $\frac{xy-1}{y+x}$ mit y und x zugleich positiv oder negativ ist, folglich u+v, positiv oder negativ, im ersten Quadranten liegt).

Dagegen ist

III. 2. $\quad Arc\,cotg.\,x + Arc\,cotg.\,y = \pm\pi + Arc\,cotg.\,\frac{xy-1}{y+x}$,

sobald x und y einerlei Vorzeichen haben und dabei xy−1 negativ ist, (weil dann $Tg(u+v)$ d. h. $\frac{xy-1}{y+x}$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ wird, wenn x und y, also auch u und v und deshalb auch u+v $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ sind, — weil also u+v (positiv oder negativ, aber) im zweiten Quadranten liegt).

Endlich hat man

IV. 1. $\quad Arc\,cotg.\,x - Arc\,cotg.\,y = Arc\,cotg.\,\frac{xy+1}{x-y}$,

wenn x und y einerlei Vorzeichen haben, oder, im Falle x und y verschiedene Vorzeichen haben sollten, wenn xy+1 positiv ist, (weil dann $Tg(u-v)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ wird, wenn x und −y, also auch x−y und auch u−v $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ sind, folglich u−v im $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{Bmatrix}$ ersten Quadranten liegt).

Dagegen findet sich

IV. 2. $\quad Arc\,cotg.\,x - Arc\,cotg.\,y = \pm\pi + Arc\,cotg.\,\frac{xy+1}{x-y}$,

wenn x und y verschiedene Vorzeichen haben und dabei xy+1 negativ wird; (weil dann $Tg(u-v)$ gegen kurz vorher, wo xy+1 positiv war, ihr Vorzeichen ändert, also u—v in den $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ zweiten Quadranten tritt). Deshalb gilt auch das obere (+) Zeichen, wenn x positiv und y negativ, das untere (—) Zeichen dagegen, wenn x negativ und y positiv ist.

§. 195.

Da

$$Sin(u \pm v) = Sin\, u \cdot Cos\, v \pm Cos\, u \cdot Sin\, v,$$

so folgt, wenn man

$$Sin\, u = x \quad \text{und} \quad Sin\, v = y$$

setzt

$$1) \quad \overset{1}{Sin} \cdot x + \overset{1}{Sin} \cdot y = \overset{1}{Sin} \cdot (x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2});$$

$$2) \quad \overset{1}{Sin} \cdot x - \overset{1}{Sin} \cdot y = \overset{1}{Sin} \cdot (x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}).$$

Und ganz auf ähnliche Weise findet sich aus

$$Cos(u \pm v) = Cos\, u \cdot Cos\, v \mp Sin\, u \cdot Sin\, v$$

$$3) \quad \overset{1}{Cos} \cdot x + \overset{1}{Cos} \cdot y = \overset{1}{Cos} \cdot (xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2});$$

$$4) \quad \overset{1}{Cos} \cdot x - \overset{1}{Cos} \cdot y = \overset{1}{Cos} \cdot (xy + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}).$$

Will man aber untersuchen, ob diese vier Gleichungen allgemein gültig sind, z. B. ob die 1., — so muß man wieder die Gesetze der Logarithmen zu Hilfe nehmen. Man hat (aus §. 185. IX.)

$$\overset{1}{Sin} \cdot x + \overset{1}{Sin} \cdot y = \frac{1}{i} \cdot log\left[(\sqrt{1-x^2} + x \cdot i)(\sqrt{1-y^2} + y \cdot i)\right]$$

$$= \frac{1}{i} \cdot log\left[\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy + (x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}) \cdot i\right]$$

Nun ist aber

$$\sqrt{1-[x\cdot\sqrt{1-y^2}+y\cdot\sqrt{1-x^2}]^2}$$
$$= \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+x^2y^2}$$
$$= \pm(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy);$$

folglich hat $\frac{1}{Sin}\cdot(x\cdot\sqrt{1-y^2}+y\cdot\sqrt{1-x^2})$

d. h.

$$\frac{1}{i}\cdot log\left(\sqrt{1-(x\cdot\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})^2}+(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\cdot i\right)$$

doppelt soviele Werthe als $\frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Sin}\cdot y$, nämlich außer den letzteren auch noch alle die Werthe von

$$\pi-\left(\frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Sin}\cdot y\right).\text{*)}$$

Die obige Gleichung 1.) muß also, wenn sie links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe haben soll, so aussehen

$$\text{I.}\quad \left.\begin{cases} \frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Sin}\cdot y \\ \pi-\left(\frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Sin}\cdot y\right) \end{cases}\right\} = \frac{1}{Sin}\cdot(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2});$$

---

*) Es ist nämlich

$$\frac{1}{Sin}\cdot(-x)+\frac{1}{Sin}\cdot(-y) = \frac{1}{i}\cdot log\left[(\sqrt{1-x^2}-x\cdot i)(\sqrt{1-y^2}-y\cdot i)\right]$$
$$= \frac{1}{i}\cdot log\left[\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy-(x\cdot\sqrt{1-y^2}+y\cdot\sqrt{1-x^2})\cdot i\right].$$

Addirt man dazu einen einzigen Werth von $\frac{1}{i}\cdot log(-1)$ d. h. von $\frac{1}{i}\cdot(2n+1)\pi\cdot i$, z. B. π, so hat man (weil $\frac{1}{Sin}\cdot(-z) = -\frac{1}{Sin}\cdot z$ ist) die allgemeingültige Gleichung

$$\pi-\left(\frac{1}{Sin}\cdot x+\frac{1}{Sin}\cdot y\right) = \frac{1}{i}\cdot log\left[(-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+xy)+(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\cdot i\right],$$

welches oben behauptet wurde.

und setzt man hier statt y jetzt $-y$, so erhält man statt der obigen 2.) jetzt

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{c} \frac{1}{Sin}\cdot x - \frac{1}{Sin}\cdot y \\ \pi - \left(\frac{1}{Sin}\cdot x - \frac{1}{Sin}\cdot y\right) \end{array}\right\} = \frac{1}{Sin}\cdot(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$$

als eine allgemein gültige Gleichung.

In diesen Gleichungen sind alle vorkommenden Quadratwurzeln zweiförmig, so daß die Sinus zur Rechten vierförmig sind. Und überall (in I. und II.) sind x und y ganz allgemein gedacht, also eben so gut reell wie imaginär.

Was nun die nähere Untersuchung der Gleichungen 3. und 4.) betrifft, so findet man zunächst (nach §. 185. X.)

$$5)\quad \frac{1}{Cos}\cdot x + \frac{1}{Cos}\cdot y = \frac{1}{i}\cdot log\left[(x+i\cdot\sqrt{1-x^2})(y+i\cdot\sqrt{1-y^2})\right]$$

$$= \frac{1}{i}\cdot log\left[xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} + (x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\cdot i\right];$$

auf der andern Seite aber

$$6)\quad \frac{1}{Cos}\cdot(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$$

$$= \frac{1}{i}\cdot log\left(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+i\cdot\sqrt{1-(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})^2}\right),$$

während die letztere Quadratwurzel

$$= \sqrt{(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-y^2})^2} = \pm(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

ist. Es hat also $\frac{1}{Cos}\cdot(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$ nicht bloß alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x + \frac{1}{Cos}\cdot y$, sondern auch noch alle Werthe von

$$\frac{1}{i}\cdot log\left(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\cdot i\right)$$

d. h. noch alle Werthe von

$$\frac{1}{i}\cdot log\left[(-x+i\cdot\sqrt{1-x^2})(-y+i\cdot\sqrt{1-y^2})\right],$$

d. h. noch alle Werthe von

$$\frac{1}{Cos}\cdot(-x)+\frac{1}{Cos}(-y) \quad \text{oder von} \quad 2\pi-\left(\frac{1}{Cos}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot y\right).$$

Man hat daher statt der Nr. 3. die allgemeingültige (vollkommene, richtige) Gleichung:

$$\text{III.} \quad \left\{\begin{matrix} \frac{1}{Cos}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot y \\ 2\pi-\left(\frac{1}{Cos}\cdot x+\frac{1}{Cos}\cdot y\right) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{Cos}\cdot(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}).$$

Und setzt man hier $-y$ statt y, und wendet man dabei den Satz an, daß $\frac{1}{Cos}(-z)=\pi-\frac{1}{Cos}\cdot z$ ist, so erhält man noch

$$\text{IV.} \quad \frac{1}{Cos}\cdot x-\frac{1}{Cos}\cdot y=\frac{1}{Cos}\cdot(xy+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) \;{}^{*)}$$

als eine allgemeingültige Gleichung.

---

*) Zur Rechten kommt eigentlich noch ein Minuszeichen vor $\frac{1}{Cos}$; allein, — drückt v alle Werthe aus, welche $Cos\, v=z$ machen, so ist auch $Cos(-v)=Cos\, v=z$; d. h. $-v$ drückt dann auch alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$ aus, sobald v alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x$ vorstellt. (S. §. 186. N. 5.).

Eben so findet man, wenn zur Rechten statt $\frac{1}{Cos}$ die wirkliche logarithmische Funktion gesetzt wird, daß rechts doppelt so viele Werthe sich ergeben, nämlich nicht bloß $\frac{1}{i}\cdot log[xy+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}+(y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2})\cdot i]$, welches alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot x-\frac{1}{Cos}\cdot y$ vorstellt, sondern auch noch $\frac{1}{i}\cdot log[xy+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-(y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2})\cdot i]$, welches alle Werthe von $\frac{1}{Cos}\cdot y-\frac{1}{Cos}\cdot x$ d. h. von $-\left(\frac{1}{Cos}\cdot x-\frac{1}{Cos}\cdot y\right)$ ausdrückt; dies letztere Resultat steckt aber schon in dem ersteren, eben weil $-\frac{1}{Cos}\cdot z=\frac{1}{Cos}\cdot z$ ist.

§. 196.

Geht man von den Argumenten zu den (hier) reell gedachten Arcus über, so muß man vor allen Dingen bemerken daß, da *Arc sin.* allemal im ersten Quadranten liegt, übrigens positiv oder negativ ist, die Kosinusse dieser Arcus stets positiv sind, wenn also $\sqrt{1-x^2}$ und $\sqrt{1-y^2}$ bezüglich diese Kosinusse vorstellen, so müssen sie stets positiv gedacht werden. — Betrachtet man ferner die Summe $Arc\,sin.\,x + Arc\,sin.\,y$, so liegt sie nie im zweiten Quadranten, wenn nicht x und y einerlei Vorzeichen haben, und haben x und y einerlei Vorzeichen, so liegt die gedachte Summe nur dann im zweiten Quadranten, wenn ihr Kosinus, welcher $=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy$ ist, negativ wird, d. h. wenn $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}<xy$, d. h. (da xy positiv ist) wenn $(1-x^2)(1-y^2)<x^2y^2$, d. h. wenn $x^2+y^2>1$ ist. — Man findet daher

I. 1. $Arc\,sin.\,x + Arc\,sin.\,y = Arc\,sin.\,(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$,

so lange x und y verschiedene Vorzeichen haben, oder so lange, wenn x und y einerlei Vorzeichen haben, $x^2+y^2 \overline{\overline{<}} 1$ ist; dagegen

I. 2. $Arc\,sin.\,x + Arc\,sin.\,y = \pm\pi - Arc\,sin.\,(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$

wenn x und y einerlei Vorzeichen haben und $x^2+y^2>1$ ist, wobei das obere (+) Zeichen gilt, wenn x und y positiv sind, das untere (—) Zeichen dagegen, wenn x und y negativ vorausgesetzt werden.

Ferner findet sich

II. 1. $Arc\,sin.\,x - Arc\,sin.\,y = Arc\,sin.\,(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$

so lange x und y einerlei Vorzeichen haben, oder so lange, wenn x und y verschiedene Vorzeichen haben, $x^2+y^2 \overline{\overline{<}} 1$ ist; dagegen

II. 2. $Arc\,sin.\,x - Arc\,sin.\,y = \pm\pi - Arc\,sin.\,(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$,

wenn x und y verschiedene Vorzeichen haben und $x^2+y^2>1$ ist.

Für den Ausnahmsfall, wo $x^2+y^2=1$ ist, gelten alle vier Formeln zugleich.

Wir finden ferner

III. 1. $Arc\,cos.\,x + Arc\,cos.\,y = Arc\,cos.(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$,

wenn x und y positiv sind, oder, im Falle x und y verschiedene Vorzeichen haben sollten, wenn der positive Kosinus größer ist als der absolute Werth des negativen oder ihm gleich *); dagegen

III. 2. $Arc\,cos.\,x + Arc\,cos.\,y = 2\pi - Arc\,cos.(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$

wenn x und y negativ sind, oder, im Falle x und y verschiedene Vorzeichen haben, wenn der positive Kosinus kleiner ist als der absolute Werth des negativen, oder ihm gleich **).

Endlich findet sich:

IV. 1. $Arc\,cos.\,x - Arc\,cos.\,y = Arc\,cos.(xy + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$

---

*) Die Gleichung III. 1.) ist nämlich so lange richtig, als die Summe der beiden Arcus zur Linken nicht in den dritten oder vierten Quadranten fällt, also so lange ihr Sinus, welcher $= x\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}$ ist, nicht negativ wird, und dies ist der Fall, sobald der positive Kosinus größer ist als der absolute Werth des negativen, oder ihm gleich. Und sind x und y beide positiv, dann liegt $Arc\,cos.\,x$ im ersten Quadranten, wie auch $Arc\,cos.\,y$; folglich liegt dann die Summe dieser Arcus ohnedieß nicht im dritten oder vierten Quadranten.

**) Sind x und y negativ, so liegen $Arc\,cos.\,x$ und $Arc\,cos.\,y$ im zweiten Quadranten; ihre Summe liegt also nothwendig im 3ten oder 4ten Quadranten, und es muß daher nun die Form der III. 2) eintreten, weil der Ausdruck zur Rechten ein Ausdruck ist, der denselben Kosinus hat und im 3ten oder 4ten Quadranten liegt, in so ferne $Arc\,cos.$ nur im 2ten oder 1ten Quadranten liegen kann (der Definition zufolge). Haben aber x und y verschiedene Vorzeichen, und ist der positive Kosinus kleiner als der absolute Werth des negativen, so ist, wenn $Arc\,cos.\,x = u$ und $Arc\,cos.\,y = v$ gesetzt wird, $Sin(u+v)$, nämlich $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ negativ; daher liegt $u+v$ jetzt wieder im dritten oder vierten Quadranten, und daher kommt es, daß jetzt wieder die Gleichung III. 2. statt finden muß.

wenn y positiv und x negativ ist — oder, wenn x und y einerlei Vorzeichen haben und y—x positiv ist; dagegen hat man

IV. 2. $Arc\,cos.x - Arc\,cos.y = -Arc\,cos.(xy + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$,

wenn y negativ und x positiv ist, oder wenn x und y einerlei Vorzeichen haben und x—y positiv ist *).

In diesen letztern vier Gleichungen stellen die Quadratwurzeln $\sqrt{1-x^2}$ und $\sqrt{1-y^2}$ die Sinusse von Werthen vor, welche in den beiden ersten Quadranten liegen; sie dürfen daher nie anders als positiv genommen werden.

§. 197.

Da wir (in den §§. 181.—183.) für die Logarithmen unendliche Reihen gefunden haben, so kann man nun auch $\frac{1}{Tg}\cdot x$ und $Arc\,tg.x$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umformen. Setzt man nämlich in der III. des §. 182. $x\cdot i$ statt z und $2n\pi\cdot i$ statt $log\,1$, so hat man augenblicklich,

(aus $\frac{1}{Tg}\cdot x = \frac{1}{2i}\cdot log\frac{1+x\cdot i}{1-x\cdot i}$ §. 185. XI.)

I. $$\frac{1}{Tg}\cdot x = n\pi + S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a+1}}{2a+1}\right]$$

d. h. $$= n\pi + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \text{ in inf.},$$

welche Gleichung $\frac{1}{Tg}\cdot x$ auch für einen imaginären Werth von x, z. B. für $x = p + q\cdot i = r\cdot(Cos\,\varphi + i\cdot Sin\,\varphi)$, ausgerech-

*) Denn man sieht leicht ein, daß wenn die Bedingungen des erstern Falles erfüllt sind, dann $Sin(u-v)$, welcher $= y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}$ ist, positiv; der Arcus u—v also im ersten oder zweiten Quadranten liegen und positiv sein wird. So wie aber die Bedingungen des andern Falles erfüllt sind, so wird derselbe Sinus negativ und derselbe Bogen u—v muß daher, da er nicht in den dritten oder vierten Quadranten fallen kann, nothwendig negativ sein, übrigens im ersten oder zweiten Quadranten liegen.

net, liefert, sobald $r<1$ ist, damit die Reihe zur Rechten convergirt. (S. §. 171.).

Aus der Gleichung I. folgt ferner, wenn x beliebig reell, aber, damit die Reihe convergire, an sich angesehen, kleiner als 1 ist,

$$\text{II.}\qquad Arc\,tg.x = S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a+1}}{2a+1}\right]$$

$$\text{d. h.}\quad = x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9-\text{ in inf. *)}$$

§. 198.

Man kann hiervon sogleich Anwendungen machen zur Berechnung der Zahl π, welche (im §. 156. Nr. 6.) dahin definirt worden ist, daß $\frac{1}{2}\pi$ die einzige zwischen 0 und 2 liegende Zahl sei, für welche

$$Cos\tfrac{1}{2}\pi = 0 \quad \text{und} \quad Sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$$

werde. Mittelst der Formeln

$$1)\quad Cos\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+Cos\,x}{2}} \quad \text{und} \quad 2)\quad Sin\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-Cos\,x}{2}}$$

berechnet man nun, indem man $\frac{1}{2}\pi$ statt x setzt

$$3)\qquad Cos\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = Sin\tfrac{1}{4}\pi,$$

wo die Wurzeln ihre positiven Werthe vorstellen, da für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, $Sin\,x$ und $Cos\,x$ positiv werden.

Daraus folgt aber

$$Tg\tfrac{1}{4}\pi = 1 = Cotg\tfrac{1}{4}\pi$$

$$\text{und}\qquad \tfrac{1}{4}\pi = Arc\,tg.1 = Arc\,cotg.1.$$

Setzt man also in der II. des §. 197. $x=1$, so hat man

---

*) Da für $x<1$, $Arc\,tg.x<\frac{1}{4}\pi$ sein, also zwischen 0 und 2 liegen muß, und die Reihe zur Rechten offenbar <1 ist, so kann die Reihe zur Rechten keinen andern der Werthe von $\frac{1}{Tg}\cdot x$ vorstellen, als den durch $Arc\,tg.x$ bezeichneten.

I. $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} -$ in inf.;

und dies ist der zuerst von Leibnitz gefundene Ausdruck zur Berechnung der Zahl $\frac{1}{4}\pi$, also auch der Zahl π.

Die Reihe selbst convergirt sehr langsam und erfordert eine zu große Anzahl von Gliedern, um π etwa bis auf 7 Decimalstellen genähert zu liefern. Euler hat daher zwei Bogen u und v, so gesucht, daß

$$Tg\,u = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad Tg\,v = \tfrac{1}{3}$$

wird; denn dann findet sich

$$Tg(u+v) = \frac{Tg\,u + Tg\,v}{1 - Tg\,u \cdot Tg\,v} = 1,$$

also $\qquad u+v = Arc\,tg.1 = \frac{1}{4}\pi$,

während $\qquad u = Arc\,tg.\frac{1}{2}$ und $v = Arc\,tg.\frac{1}{3}$

ist. Setzt man daher in II. zuerst $\frac{1}{2}$ statt x, um u zu erhalten, dann ebendaselbst $\frac{1}{3}$ statt x, um v zu erhalten, so hat man zuletzt:

$$\text{II.}\quad \tfrac{1}{4}\pi = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{in inf.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{in inf.} \end{array}\right\},$$

welche beide Reihen viel schneller convergiren.

Man kann auch, indem man in 1.) und 2.) $\frac{1}{4}\pi$ statt x setzt, $Cos\frac{1}{8}\pi$, $Sin\frac{1}{8}\pi$ und $Tg\frac{1}{8}\pi$ berechnen und man findet

$$Tg\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = -1+\sqrt{2};$$

hierauf kann man diesen Werth statt x in die Reihe II. des §. 197. setzen und sonach $\frac{1}{8}\pi$ und π finden.

Man kann aber auch $\frac{1}{4}\pi$ in drei unbekannte Theile u, v und w zerlegt sich denken, so daß $u+v+w = \frac{1}{4}\pi$ ist

und $\quad Tg(u+v+w) = \dfrac{Tg\,u + Tg\,v + Tg\,w - Tg\,u \cdot Tg\,v \cdot Tg\,w}{1 - Tg\,u \cdot Tg\,v - Tg\,u \cdot Tg\,w - Tg\,v \cdot Tg\,w} = 1$

wird. Man sucht dann Werthe von $Tg\,u$, $Tg\,v$ und $Tg\,w$

auf, welche dieser letztern Gleichung genügen, setzt solche statt x in die II. des §. 197. und findet u, v und w, also $\frac{1}{4}\pi$ in drei convergenten Reihen ausgedrückt.

Durch analoge Mittel hat man aber die Zahl π bis auf 261 Decimalstellen „ausgerechnet", von denen die ersten 15 folgende sind, nämlich

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793 \text{ in inf.}$$

Anmerkung 1. Der Ausdruck $\frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1-x^2}+x \cdot i)$ kann zur Zeit, und ohne Differenzialrechnung zu verwenden, nicht so bequem in eine Reihe verwandelt werden, welche nach Potenzen von x fortläuft. Wollte man daher jetzt schon $y = Arc\,sin.\,x$ in eine Reihe verwandeln, die nach Potenzen von x fortläuft, so könnte man das Umkehrungs-Problem (§. 123.) anwenden und

$$y = A_1 \cdot x + A_3 \cdot x^3 + A_5 \cdot x^5 + A_7 \cdot x^7 + A_9 \cdot x^9 + \text{ in inf.}\,^{*})$$

mit unbestimmten Koeffizienten A_1, A_3, A_5, A_7, 2c. 2c. annehmen, diese Reihe statt y in die Gleichung $x = Sin\,y$, d. h. in die Gleichung

$$x = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \text{ in inf.}$$

substituiren, in dem nach Potenzen von x geordneten Endresultat aber die Koeffizienten von x^1 oder x links und rechts einander gleich, die übrigen Koeffizienten von x^3, x^5, x^7, 2c. 2c. aber $=0$ setzen, und aus den entstehenden Gleichungen die Koeffizienten A_1, A_3, A_5, A_7, 2c. selbst finden.

Man erhält dann

$$Arc\,sin.\,x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{ in inf.}$$

---

*) Daß die Reihe für $Arc\,sin.\,x$ nur ungerade Potenzen von x enthalten kann, folgt daraus, daß sie sonst nicht der Gleichung $Arc\,sin.(-x) = -Arc\,sin.\,x$ genügen könnte.

oder $$Arc\,sin.\,x = S\left[\frac{1^{b|2}}{2^{b|2}}\cdot\frac{x^{2b+1}}{2b+1}\right].$$

Dieses Verfahren ist aber erstens mühsam und zweitens sehr wenig genügend, weil das Gesetz, nach welchem die einzelnen Koeffizienten fortgehen, auf diesem Wege durchaus nicht in die Augen fällt, wenigstens nicht mit Nothwendigkeit. Man muß daher dieses Problem, um es gründlich lösen zu können, bis zur Anwendung der Differenzialrechnung versparen.

Anmerkg. 2. Wir haben (im §. 175.) gefunden

$$1)\quad log(p+q\cdot i) = Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i,$$

wo $r=+\sqrt{p^2+q^2}$ und $Cos\,\varphi=\frac{p}{r}$, $Sin\,\varphi=\frac{q}{r}$, so wie φ selbst nur eindeutig ist und zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Statt dieses Resultats, welches schon Euler gegeben hat, findet man bei einigen Schriftstellern (unter andern bei Cauchy S. Cours d'analyse. 1821.) dieses andere

$$2)\quad log(p+q\cdot i) = L(+\sqrt{p^2+q^2})+i\cdot\frac{1}{Tg}\cdot\frac{q}{p},$$

wobei wir unsere hiesige Bezeichnungsweise gebrauchen. Dieser letztere Ausdruck zur Rechten, enthält aber dann doppelt so viele Werthe, als er enthalten darf, nämlich außer den Werthen von $log(p+q\cdot i)$, auch noch die Werthe von $log(-p-q\cdot i)$, worauf wir hier den Anfänger noch aufmerksam machen wollen. Es ist nämlich ganz richtig aus $Sin\,\varphi=\frac{q}{r}$ und $Cos\,\varphi=\frac{p}{r}$ gefolgert $Tg\,\varphi=\frac{q}{p}$; folglich ist φ ein Argument oder Arcus, dessen Tangente $=\frac{q}{p}$; aber alle Werthe von $\frac{1}{Tg}\cdot\frac{q}{p}$ sind ausgedrückt durch $\mu\pi+Arc\,tg.\frac{q}{p}$, wo μ sowohl 0 als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt. Also ist die Gleichung 2.) keine andere als diese:

$$3)\quad log(p+q\cdot i) = Lr+\left(\mu\pi+Arc\,tg.\frac{q}{p}\right)\cdot i.$$

Ist nun p positiv, so ist $Arc\,tg.\frac{q}{p}$ mit q zugleich positiv oder negativ und im ersten Quadranten, mithin genau der Werth φ in 1.). Die Gleichung 3.) liefert daher nicht bloß alle Werthe in 1.) zur Rechten, indem man $\mu = 2n$ nimmt, sondern auch noch (indem $\mu = 2n \pm 1$ genommen wird) die Werthe

$$L\,r + \left(2n\pi \pm \pi + Arc\,tg.\frac{-q}{-p}\right)\cdot i$$

in so ferne wir auch $\frac{-q}{-p}$ statt $\frac{q}{p}$ schreiben können. Dies sind aber genau die Werthe von $log(-p-q\cdot i)$ für den Fall, daß p positiv, also $-p$ negativ ist. Denn berechnet man letztere nach der Nr. 1.), indem man daselbst $-p$ statt p, und $-q$ statt q setzt, so liegt φ im zweiten Quadranten und ist mit $-q$ zugleich positiv oder negativ. Ist aber $-q$ positiv, so ist $\frac{-q}{-p}$ negativ, folglich $Arc\,tg.\frac{-q}{-p}$ negativ, und deshalb $\varphi = \pi + Arc\,tg.\frac{-q}{-p}$; und ist $-q$ negativ, so ist $\frac{-q}{-p}$ positiv, also auch $Arc\,tg.\frac{-q}{-p}$ positiv und dann ist $\varphi = -\pi + Arc\,tg.\frac{-q}{-p}$.

Ganz analog führt man die Behauptung für den Fall durch, wo p negativ sein sollte.

Die Gleichung 2.) würde daher nur dann eine vollkommene (richtige) Gleichung sein, wenn man sie so schriebe:

$$4)\quad log[\pm(p+q\cdot i)] = L\left(+\sqrt{p^2+q^2}\right) + i\cdot\frac{1}{Tg}\cdot\frac{q}{p}.$$

Neuntes Kapitel.

Von den geometrischen Sinus und Kosinus.

Vorerinnerung.

Wir haben bereits (in der zweiten Abtheilung des vorhergehenden Kapitels) darauf aufmerksam gemacht, daß man in der späteren Anwendung der Analysis und namentlich der Integralrechnung auf Geometrie und auf das Problem der Rektifikation der Kurven, zu folgenden Resultaten gelangt:

Wenn (Fig. 4.) der Radius $CG = CA = CE = 1$ ist, und der Winkel ACE durch den Bogen $AE = x$ ausgedrückt wird, so findet man

$$AB = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \text{ꝛc. ꝛc.} \quad \text{d. h.} \quad AB = Sin\, x$$

und $$BC = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \text{ꝛc. ꝛc.} \quad \text{d. h.} \quad BC = Cos\, x;$$

d. h. die Linien AB und BC, wenn sie mit einem Maaßstabe gemessen werden, welcher den Radius AC zur Einheit hat, geben dieselben echt gebrochenen Zahlen zu Maaßen, welche man auch erhält, wenn man den Bogen AE mit derselben Einheit mißt, das dadurch erhaltene Maaß x aber, in die beiden unendlichen Reihen, welche wir *Sin* x und *Cos* x genannt haben, statt x substituirt und die Reihen selbst ausrechnet. — Daher die geschichtlichen Benennungen „Bogen", „Quadrant", u. s. w.

Daß dann, wegen $CE = 1$, noch $DE = \frac{AB}{BC} = \frac{Sin\, x}{Cos\, x}$

$= Tg\, x$ — und, wegen $CG = 1$, auch $GH = \frac{AF}{CF} \cdot = \frac{BC}{AB}$

$= \frac{Cos\,x}{Sin\,x} = Cotg\,x$ sein müsse, versteht sich von selbst, sobald man CG und DE senkrecht auf CE, und GH wieder senkrecht auf CG sich denkt.

Will man aber früher schon, ehe man durch Anwendung der Integralrechnung zu den eben angeführten Resultaten gelangen kann, von denselben Gebrauch machen, so muß man den umgekehrten Weg betreten, nämlich von diesen speciellen Werthen AB, BC in ihrer geometrischen Abhängigkeit vom Bogen AE = x ausgehen, — aus dem geometrisch anschaulichen Gesetz, nach welchem AB mit dem Bogen AE zugleich wächst, dagegen BC abnimmt, Eigenschaften dieser Werthe AB, BC ableiten, — dann aber allgemeine Funktionen von x aufsuchen, welche dieselben Eigenschaften haben, — und zuletzt nachweisen, wie die Werthe AB, BC nichts anders als besondere Werthe dieser letzteren allgemeinen Funktionen von x sind.

Es ist dies der geschichtliche Weg, nur daß derselbe in den meisten Lehrbüchern der sogenannten Trigonometrie in der Regel wissenschaftlich dadurch sehr getrübt ist, daß man negative Winkel, negative Linien und allen jenen Apparat mit hineinzieht, der uns ein Lächeln abzwingt, wenn wir auch vor der Geschichte alle Ehrfurcht haben, weil sie uns zeigt, wie der forschende Geist des Menschen, selbst durch Irrthümer hindurch sich zum Höheren und zu dem Höchsten unaufhaltsam aufschwingt. — Ist jedoch einmal der Lauf durchgemacht, das Ziel erreicht, dann wird es geradezu lächerlich, wenn man auch die durchlaufenen Irrthümer mit dem größten Ernste als unabweisbare Nothwendigkeiten reproducirt sieht.

Will man aber vom Besonderen zum Allgemeinen sich erheben, so muß es bald und schnell geschehen, und nicht erst, nachdem man mehrere besondere Begriffe neben einander hingestellt, ja vielleicht sogar diese letzteren bereits mit einander in Verbindung gebracht hat. Je länger gezaudert wird, desto schwe-

rer wird es, die Einzelheiten streng wissenschaftlich zusammenzuhalten, und den allgemeinen Begriff herzustellen.

Namentlich muß man in dem jetzt betrachteten Falle nie von andern als von spitzen Winkeln ausgehen, und wenn Summen $x+z$, oder Differenzen $x-z$ von solchen Winkeln betrachtet werden, jedesmal unbedingt voraussetzen, daß $x+z$ und $x-z$ wieder wirkliche Winkel und spitze Winkel vorstellen. Die nachstehenden Paragraphen werden dies nun in ein näheres Licht setzen.

§. 199.

Wir drücken hier ein für allemal jeden Winkel nie in Graden (Minuten, Sekunden) aus, sondern stets durch die Länge des, zwischen seinen Schenkeln mit der Einheit des Maaßstabes beschriebenen Bogens.

Ist nun auf diese Weise der spitze Winkel ACB (Fig. 1.) durch den Bogen x ausgedrückt, und fällen wir von dem einen Schenkel desselben auf den andern die Graden AB, A_1B_1, A_2B_2, 2c. 2c. senkrecht, so sind die entstehenden rechtwinkligen Dreiecke alle einander ähnlich, die Seiten derselben proportionirt, und daher die beiden Quotienten

$$\frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}$$

immer bezüglich von demselben Werth, welche der Hypothenusen man durch b bezeichnet, wenn nur gleichzeitig die zugehörigen beiden Katheten durch c und a bezeichnet werden. Diese Quotienten ändern sich also nur mit dem Winkel x, d. h. sie sind einzig und allein von dem Winkel x abhängig, und wir nennen sie bezüglich die geometrischen Sinus und Kosinus von x, und bezeichnen sie, um solche von den (im §. 145.) definirten *Sin* x und *Cos* x (welche bloße Buchstaben-Ausdrücke und im Allgemeinen ohne alle geometrische Bedeutung sind) zu unterscheiden, bezüglich durch

sin x und *cos* x *).

Wir haben also

$$sin\,x = \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad cos\,x = \frac{a}{b}.$$

§. 200.

Ist nun (Fig. 4.) der Radius des Kreises $= 1$, der Bogen AE (also der Winkel ACE) $= x$, so hat man

$$sin\,x = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{1} = AB$$

$$\text{und} \qquad cos\,x = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} = BC;$$

d. h. wenn man die Längen AB und BC mit einem Maaßstabe mißt, welcher den Radius AC zur Einheit hat, so erhält man dieselben echten Brüche, welche wir im §. 199. bezüglich durch *sin* x und *cos* x bezeichnet haben.

Für jeden spitzen Winkel ist daher nach dem pythagorischen Lehrsatze

$$(\odot)\cdots \qquad (sin\,x)^2 + (cos\,x)^2 = 1.$$

§. 201.

Sind (Fig. 2.) $DCE = x$ und $ACD = y$ und $ACE = x + y$ drei spitze Winkel, so ist (nach §. 199., wenn AD senkrecht auf CD gedacht und BEDF ein Rechteck ist)

$$sin(x+y) = \frac{AB}{AC} = \frac{AF+DE}{AC} = \frac{AF}{AC} + \frac{DE}{AC}$$

$$= \frac{AF}{AD}\cdot\frac{AD}{AC} + \frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AC} = cos\,x \cdot sin\,y + sin\,x \cdot cos\,y;$$

---

*) Der Unterschied besteht bloß darin, daß diese neuen geometrischen Begriffe durch kleine Anfangs-Buchstaben sich von den im vorigen Kapitel behandelten Funktionen von x (Buchstaben-Ausdrücken), — welche wir immer mit großen Anfangs-Buchstaben geschrieben haben und schreiben werden, — unterscheiden. — Dieser Unterschied, wenn er streng aufrecht gehalten wird, ist ausreichend.

d. h. es ist allemal

I. $sin(x+y) = sin\,x \cdot cos\,y + cos\,x \cdot sin\,y.$

Eben so findet sich aber

$$cos(x+y) = \frac{BC}{AC} = \frac{CE-DF}{AC} = \frac{CE}{AC} - \frac{DF}{AC}$$

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AC} - \frac{DF}{AD} \cdot \frac{AD}{AC} = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y;$$

d. h. es ist allemal

II. $cos(x+y) = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y.$

Sind ferner (Fig. 3.) $ACB = x$ und $DCB = y$ und $ACD = x-y$ drei spitze Winkel, — ist ferner die Gerade AE senkrecht auf CD gezogen und BEDF ein Rechteck; so hat man

$$sin(x-y) = \frac{AD}{AC} = \frac{AE-BF}{AC} = \frac{AE}{AC} - \frac{BF}{AC}$$

$$= \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} - \frac{BF}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = cos\,y \cdot sin\,x - sin\,y \cdot cos\,x;$$

d. h.

III. $sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y.$

Ferner findet sich

$$cos(x-y) = \frac{CD}{AC} = \frac{CF+BE}{AC} = \frac{CF}{AC} + \frac{BE}{AC}$$

$$= \frac{CF}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} + \frac{BE}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = cos\,y \cdot cos\,x + sin\,y \cdot sin\,x;$$

d. h.

IV. $cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y.$

Addirt und subtrahirt man die I. und die III., desgleichen die II. und die IV. zu und von einander, so erhält man noch:

V. $sin(x+y) + sin(x-y) = 2sin\,x \cdot cos\,y;$

VI. $sin(x+y) - sin(x-y) = 2cos\,x \cdot sin\,y;$

VII. $cos(x-y) + cos(x+y) = 2cos\,x \cdot cos\,y;$

VIII. $cos(x-y) - cos(x+y) = 2sin\,x \cdot sin\,y,$

wenn nur x und y und x+y und x−y lauter spitze Winkel sind (die man sich jedoch durch den Bogen für den Radius 1 gemessen denkt, so daß x und y und x−y und x+y Bogenlängen vorstellen, welche alle größer als 0 und kleiner als die Länge des Viertelskreises sind, dessen Radius = 1 ist).

§. 202.

Die geometrische Abhängigkeit, welche (Fig. 4.) zwischen dem Bogen AEK und seiner Sehne ABK statt findet, oder zwischen Hälften derselben, nämlich zwischen AE = x und AB = u; — eben so auch die geometrische Abhängigkeit zwischen AE = x und BC = v, — jede dieser beiden Abhängigkeiten muß sich durch eine Gleichung zwischen u und x, und zwischen v und x ausdrücken lassen. Diese Gleichungen können nach u und nach v aufgelöst gedacht werden. Es muß also einen Buchstaben-Ausdruck in x geben, dessen Werth die zu den Werthen von x zugehörigen Werthe von u sind; und eben so muß es einen andern Buchstaben-Ausdruck geben, dessen Werthe die von v sind.

Auf der andern Seite haben wir bereits unendliche, nach x fortlaufende Reihen gefunden, welche die charakteristische Eigenschaft der Produkte a·a·a··· von x Faktoren hatten, und unter diesen haben wir dann wieder diejenige herausgesucht, welche diesem Produkte gleich war. Da wir nun in VII. des §. 201. eine charakteristische Eigenschaft des geometrischen Kosinus ausgesprochen sehen, so können wir jetzt auch, jenem Vorgange folgend, zunächst eine Reihe R_x suchen, welche nach x fortläuft, und welche mit $cos\,x$ die in VII. des §. 201. ausgesprochene charakteristische Eigenschaft gemein hat, nach welcher

1) $$R_{x-y}+R_{x+y}=2R_x\cdot R_y$$

wird, oder mit andern Worten, wir können, wenn wir diese Reihe mit unbestimmten Koeffizienten annehmen, etwa

2) $$R_x=S[A_\mathfrak{b}\cdot x^\mathfrak{b}],$$

die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3, 2c. 2c. dieser Reihe so suchen, daß

$$3)\qquad S[A_b(x-y)^b]+S[A_b(x+y)^b] = 2S[A_b x^b]\cdot S[A_b y^b]$$

wird. Nachher kann man dann weiter sehen, ob und unter welchen Umständen die so gefundene Reihe dem geometrischen $\cos x$ auch gleich werden kann.

Man bildet zu dem Ende, indem man in 2.) $x-y$ statt x setzt, die Reihe R_{x-y}; aus letzterer dann, dadurch daß man $-y$ statt y substituirt, die andere Reihe R_{x+y}. — Denkt man sich nun die Potenzen von $x-y$ und $x+y$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und denkt man daran, daß die ungeraden Potenzen von y in den Reihen R_{x-y} und R_{x+y}, mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen müssen, daß sie also aus der Summe $R_{x-y}+R_{x+y}$ ganz herausfallen, so folgt, daß in der Gleichung 1.) oder 3.) zur Rechten ebenfalls keine ungeraden Potenzen von y vorkommen können, daß also die Reihe R_y oder $S[A_b y^b]$ nur gerade Potenzen von y enthalten kann. — Wir finden also die Hälfte aller Koeffizienten $=0$; es ist nämlich

$A_{2b+1}=0$, für jedes b, welches 0 oder positiv ganz ist.

Wir haben daher nun

$$4)\qquad R_x = S[A_{2b}\cdot x^{2b}],$$

also, nach dem binomischen Lehrsatze,

$$R_{x-y} = S[A_{2b}(x-y)^{2b}] = S\left[A_{2b}\cdot\frac{(2b)!}{c!\;d!}x^c(-1)^d y^d\right]_{c+d=2b}$$

und

$$R_{x+y} = S[A_{2b}(x+y)^{2b}] = S\left[A_{2b}\cdot\frac{(2b)!}{c!\;d!}x^c y^d\right]_{c+d=2b}.$$

Addirt man nun diese beiden letztern Gleichungen, so heben sich zur Rechten die Glieder mit den ungeraden Potenzen von y weg, während die übrigen doppelt werden; schreibt man daher $2d$ statt d (wodurch man eben nur die Glieder bekommt, welche sich nicht wegheben), so kann auch $c=2b-2d$ nur gerade werden, so daß man auch gleich $2c$ statt c schreiben kann; und man erhält

5) $$R_{x-y}+R_{x+y} = 2S\left[A_{2\mathfrak{b}}\cdot\frac{(2\mathfrak{b})!}{(2\mathfrak{c})!\,(2\mathfrak{d})!}x^{2\mathfrak{c}}y^{2\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{b}},$$

wo überall auch $2\mathfrak{c}+2\mathfrak{d}$ statt $2\mathfrak{b}$ geschrieben werden kann.

Auf der andern Seite hat man (wenn in 4. $\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{b}$, und nachher noch y statt x und gleichzeitig $\mathfrak{d}$ statt $\mathfrak{b}$ gesetzt wird)

6) $$2R_x\cdot R_y = 2S[A_{2\mathfrak{c}}\cdot A_{2\mathfrak{b}}\cdot x^{2\mathfrak{c}}y^{2\mathfrak{b}}].$$

Damit nun die Ausdrücke zur Linken in 5.) und 6.), d. h. die Ausdrücke zur Rechten in 5.) und 6.) einander gleich werden, müssen die unbestimmten Koeffizienten A_0, A_2, A_4, A_6, ꝛc. ꝛc. so angenommen werden, daß für jeden Werth von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, welcher 0 oder (positiv) ganz ist,

7) $$\frac{(2\mathfrak{c}+2\mathfrak{d})!}{(2\mathfrak{c})!\,(2\mathfrak{d})!}\cdot A_{2\mathfrak{c}+2\mathfrak{b}} = A_{2\mathfrak{c}}\cdot A_{2\mathfrak{b}}$$

wird. Ob und wie solches möglich ist, soll nun sogleich untersucht werden.

Setzen wir zunächst $\mathfrak{c}=\mathfrak{d}=0$ (in 7.), so erhalten wir

$$A_0 = A_0\cdot A_0,$$

und dieser Gleichung wird genügt durch die Annahme

8) $$A_0 = 1.$$

Setzen wir nun bloß $\mathfrak{d}=1$ (in 7.), so erhalten wir

9) $$\frac{(2\mathfrak{c}+1)(2\mathfrak{c}+2)}{1\cdot 2}A_{2\mathfrak{c}+2} = A_{2\mathfrak{c}}\cdot A_2 = A_{2\mathfrak{c}}\cdot b$$

wenn wir der Bequemlichkeit wegen, setzen

10) $A_2 = b$, wo b ganz unbestimmt bleibt.

Setzen wir nun in 9. statt $\mathfrak{c}$ nach uud nach 1, 2, 3, 4,⋯ n−1, multipliciren wir alle einzelnen entstehenden Gleichungen links und rechts mit einander und dividiren wir die nun entstandene Gleichung links und rechts durch $A_4\cdot A_6\cdot A_8 \cdots A_{2n-2}$, so ergiebt sich

11) $$\frac{(2n)!}{2^n}\cdot A_{2n} = b^n \quad \text{d. h.} \quad A_{2n} = \frac{(2b)^n}{(2n)!},$$

wodurch alle Koeffizienten A_2, A_4, A_6, A_8, in inf. in b ausgedrückt sind, während b ganz unbestimmt bleibt.

Setzen wir aber in 11.) statt n nach und nach c, d und c+d und substituiren wir diese Werthe in die Gleichung 7.), so geht jene über in

$$\frac{(2c+2d)!}{(2c)!\,(2d)!}\cdot\frac{(2b)^{c+d}}{(2c+2d)!}=\frac{(2b)^c}{(2c)!}\cdot\frac{(2b)^d}{(2d)!},$$

und diese ist offenbar eine identische. Wir haben also in den Nummern 8.) und 11.) alle Koeffizienten so bestimmt, daß das Problem ohne allen denkbaren Widerspruch gelöst sich findet; und nur b allein bleibt unbestimmt, so daß man b beliebig und immer anders und anders annehmen kann und man hat doch jedesmal eine Reihe R_x, welche die in 1.) ausgesprochene Eigenschaft des (geometrischen) $cos\,x$ hat und diese Reihe ist allemal

$$12)\qquad R_x = S\left[\frac{(2b)^a}{(2a)!}x^{2a}\right].$$

§. 203.

Suchen wir nun eine Reihe T_x, welche nach x fortläuft und welche die in der Gleichung VI. des §. 201. ausgesprochene charakteristische Eigenschaft des (geometrischen) $sin\,x$ hat, wenn R_x statt $cos\,x$ gesetzt wird, d. h. welche der Gleichung

$$1)\qquad T_{x+y}-T_{x-y}=2R_x\cdot T_y$$

genügt. — Diese Reihe T_x kann nur ungerade Potenzen von x enthalten, da sich bei dem Subtrahiren zur Linken alle geraden Potenzen von y wegheben, so daß also auch T_y zur Rechten nur ungerade Potenzen von y enthalten kann. — Wir setzen daher

$$2)\qquad T_x = S[C_{2b+1}\cdot x^{2b+1}]$$

und wir haben dann

$$3)\qquad T_{x+y}=S[C_{2b+1}\cdot(x+y)^{2b+1}]=S\left[C_{2b+1}\cdot\frac{(2b+1)!}{c!\;d!}x^c y^d\right]_{c+d=2b+1}$$

4) $$T_{x-y} = S\left[C_{2\mathfrak{b}+1}\cdot\frac{(2\mathfrak{b}+1)!}{\mathfrak{c}!\ \mathfrak{d}!}x^{\mathfrak{c}}(-1)^{\mathfrak{d}}y^{\mathfrak{d}}\right]_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=2\mathfrak{b}+1}.$$

Subtrahirt man nun diese beiden Gleichungen von einander, so heben sich rechts alle geraden Potenzen von y weg, die übrigen Glieder werden doppelt, man kann sogleich $2\mathfrak{d}+1$ statt $\mathfrak{d}$ setzen, und weil dann $\mathfrak{c} = 2\mathfrak{b}+1-(2\mathfrak{d}+1) = 2\mathfrak{c}-2\mathfrak{d}$ nur gerade wird, so kann man auch sogleich $2\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{c}$ schreiben und man erhält

5) $$T_{x+y}-T_{x-y} = 2S\left[C_{2\mathfrak{b}+1}\cdot\frac{(2\mathfrak{b}+1)!}{(2\mathfrak{c})!\ (2\mathfrak{d}+1)!}\cdot x^{2\mathfrak{c}}y^{2\mathfrak{d}+1}\right]_{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{b}},$$

wo auch überall $\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$ statt $\mathfrak{b}$ gesetzt werden darf.

Auf der andern Seite hat man

6) $$2R_x\cdot T_y = 2S\left[\frac{(2b)^{\mathfrak{c}}}{(2\mathfrak{c})!}C_{2\mathfrak{d}+1}\cdot x^{2\mathfrak{c}}y^{2\mathfrak{d}+1}\right].$$

Damit nun diese Ausdrücke zur Rechten einander gleich werden, muß man der Gleichung

7) $$\frac{(2\mathfrak{c}+2\mathfrak{d}+1)!}{(2\mathfrak{c})!\ (2\mathfrak{d}+1)!}\cdot C_{2\mathfrak{c}+2\mathfrak{d}+1} = \frac{(2b)^{\mathfrak{c}}}{(2\mathfrak{c})!}\cdot C_{2\mathfrak{d}+1}$$

für jeden Werth von $\mathfrak{c}$ und von $\mathfrak{d}$ genügen, welcher 0 oder positiv ganz ist.

Für $\mathfrak{c} = \mathfrak{d} = 0$ erhält man $C_1 = C_1$, so daß C_1 ganz unbestimmt bleibt und wir setzen

8) $C_1 = a$, wo a ganz unbestimmt ist.

Für $\mathfrak{c} = 1$, erhalten wir aus der Gleichung 7.)

9) $$(2\mathfrak{d}+2)(2\mathfrak{d}+3)\cdot C_{2\mathfrak{d}+3} = 2b\cdot C_{2\mathfrak{d}+1}.$$

Setzen wir nun hier statt $\mathfrak{d}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 ⋯ n−1, multipliciren wir diese einzelnen Gleichungen mit einander und dividiren wir die nun entstandene Gleichung durch $C_3\cdot C_5\cdot C_7 \cdots C_{2n-1}$, so erhält man

10) $(2n+1)!\ C_{2n+1} = (2b)^n\cdot a$, d. h. $C_{2n+1} = \dfrac{(2b)^n\cdot a}{(2n+1)!}$

und die gesuchte Reihe T_x, welche mit der Reihe R_x in Verbindung, die in den Nummern VI. und VII. des §. 200. ausgesprochenen Eigenschaften haben, wenn solche daselbst bezüglich statt *sin*x und *cos*x gesetzt werden, ist daher jetzt

$$11) \qquad T_x = S\left[\frac{a\cdot(2b)^a}{(2a+1)!}x^{2a+1}\right].\text{*)}$$

§. 204.

Setzen wir nun diese Reihen T_x und R_x (aus §. 202. Nr. 12. und §. 203. Nr. 11.), statt *sin*x und *cos*x in die VIII. des §. 200., so erhalten wir

$$S\left[\frac{(2b)^a}{(2a)!}(x-y)^{2a}\right]-S\left[\frac{(2b)^a}{(2a)!}(x+y)^{2a}\right]$$
$$= 2S\left[\frac{a\cdot(2b)^c}{(2c+1)!}x^{2c+1}\right]\cdot S\left[\frac{a\cdot(2b)^b}{(2b+1)!}\cdot y^{2b+1}\right],$$

oder, wenn wir auf $(x-y)^{2a}$ und $(x+y)^{2a}$ den binomischen Lehrsatz anwenden und dann subtrahiren, — zur Rechten aber multipliciren,

$$S\left[-\frac{(2b)^{c+b+1}}{(2c+1)!(2b+1)!}x^{2c+1}y^{2b+1}\right]$$
$$= S\left[\frac{a^2(2b)^{c+b}}{(2c+1)!(2b+1)!}x^{2c+1}y^{2b+1}\right]$$

und diese Gleichung wird eine identische, sobald

---

*) Da die Aufgabe selbst nur dann keinen Widerspruch in sich schließt, wenn die Koeffizienten C_1, C_3, C_5, 2c. 2c. so gefunden sind, daß die Gleichung 7.) für jeden Werth von c und für jeden Werth von b, welcher 0 oder positiv ganz ist, identisch wird, — so muß man vorher noch die in 10.) gefundenen Werthe dieser Koeffizienten, also die Werthe von

$$C_{2b+1} \quad \text{und} \quad C_{2c+2b+1}$$

in die Gleichung 7.) substituiren, (wie wir solches auch im vorhergehenden Paragraphen gethan haben) und zusehen, ob dieselbe wirklich identisch wird. Dies ist aber der Fall.

1) $$2b = -a^2$$

genommen wird, wodurch noch b in a bestimmt ist.

Wir haben also nun gefunden die Reihen

2) $$R_x = S\left[(-1)^a \cdot a^{2a} \cdot \frac{x^{2a}}{2a!}\right]$$

und

3) $$T_x = S\left[(-1)^a \cdot a^{2a+1} \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

welche die Eigenschaft haben, daß wenn sie bezüglich statt *cos* x und *sin* x in die Gleichungen VI., VII. und VIII. des §. 200. gesetzt werden, identische Gleichungen erscheinen, während a wie x (und y) ganz beliebige Ausdrücke sind, reelle wie imaginäre.

Aber man überzeugt sich auch sogleich noch sehr leicht, daß auch die Gleichung V. des §. 200. eine identische wird, sobald die Reihen R_x und T_x statt der dortigen *cos* x und *sin* x bezüglich gesetzt werden.

Deshalb werden auch die Gleichungen I.—IV. des §. 201. identische, sobald dieselben Substitutionen vorgenommen werden; weil aus den Gleichungen V.—VIII. die I.—IV. hervorgehen, wenn man erstere paarweise zu einander addirt oder von einander subtrahirt. Die gedachten Reihen R_x und T_x haben also alle charakteristischen Eigenschaften der (geometrischen) *cos* x und *sin* x, obgleich a in ihnen ganz beliebig reell oder imaginär gedacht werden kann, eben so wie x.

Suchen wir nun noch den Werth von a, für welchen die Werthe der Reihen R_x und T_x mit den Werthen der (geometrischen) *cos* x und *sin* x zusammenfallen, so oft x positiv nnd kleiner als der Viertelskreis gedacht wird.

Wir wissen aus der Elementar-Geometrie, daß (Fig. 4.) die Sehne ABK ihrem Bogen AEK desto näher rückt, je kleiner beide werden, daß also der Quotient $\frac{ABK}{AEK}$, oder $\frac{\frac{1}{2}ABK}{\frac{1}{2}AEK}$, d. h. $\frac{sin\,x}{x}$ der Einheit unendlich nahe kommt, wenn x unendlich klein gedacht wird. Soll also die Reihe T_x d. h.

$$ax - \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^5x^5}{5!} - \frac{a^7x^7}{7!} + \text{in inf.}$$

dem *sin* x gleich werden können, so muß man a so nehmen, daß, wenn solche durch x dividirt wird, der Quotient

$$a - \frac{a^3x^2}{3!} + \frac{a^5x^4}{5!} - \frac{a^7x^6}{7!} + \text{in inf.}$$

der Einheit unendlich nahe rückt, sobald x unendlich klein gedacht wird. Deshalb wird

4) $a = 1$;

und man hat nun gefunden

5) $sin\, x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{2a+1}\right]$

und

6) $cos\, x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$,

so oft x irgend ein Bogen ist (im Kreise dessen Radius $= 1$), welcher einen spitzen Winkel ausdrückt.

Da nun dieselben Reihen (zur Rechten in 5. und 6.) diejenigen sind, welche wir in der zweiten Abtheilung des vorhergehenden Kapitels mit *Sin* x und *Cos* x bezeichnet und unter dem Namen der (allgemeinen) Sinus und Kosinus behandelt haben, — so folgt:

A) die geometrischen Sinus und Kosinus von x sind die Werthe, welche die allgemeinen *Sin* x und *Cos* x (d. h. diese unendlichen Reihen) annehmen, wenn statt x der Bogen gesetzt wird (in dem Kreise dessen Radius $= 1$), welcher irgend einen spitzen Winkel ausdrückt.

B) Die Zahl $\frac{1}{2}\pi$, welche wir als die kleinste positive Zahl definirt haben, deren allgemeiner Kosinus $= 0$ und Sinus $= 1$ ist, ist zu gleicher Zeit die Länge des Viertelskreises; — die Zahl

$$\pi = 3{,}14159 \cdots \text{ (S. §. 198.)}$$

ist also die Länge des Halbkreises, — weil der Bogen x

noch immer einem spitzen Winkel entspricht, wenn er nur um unendlich wenig kleiner ist als der Viertelskreis.

C) Dadurch wird aber die Benennung „Quadrant", im vorhergehenden Kapitel ganz identisch mit der Länge des Viertelskreises, dessen Radius $=1$.

§. 205.

Definirt man nun die geometrischen Sinus und Kosinus aller rechten, stumpfen, gestreckten und erhabenen Winkel x (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) dahin, daß man die Werthe der allgemeinen $Sin\,x$ und $Cos\,x$ darunter versteht, die sie annehmen, wenn statt x die Länge dieses, den Winkel ausdrückenden Bogen gesetzt wird, so kann man aus den (in den §§. 157.—160.) gefundenen Resultaten nun sogleich folgern:

1) Der Sinus des stumpfen Winkels A_2CE (Fig. 5.) ist die Länge A_2B_2; denn er ist $=Sin(\pi-A_2CE)=Sin\,A_2CF$ (nach §. 160. I.).

2) Der Kosinus desselben stumpfen Winkels ist die Länge CB_2, aber negativ genommen (nach §. 160. I.).

3) Der Sinus und der Kosinus des gestreckten Winkels ist bezüglich $=Sin\,\pi$ und $=Cos\,\pi$, d. h. (nach §. 159. NNr. 5. 6.) bezüglich $=0$ und $=-1$.

4) Der Sinus des erhabenen und im dritten Quadranten liegenden Winkels A_3CE ist die Länge der Linie A_3B_2, aber negativ genommen (nach §. 160. III.); denn er ist $=Sin(\pi+A_3CF)=-Sin\,A_3CF$.

5) Der Kosinus desselben erhabenen Winkels ist die Länge CB_2, aber negativ genommen (nach §. 160. III.).

6) Der Sinus und der Kosinus des erhabenen Winkels D_1CE $(=\frac{3}{2}\pi)$ ist bezüglich -1 und 0 (nach §. 159. NN. 7. 8.).

7) Der Sinus des erhabenen und im vierten Quadranten liegenden Winkels A_4CE ist die Länge A_4B_1 aber negativ ge-

nommen; denn er ist $= Sin(2\pi - A_4CE) = -Sin\,A_4CE$ (nach §. 160. II.), wenn hier zuletzt unter A_4CE der spitze Winkel verstanden wird.

8) Der Kosinus desselben erhabenen Winkels ist die Länge CB_1 ohne alle Veränderung, denn er ist (nach §. 160. II.) dem Kosinus des spitzen Winkels A_4CE gleich.

Anmerkung. Alle diese Resultate lassen sich, zur Hilfe für das Gedächtniß, auf folgende Weise zusammenfassen:

Man denkt sich eine feste, unbewegliche Gerade FCE (Fig. 5.); auf selbiger einen beweglichen Radius CE, der sich um C dreht und dessen Endpunkt E nach und nach die Kreisbogen EA, EAA_1, EAA_1D, EDA_2, EDF, $EDFA_3$, $EDFD_1$, $EDFA_4$ 2c. 2c. beschreibt; — dann zeigt sich der Sinus dieser Bogen stets als die Länge der senkrechten Linie, welche vom Endpunkt des Bogens, gegen die unbewegliche Gerade FCE hin gezogen werden kann, und positiv oder negativ genommen, je nachdem diese Gerade von oben (d. h. von A, A_1, D, A_2) nach unten, oder von unten (d. h. von A_3, D_1, A_4) nach oben hin gezogen gedacht worden ist. — Der Kosinus dagegen eines jeden dieser Bogen (d. h. dieser Winkel) zeigt sich als das, was diese eben gedachte senkrechte Linie von der unbeweglichen Geraden FCE, vom Mittelpunkt C an gerechnet, abschneidet und positiv oder negativ genommen, je nachdem das abgeschnittene Stück, vom Mittelpunkt ab, rechts hin liegt, oder nach der entgegengesetzten Seite zu.

Man denkt sich dann auch, daß der bewegliche Radius noch einen oder mehrere ganze Umläufe macht, so daß der Endpunkt die Bogen 2π, 4π, 6π, 2c. 2c. noch dazu beschreibt (zu dem schon beschriebenen Bogen x. Derselbe Endpunkt kommt dadurch auf dieselbe Stelle zurück, wo er war, als er den Bogen x bereits beschrieben hatte; und so hat man ein Gedächtnißhilfsmittel, durch welches man festhält, daß weder $Sin\,x$ noch $Cos\,x$ verändert werden, wenn x um $2n\pi$ vermehrt oder vermindert wird.

§. 206.

Die später (in der Anwendung der Analysis, in's Besondere der Integralrechnung auf die Geometrie) zu lösende Aufgabe der „Rektifikation der Kurven" (d. h. die Aufgabe: die Länge eines Stückes einer beliebig gegebenen krummen Linie, in die Längen solcher geraden Linien ausdrücken, welche die Endpunkte der ersteren bestimmen) ist nun aber durch das vorstehende für die Kreislinie, deren Radius 1 ist, bereits mit gelöst; denn es ist nun offenbar, wenn wir die Bezeichnung und die Sätze des vorhergehenden Kapitels und die Fig. 5. zu Hilfe nehmen:

1) Bog. $AE = Arc\,sin.\,AB = Arc\,cos.\,CB$;

2) Bog. $ED = Arc\,sin.\,1 = Arc\,cos.\,0 = \frac{1}{2}\pi$;

3) Bog. $EDA_2 = \pi - Arc\,sin.\,A_2B_2 = Arc\,cos.\,(-CB_2)$ *);

4) Bog. $EDF = \pi$;

5) Bog. $EDFA_3 = \pi + Arc\,sin.\,A_3B_2 = \pi + Arc\,cos.\,CB_2$;

6) Bog. $EDFD_1 = \frac{3}{2}\pi$;

7) Bog. $EDFD_1A_4 = 2\pi - Arc\,sin.\,A_4B_1 = 2\pi - Arc\,cos.\,CB_1$;

8) Bog. $EDFD_1E = 2\pi$.

Und da $Arc\,sin.\,x = Arc\,tg.\,\frac{x}{+\sqrt{1-x^2}}$ ist, so kann man $Arc\,sin.\,x$ entweder aus einer Tabelle entnehmen, oder direkt nach der (im §. 197.) gefundenen Gleichung

$$Arc\,tg.\,z = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \text{ in inf.}$$

berechnen, wobei wieder alle die Mittel angewandt werden müssen, die wir im vorigen Kapitel angedeutet haben und ähnliche, um

---

*) Es giebt keine negativen „Größen", also auch keine negativen „Linien". Die Gerade CB_2 wird daher nur durch eine absolute Zahl ausgedrückt. Die Form $-CB_2$ (d. h. die angezeigte, also gedachte, mithin wirkliche Subtraktion $0-CB_2$) haben wir unter dem Namen einer „negativen Zahl" in die „Rechnung" eingeführt; und $Arc\,cos.\,(-CB_2)$ ist der Werth des eindeutigen logarithmischen Ausdrucks $\frac{1}{i}\cdot L\left(-CB_2+\sqrt{1-(CB_2)^2}\cdot i\right)$, welcher umgeformt, und in der neuen Form „berechnet" werden kann.

die Berechnung bis zur gewünschten Annäherung möglichst schnell und bequem ausführen zu können.

Anmerkung. Wir bemerken hier noch ausdrücklich, daß die praktische Ausrechnung der Werthe gegebener Funktionen nur dem am besten gelingen kann, dem alle Mittel der Theorie zu Gebote stehen. Zu einer Tabellenberechnung ist namentlich die Lehre der endlichen Differenzen, welche im 8ten Theile d. W. entwickelt sich findet, unentbehrlich. Der Anfänger muß daher vor allen Dingen zunächst eine Kenntniß der gesammten Wissenschaft sich anzueignen streben; dann erst muß er Monographien studiren, in denen ausgezeichnete Männer die Verfahrungs-Arten beschrieben, deren sie sich bei ihrer praktischen Arbeit bedient haben. — In einem theoretischen Werke können deshalb nur bei den einzelnen Gelegenheiten Andeutungen gegeben werden, wie etwa der praktische Rechner diese Lehren zu seinem Nutzen verwenden könnte.

Machen wir übrigens jetzt von diesen geometrischen Resultaten noch einige Anwendungen.

§. 207.

In dem Anhange zum I. Theile d. W. haben wir eine Koordinaten-Theorie mitgetheilt, aus der wir hier besonders festhalten wollen:

1) Sind zwei unendliche gerade Linien OU und OV (Fig. 9.) als Koordinaten-Axen auf einander senkrecht gedacht, so heißen die, nie negativen Abstände der Punkte M, M_1, M_2, M_3, von diesen Axen, die Koordinaten dieser Punkte; sie werden auf eine bestimmte Längen-Einheit bezogen und als absolute (nie negative) Zahlen ausgedrückt, die ganz oder gebrochen sein können.

2) Es heißen dann Koordinaten-Werthe derselben Punkte, diejenigen Rechnungsformen, welche man erhält, wenn man diese eben erwähnten absoluten Zahlen z. B. y, z zu der Null addirt oder von der Null subtrahirt oder wenn man

die Null selber nimmt; — also wenn man die Rechnungs-formen $0+y$, $0-y$ und 0, desgleichen $0+z$, $0-z$ und 0 bildet (welche wiederum einfacher und zwar so: $+y$, $-y$, 0 oder $+z$, $-z$, 0 geschrieben werden, indem man die Null als Summand oder Minuend sich noch dazu denkt), je nachdem die Punkte selbst rechts oder links der Axe OV, und oberhalb oder unterhalb der Axe OU, oder in den Axen selber liegen. Diese Koordinaten-Werthe drücken nun nicht bloß die Abstände der gedachten Punkte von den Axen, sondern auch noch aus (durch ihr Vorzeichen), auf welcher Seite der Axen diese Abstände zu nehmen sind.

3) Es wird dann streng bewiesen, daß, wie auch die Axen liegen mögen, doch allemal jede mit den Axen OU oder OV parallele Gerade durch die Differenz der Koordinaten-Werthe ihrer Endpunkte (d. h. durch die Differenz dieser positiven, negativen oder Nullwerthe) ausgedrückt sich sieht.

Denkt man sich nun von einer gegebenen imaginären Zahl $p+q\cdot i$, die beiden stets von einander (durch den Faktor i) getrennt gehaltenen reellen Zahlen p und q als Koordinaten-Werthe, die sich auf die, auf einander senkrecht gedachten Axen OU und OV beziehen, so geben sie einen Punkt M, oder M_1, oder M_2, oder M_3 in der Ebene; und umgekehrt: hat man diesen Punkt in der Ebene, so kann man sich seine Koordinaten-Werthe p und q bilden und aus diesen die imaginäre Zahl $p+q\cdot i$ wieder zusammensetzen. — Dieser Punkt M, oder M_1, oder M_2, oder M_3 kann daher als der Repräsentant der imaginären Zahl $p+q\cdot i$ angesehen werden.

Zieht man nun von O aus nach diesem Punkte die Gerade OM, oder OM_1, oder OM_2, oder OM_3, und bezeichnet man die (nie negative) Länge derselben durch r, so hat man allemal

$$\text{I.} \qquad r = +\sqrt{p^2+q^2};$$

denn sie ist allemal die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten stets (positive oder) absolute Zahlen und durch

$+p$, $+q$ vorgestellt sind, wenn p und q positiv, dagegen durch $-p$ und $-q$, wenn p und q negativ sind (eben weil dann $-p$, $-q$ der absoluten Zahl gleich werden, welche die wirklichen Längen, — die nie negativ sein können, in so ferne es „negative Größen" überhaupt nicht giebt, — ausdrückt); dabei ist aber rechnungsmäßig $(-p)^2 = p^2$ und $(-q)^2 = q^2$.

Dieselbe Gerade r, von O aus nach dem Punkte M, M_1, M_2 oder M_3 hin in's Unendliche fortgehend gedacht, macht ferner mit der Axe OU, von O aus nach U hin in's Unendliche fortgehend gedacht, einen Winkel MOU, oder M_1OU, oder M_2OU, oder M_3OU, welcher im 1ten, oder 2ten, oder 4ten, oder 3ten Quadranten liegt (in den beiden letztern Fällen also ein erhabener ist). Wird nun dieser Winkel durch φ bezeichnet, so findet man, daß, wie auch der Repräsentant liegen mag, doch allemal

$$\text{II.} \quad Cos\,\varphi = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad \text{III.} \quad Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$$

sein werde, wo r positiv ist, folglich $Cos\,\varphi$ mit p zugleich, und $Sin\,\varphi$ mit q zugleich, positiv oder negativ sein wird.

Aber eben deshalb wird nun auch

$$p = r \cdot Cos\,\varphi \quad \text{und} \quad q = r \cdot Sin\,\varphi, \quad \text{also}$$

$$\text{IV.} \quad p + q \cdot i = r(Cos\,\varphi + i \cdot Sin\,\varphi) = r \cdot e^{\varphi \cdot i};$$

und man hat also dadurch dieselbe Aufgabe (mittelst geometrischer Versinnlichung) gelöst, welches bereits im §. 170. rein analytisch gelöst sich findet, nämlich die Summe $p+q \cdot i$ in ein Produkt $r \cdot e^{\varphi \cdot i}$ verwandelt; die Entfernung OM, OM_1, OM_2 oder OM_3 ist also jetzt dasselbe r, welches wir dort den Modul der imaginären Zahl genannt haben, und der Winkel φ (im Bogen ausgedrückt, für den Radius 1) ist das, was wir dort den zu der imaginären Zahl gehörigen Bogen nannten.

Da Kosinus und Sinus sich nicht ändern, wenn man den Bogen um eine beliebige gerade Anzahl von π vermehrt oder vermindert, so kann man in der Gleichung IV. statt φ auch

$2n\pi+\varphi$ schreiben, und unter n eine positive oder negative ganze Zahl oder die Null verstehen. Auch dies läßt sich geometrisch versinnlichen, wenn man einen beweglichen Schenkel von OU aus sich erst $\pm n$ male ganz herumgedreht sich denkt, nach der Richtung OM hin, oder in der entgegengesetzten Richtung, je nachdem n positiv, oder n negativ (also $-n$ positiv) ist; — und dann, nachdem der bewegliche Schenkel seine $\pm n$ ganzen Umläufe zurückgelegt hat, und wieder mit OU zusammengefallen ist, von OU erst die hohlen oder erhabenen Winkel φ bis zur wahren Lage von r, beschrieben sich denkt.

Schreibt man aber in IV. $-2\pi+\varphi$ d. h. $-(2\pi-\varphi)$ statt φ, so hat man etwas negatives statt φ gesetzt, und wenn φ die erhabenen Winkel M_3OU oder M_2OU ausgedrückt hatte, so hat man jetzt die hohlen Winkel M_3OU oder M_2OU, (im Bogen für den Radius 1) aber negativ genommen (d. h. von 0 subtrahirt) dafür gesetzt.

Es gilt also die Gleichung IV. auch noch, wenn, im Falle q (also auch $Sin\varphi$) negativ sein sollte, statt φ der, dem Repräsentanten M_3 oder M_2 zugehörige hohle (also der von OU aus von dem beweglichen Schenkel in der entgegengesetzten Richtung beschriebene) Winkel, aber negativ genommen (d. h. von 0 subtrahirt) gesetzt wird; während man nun auch zu diesem wieder $2n\pi$ addiren kann, (wo n entweder 0 oder jede positive oder negative ganze Zahl bedeutet), um neue Werthe von φ zu haben, für welche die Gleichung IV. immer noch richtig verbleibt.

In der analytischen Geometrie heißen p und q die rechtwinkligen Koordinaten-Werthe, r und φ dagegen die Polar-Koordinaten, so wie O der Pol derselben.

Anmerkung. Alles dieses stimmt genau mit dem überein, was wir im §. 170. gefunden haben. — Nachdem wir aber die imaginäre Zahl durch die bestimmte Lage eines Punktes versinnlicht haben, lassen sich auch alle Aufgaben des §. 171. durch

bloße Zeichnung lösen (also graphisch), welche dort analytisch gelöst sich finden; nur müßte man bei einer derselben voraussetzen, daß der Zeichner die Dreitheilung eines Bogens durch bloße Versuche bewirke, da sie sich durch eine folgerechte geometrische Konstruktion nicht bewirken läßt.

Da jedoch die Zeichnung immer nur ein sehr dürftiger Nothbehelf für die Rechnung ist, so begnügen wir uns mit dieser bloßen Andeutung, ohne je die Absicht zu haben, davon Gebrauch zu machen.

§. 208.

Diese geometrische Versinnlichung einer imaginären Zahl läßt aber noch mehrere andere, interessantere Folgerungen zu.

1) Ist q eine Funktion von p, welche zu den stetig sich ändernden reellen Werthen von p, reelle Werthe von q dazu liefert, so stellt der imaginäre Ausdruck eine Reihe von Punkten vor, die stetig neben einander liegen, also eine (gerade oder) krumme Linie bilden. Diese Kurve ist also dann der Repräsentant des Ganges der imaginären Werthe $p+q \cdot i$, welche zu allen reellen Werthen von p sich ergeben.

Dasselbe gilt auch, wenn p als eine Funktion von q angesehen wird; und dasselbe gilt noch, wenn p und q als Funktionen eines dritten Veränderlichen ψ angesehen werden, welche zu den stetig auf einander folgenden reellen Werthen von ψ, reelle Werthe von p und q liefern.

3) Ist y eine Funktion von x (d. h. hat man eine Gleichung zwischen x und y) und sieht man x und y, so lange sie beide reell sind, als rechtwinklige Koordinaten-Werthe eines Punktes an, so liefert, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, diese Gleichung zwischen x und y allemal eine (gerade oder) krumme Linie. — Denkt man sich aber die zu den reellen Werthen von x, sich ergebenden imaginären Werthe von y nach §. 207. durch Punkte repräsentirt, so bilden diese letzteren abermals eine (gerade oder) krumme Linie. — Beide Linien sind

jedoch unter ganz verschiedenen Voraussetzungen gebildet und müssen deshalb stets von einander getrennt gehalten werden.

3) Sind endlich p und q ganz unabhängig von einander, so sind alle Werthe von $p+q\cdot i$ durch alle Punkte der Ebene repräsentirt, in welcher die Axen OU und OV gedacht worden sind. Verwandelt man aber $p+q\cdot i$ in $r\cdot e^{\phi\cdot i}$, so braucht man dem φ bloß alle Werthe zu geben, welche zwischen 0 und 2π (oder zwischen $-\pi$ und $+\pi$) liegen, und für jeden Werth von φ noch statt r alle positiven Werthe von 0 bis ∞ zu setzen, und man bekommt alle Punkte in der Ebene, also alle Werthe von $p+q\cdot i$.

4) Sind (ohne Figur) M_1 und M_2 die Repräsentanten zweier imaginären Ausdrücke $p_1+q_1\cdot i$ und $p_2+q_2\cdot i$, und ist M_0 der Repräsentant der Summe $p_0+q_0\cdot i$ derselben, also des imaginären Ausdrucks $(p_1+p_2)+(q_1+q_2)\cdot i$, — so bilden die vier Punkte O, M_1, M_2 und M_0 allemal ein Parallelogram, und die Model $OM_0=r_0$, $OM_1=r_1$, und $OM_2\,(=M_1M_0)=r_2$ bilden ein Dreieck, so daß also der Model r_0 der Summe $(p_1+p_2)+(q_1+q_2)\cdot i$ allemal kleiner ist als die Summe der Model der einzelnen Summanden, dagegen größer als die (positive) Differenz der letzteren.

Denn, legt man durch die Punkte M_1, M_2 und M_0, in welcher der vier, durch die Axen OU und OV gebildeten Regionen jeder derselben auch liegen mag, Parallelen mit diesen (auf einander senkrecht stehenden Axen), so entstehen lauter rechtwinklige Dreiecke. Betrachtet man nun zweie davon, welche OM_1 und M_2M_0 zur Hypothenuse haben, nämlich OAM_1 und M_2BM_0 (die bei A und bei B rechtwinklig sind), so werden (nach §. 207. Nr. 3.) die mit OU parallelen Katheten OA und M_0B durch die Differenzen $\pm(p_1-0)$ und $\pm[(p_1+p_2)-p_1]$, dagegen die mit der Axe OV parallelen Katheten AM_1 und BM_2 durch die Differenzen $\pm(q_1-0)$ und $\pm[(q_1+q_2)-q_1]$ ausgedrückt sein, wo dasjenige Vorzeichen genommen werden muß, welches diese Ausdrücke positiv macht, da es negative

Größen, also negative Katheten nicht giebt. Diese Katheten sind daher bezüglich einander gleich, die rechtwinkligen Dreiecke selbst also einander kongruent; folglich sind auch die Hypothenusen OM_1 und M_2M_0 einander gleich. — Ganz genau eben so folgt aber auch die Gleichheit der Hypothenusen OM_2 und M_1M_0 zweier anderen der entstandenen rechtwinkligen Dreiecke. — Also hat das Viereck $OM_1M_2M_0$ zwei Paare einander gegenüber liegender gleicher Seiten; folglich ist dasselbe ein Parallelogram.

5) Der Winkel M_1OM_0 wird dabei desto kleiner sein, je kleiner der Quotient $\frac{r_2}{r_1}$ ist; ja er wird unendlich klein werden, wenn dieser Quotient unendlich klein sein sollte, — weil im Dreieck OM_1M_0 (oder OM_2M_0) die Sinus der Winkel sich zu einander verhalten, wie die gegenüber liegenden Seiten, d. h. weil

$$Sin\, M_1OM_0 : Sin\, M_2OM_0 = r_2 : r_1.$$

6) Es ist daher der Model r_0 der Summe $p_0+q_0\cdot i$ von m imaginären Summanden $p_1+q_1\cdot i$, $p_2+q_2\cdot i$, $\cdots$ $p_m+q_m\cdot i$, allemal kleiner als die Summe $r_1+r_2+r_3+\cdots+r_m$ der m Model dieser letzteren. — Und wenn die Punkte M_0 und M_1 die Repräsentanten bezüglich der Summe $p_0+q_0\cdot i$ und des erstern Summanden $p_1+q_1\cdot i$ sind, so ist der Winkel M_1OM_0 desto kleiner, je größer der Model r_1 gegen die Summe $r_2+r_3+\cdots+r_m$ der übrigen Model ist; ja dieser Winkel M_0OM_1 ist unendlich klein, wenn der Quotient $\frac{r_2+r_3+\cdots+r_m}{r_1}$ unendlich klein werden sollte.

Denn, verwandelt man die Summe der m—1 imaginären Zahlen $p_2+q_2\cdot i$, $p_3+q_3\cdot i$, $\cdots$ $p_m+q_m\cdot i$ in die Form $R\cdot e^{\psi\cdot i}$, so ist (nach Nr. 4.) der Model $R < r_2+r_3+\cdots+r_m$; also ist dann um so mehr $\frac{R}{r_1}$ unendlich klein; also geht die Behauptung sogleich aus Nr. 5. unzweifelhaft hervor.

Zehntes Kapitel.

Von den künstlichen Potenzen und den künstlichen Logarithmen. Von den allgemeinen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

§. 209. Erklärung.

Unter der künstlichen Potenz a^x, bei welcher der Dignand a beliebig positiv vorausgesetzt, der Exponent x aber ganz willkürlich, reell oder imaginär, gedacht wird, verstehen wir von nun an die durch die natürliche Potenz $e^{x \cdot La}$ vorgestellte unendliche Reihe, während La den Neper'schen Logarithmen der positiven Zahl a bedeutet. — Diese Definition ist ausgesprochen in der Gleichung

$$(\odot) \cdots \quad a^x = e^{x \cdot La} = S\left[\frac{x^b \cdot (La)^b}{b!}\right]$$

und nach ihr ist die künstliche Potenz a^x stets nur eindeutig, mag x ganz oder gebrochen, positiv oder negativ, reell oder imaginär sein.

Diese Definition ist gerechtfertigt; denn ist x positiv oder negativ ganz, in welchem Falle dasselbe Zeichen a^x (unter dem Namen der Differenz-Potenz) schon früher eine Bedeutung erhalten hat, so ist die jetzige neue Bedeutung (nach §. 141. oder §. 181. ⊙) mit der alten zusammenfallend. Und wird $a = e$, in welchem Falle a^x in e^x übergeht, also (auch während x ganz allgemein gedacht wird) schon (unter dem Namen der natürlichen Potenz) früher eine Bedeutung erhalten hat, so ist doch

die jetzige neue Bedeutung auch von dieser früheren nicht verschieden, weil dann $\mathcal{L}$a in $\mathcal{L}$e übergeht, also $= 1$ wird.

Die natürliche Potenz ist ein besonderer Fall der künstlichen.

§. 210.

Sind a und b beliebig positiv, dagegen x und z ganz allgemein (also auch reell oder imaginär), so gelten allemal die Gleichungen

I. $a^{x+z} = a^x \cdot a^z$; II. $a^{x-z} = \dfrac{a^x}{a^z}$;

III. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$; IV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

und V. $(a^x)^m = a^{mx}$,

wenn nur m eine Differenz ganzer Zahlen ist.

Denn es ist (nach §. 209. ☉.)

$$a^{x+z} = e^{(x+z)\mathcal{L}a} = e^{x\cdot\mathcal{L}a+z\cdot\mathcal{L}a} = e^{x\cdot\mathcal{L}a}\cdot e^{z\cdot\mathcal{L}a} = a^x \cdot a^z,$$

wodurch die I. erwiesen ist. — Eben so hat man auch

$$(ab)^x = e^{x\cdot\mathcal{L}(ab)} = e^{x(\mathcal{L}a+\mathcal{L}b)} = e^{x\cdot\mathcal{L}a}\cdot e^{x\cdot\mathcal{L}b} = a^x \cdot b^x,$$

wodurch die III. außer Zweifel gestellt sich findet.

Setzt man aber in der I. $x-z$ statt x, so folgt die II.; und wird in der III. $\dfrac{a}{b}$ statt a gesetzt, so folgt die IV.

Endlich ist

$(a^x)^m = (e^{x\cdot\mathcal{L}a})^m = e^{mx\cdot\mathcal{L}a}$ (nach §. 143. III., wenn m eine Differenz ganzer Zahlen ist), und diese natürliche Potenz ist wieder $= a^{mx}$, wodurch die V. erwiesen.

Aus der V. geht aber noch hervor, wenn man m positiv ganz vorausgesetzt und $\dfrac{1}{m}$ statt x schreibt

VI. $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^1$, d. h. $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$,

wenn unter $\sqrt[m]{a}$ die im I. Th. d. W. definirte (eindeutige)

absolute Wurzel aus der stets positiv gedachten Zahl a verstanden wird, während $a^{\frac{1}{m}}$ (der Definition des §. 209. zufolge) auch nur eindeutig ist.

Ferner ist, wenn ν eine positive ganze Zahl vorstellt, μ dagegen positiv oder negativ ganz ist (nach V.)

$$\text{VII.}\quad \left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = a^{\mu} \quad \text{d. h.} \quad a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(a^{\mu})},$$

wenn nur a positiv und die Wurzel die, in den Elementen definirte eindeutige absolute Wurzel ist, welche allemal einer positiven Zahl gleich sein muß.

Man hat endlich (aus VI. und §. 209. ⊙)

$$\text{VIII.}\quad \sqrt[m]{a} = e^{\frac{1}{m}\cdot \mathcal{L}a} = 1 + \frac{1}{m}\cdot \mathcal{L}a + \frac{1}{2!\,m^2}\cdot(\mathcal{L}a)^2 + \frac{1}{3!\,m^3}\cdot(\mathcal{L}a)^3 + \text{in inf.},$$

aus welcher Reihe die (eindeutige, absolute) $\sqrt[m]{}$ näherungsweise berechnet werden kann, wenn der Neper'sche Logarithme von a bekannt ist. — Für größere Werthe von m ist diese Reihe oft sehr schnell konvergent.

§. 211. Erklärung.

Das Zeichen $log^{p}a$ nennen wir den künstlichen Logarithmen für die stets positiv gedachte Basis p, und wir bezeichnen damit jeden Ausdruck z, welcher die Eigenschaft hat, daß er $p^z = a$, d. h. $e^{z\cdot \mathcal{L}p} = a$ macht.

Soll aber $e^{z\cdot \mathcal{L}p} = a$ werden, so kann $z\cdot \mathcal{L}p$ alle Werthe des $log\,a$ haben (wo $log\,a$, wie immer, den natürlichen Logarithmen der (reellen oder imaginären) Zahl a vorstellt); also hat man

$$z\cdot \mathcal{L}p = log\,a \quad \text{und} \quad z = \frac{log\,a}{\mathcal{L}p};$$

d. h. der künstliche Logarithme von a (für die positive Basis p)

hat allemal unendlich viele Werthe, welche alle erhalten werden, wenn man alle unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen von a, durch den Neper'schen Logarithmen der Basis p (des künstlichen Logarithmen) dividirt. Dies drückt die Gleichung

$$\text{I.} \qquad log^{p}\,a = \frac{log\,a}{Lp} = \frac{1}{Lp} \cdot log\,a$$

vollständig aus.

Ist a ebenfalls positiv, so hat man (nach §. 176.) $log\,a = La + 2n\pi \cdot i$, und dann folgt (aus I.)

$$\text{II.} \qquad log^{p}\,a = \frac{1}{Lp} \cdot (La + 2n\pi \cdot i),$$

wo a positiv ist, wie p, während n sowohl 0 als auch jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellt.

In diesem Falle, wo der Logarithmand a positiv ist, hat der (unendlich vieldeutige) künstliche Logarithme $log^{p}\,a$ (für $n = 0$) einen reellen Werth; diesen bezeichnen wir durch $L^{p}a$ und nennen ihn den tabellarischen Logarithmen der (positiven) Zahl a (für die positive Basis p). — Der tabellarische Logarithme ist nur eindeutig, setzt aber einen positiven Logarithmanden, eben so wie eine positive Basis unabweislich voraus.

So wie der natürliche Logarithme ein besonderer Fall des künstlichen ist, in welchem $p = e$, so ist auch der Neper'sche Logarithme ein besonderer Fall des tabellarischen.

§. 212.

Dividirt man die Formeln des §. 173. für Neper'sche Logarithmen durch Lp oder multiplicirt man sie mit $\frac{1}{Lp} = M$, welchen Werth man den Modul der tabellarischen Logarithmen nennt, so erhält man die analogen Formeln für alle tabellarischen Logarithmen, welche eine und dieselbe Basis p haben (oder, welche, wie man auch sagt, zu einem und demselben Logarithmen-System gehören), nämlich:

$$\text{I.}\quad L^p(ab) = L^p a + L^p b;\qquad \text{II.}\quad L^p\left(\frac{a}{b}\right) = L^p a - L^p b;$$

$$\text{III.}\quad L^p(a^b) = b \cdot L^p a \quad \text{und} \quad \text{IV.}\quad L^p(\sqrt[m]{a}) = \frac{L^p a}{m}.$$

Diese Formeln setzen aber lauter positive Logarithmanden voraus, wie eine positive Basis p; weshalb in III. auch a^b positiv sein muß, wie in IV. die $\sqrt[m]{a}$ eindeutig und positiv gedacht ist.

§. 213.

Wollte man eben so die Formeln der §§. 179. 180. für natürliche Logarithmen durch $\mathcal{L}p$ dividiren oder mit dem Modul $M = \frac{1}{\mathcal{L}p}$ multipliciren, so würde man analoge Gleichungen zwischen den (unendlich vieldeutigen) künstlichen Logarithmen erhalten, wie sie hier für die (eindeutigen) tabellarischen Logarithmen hervorgegangen sind.

Auch die Gleichungen der §§. 181.—183., durch welche die natürlichen und die Neper'schen Logarithmen in unendliche Reihen ausgedrückt sind, gehen in analoge Reihen-Entwickelungen für die künstlichen und tabellarischen Logarithmen über, wenn man erstere durch $\mathcal{L}p$ dividirt oder mit dem Modul $M = \frac{1}{\mathcal{L}p}$ multiplicirt.

Auch was im §. 184. über die Auffindung von Neper'schen Zwischen-Logarithmen gesagt sich findet, geht aus diesen Entwickelungen für alle tabellarischen Logarithmen als gültig hervor. — Denn man darf nur in der Gleichung X. daselbst, Zähler und Nenner zur Linken durch $\mathcal{L}p$ dividiren, und es treten sogleich überall die tabellarischen Logarithmen für die Basis p, an die Stelle der Neper'schen.

§. 214.

Unter den künstlichen oder vielmehr unter den tabellarischen Logarithmen heben sich diejenigen hervor, deren Basis $p = 10$

ist; sie werden nach ihrem ersten Berechner Brigg, die Briggschen Logarithmen genannt, auch die vulgarischen oder gemeinen. Sie haben noch folgende besondere Eigenschaften:

1) Es ist $L^{10}(10^m) = m$; d. h. der Brigg'sche Logarithme einer m ziffrigen Zahl (unter Voraussetzung des dekadischen Zahlen-Systems) liegt allemal zwischen den beiden ganzen Zahlen m—1 und m; er ist also = m—1 und noch einem ächten Bruche, welcher letztere gewöhnlich als ein Decimalbruch gedacht wird, so daß seine Decimalstellen die Decimalen des Brigg'schen Logarithmen oder die Mantissa, die m—1 Ganze aber seine Kennziffer genannt werden.

2) Die Brigg'schen Logarithmen irgend einer ganzen Zahl z. B. der Zahl 246859 und aller aus denselben Ziffern bestehenden Decimalbrüche z. B. der Brüche 24685,9 oder 2468,59 oder 246,859 oder 24,6859 oder 2,46859 sind in ihren Decimalen nicht von einander verschieden, sondern nur in ihrer Kennziffer, welche letztere zuerst 5, dann 4, 3, 2, 1 und 0 ist.

Denn es ist z. B.

$$L^{10}(24{,}6859) = L^{10}\frac{246859}{10000} = L^{10}(246859) - L^{10}(10^4)$$

während $L^{10}(10^4) = 4$ ist, dieser Subtrahend also nur die Kennziffer berührt, die Decimalen aber nicht.

3) Erlaubt man sich, negative Kennziffern (negative Ganze) einzuführen, zu welchen dann die Decimalen des Logarithmen noch addirt werden, so gilt diese nächst vorstehende Behauptung auch noch für die Logarithmen ächter Decimalbrüche, welche aus denselben Ziffern bestehen; denn es ist z. B.

$$L^{10}0{,}00246859 = L^{10}\frac{246859}{10^8} = L^{10}(246859) - L^{10}(10^8),$$

während der Subtrahend = 8 ist, und die Kennziffer 5 des Minuenden, in die neue Kennziffer (—3) verwandelt, zu welcher aber die Decimalen noch addirt sind.

In diesem Falle vermehrt man gewöhnlich den Brigg'schen Logarithmen um 10, 20, 30, ꝛc. Ganze, bis die Kennziffer wieder positiv wird, und bringt später diese zuviel genommenen Ganzen wieder in Abrechnung.

§. 215.

Man bedient sich aber einer Logarithmentafel, in welcher die für eine und dieselbe positive Basis p (= e oder = 10, oder irgend einer andern positiven Zahl gleich) berechneten d. h. in Decimalbruchform ausgedrückten Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis z. B. 100000000 leicht zu finden sind, zur Ausrechnung solcher positiven Ausdrücke, deren Logarithmen sich leichter ausrechnen lassen, als sie selber; z. B. der künstlichen Potenzen, absoluten Wurzeln, der Produkte und der Quotienten und der aus den genannten ohne Addition oder Subtraktion zusammengesetzteren Ausdrücke. Da nämlich die Tabelle zu jedem gefundenen Logarithmen den Logarithmanden dazu liefert, so hat man den Ausdruck selbst, sobald man seinen Logarithmen gefunden hat, ohne weiteres.

Soll z. B. $A = \frac{\sqrt[3]{b \cdot c^{\frac{4}{5}}}}{\sqrt{(d-b)(d+b)}}$ ausgerechnet werden, unter der Voraussetzung, daß b, c, d und d—b positiv sind, so findet sich zunächst

$$1) \quad log\, A = log\left(\sqrt[3]{b \cdot c^{\frac{4}{5}}}\right) - log \sqrt{(d-b)(d+b)};$$

$$2) \quad log\left(\sqrt[3]{b \cdot c^{\frac{4}{5}}}\right) = log \sqrt[3]{b} + log\, c^{\frac{4}{5}} = \frac{log\, b}{3} + \frac{4 \cdot log\, c}{5};$$

$$3) \quad log \sqrt{(d-b)(d+b)} = \frac{log\,(d-b)(d+b)}{2}$$

$$= \frac{log\,(d-b) + log\,(d+b)}{2};$$

also

$$4) \quad log\, A = \frac{log\, b}{3} + \frac{4 \cdot log\, c}{5} - \frac{log\,(d-b) + log\,(d+b)}{2},$$

wo wir das gewöhnliche *log* Zeichen genommen haben, und darunter irgend einen tabellarischen Logarithmen für irgend eine positive Basis p, verstehen. Man rechnet also zuerst nach NNr. 2. und 3. die einzelnen Theile, dann nach Nr. 4. den Logarithmen des ganzen Ausdrucks A aus, und nimmt dann aus der Tabelle den Logarithmanden dazu, so hat man den Ausdruck A selbst in Form eines Decimalbruches oder einer ganzen Zahl.

Könnte man voraussehen, daß der Ausdruck A negativ wird, z. B. wenn man hätte

$$A = \frac{(d-b)\cdot\sqrt[3]{a^2c}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

und d—b negativ wäre, so würde man ein (—) Zeichen vorsetzen, ihn dadurch in einen positiven Ausdruck, nämlich in

$$B = \frac{(b-d)\cdot\sqrt[3]{a^2c}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

verwandeln, letzteren logarithmisch berechnen, und zuletzt $A = -B$ nehmen.

Würde der Ausdruck $A = \frac{\sqrt[3]{b\cdot c^{\frac{4}{5}}}}{\sqrt{(d-b)(d+b)}}$, eben weil d—b negativ ist, imaginär, so würde man ihn vorher in

$-i\cdot\frac{\sqrt[3]{b\cdot c^{\frac{4}{5}}}}{\sqrt{(b-d)(b+d)}}$ umformen, dann aber den (positiven) Faktor von —i logarithmisch berechnen, und so auch den imaginären Ausdruck A selbst mit Hilfe der Logarithmentafel berechnet haben.

§. 216. Erklärung.

Unter der allgemeinen Potenz a^x, wo a und x alle beide ganz allgemein, also eben so gut reell wie imaginär gedacht sind, — verstehen wir alle die Werthe, welche die natürliche Potenz $e^{x\cdot \log a}$ d. h. die unendliche Reihe

$1+x\cdot log\,a+\frac{x^2\cdot(log\,a)^2}{2!}+\frac{x^3\cdot(log\,a)^3}{3!}+$ in inf. annimmt, wenn statt $log\,a$ nach und nach alle unendlich vielen Werthe des natürlichen Logarithmen von a gesetzt werden. — Diese Definition ist also ausgesprochen in der Gleichung

$$(\text{☾})\cdots \qquad a^x = e^{x\cdot log\,a} = S\left[\frac{x^b\cdot(log\,a)^b}{b!}\right].$$

Diese Definition ist gerechtfertigt; denn wir haben bereits im §. 143. und §. 181. ⊙ bewiesen, daß die unendlich vielen Werthe von $e^{x\cdot log\,a}$ alle einander und der Bedeutung der Differenz-Potenz a^x gleich werden, so oft x eine Differenz ganzer Zahlen, also positiv oder negativ ganz ist. Die jetzige neue Bedeutung des Zeichens a^x fällt also, so oft x positiv oder negativ ganz ist, mit jener früheren, d. h. mit dem Produkt $a\cdot a\cdot a\cdots$ oder mit dem Quotienten $\frac{1}{a\cdot a\cdot a\cdots}$ zusammen. — Ferner haben wir (im §. 209.) bereits die Bedeutung von a^x festgestellt, wenn x ganz allgemein, aber a positiv ist. Die jetzige neue Bedeutung von a^x enthält jene aber als einen ihrer Werthe in sich, weil dann einer der Werthe von $log\,a$ der Neper'sche Logarithme La ist. Da endlich in der künstlichen Potenz a^x des §. 209. auch die natürliche Potenz e^x (für $a=e$) als ein besonderer Fall enthalten ist, so steckt auch die natürliche (eindeutige) Potenz e^x in der jetzigen allgemeinen Potenz a^x als einer ihrer Werthe, wenn $a=e$ sein sollte.

Nach dieser Definition der allgemeinen Potenz a^x, hat auch, wenn $a=e$ gedacht wird, die allgemeine Potenz e^x unendlich viele Werthe, nämlich alle Werthe der unendlichen Reihe

$$S\left[\frac{x^b\cdot(log\,e)^b}{b!}\right] \quad \text{oder} \quad S\left[\frac{x^b\cdot(1+2n\pi\cdot i)^b}{b!}\right],$$

von welchen einer (für $n=0$) die bisher durch e^x bezeichnete natürliche Potenz ist. — Um keine Verwirrung der Begriffe zu veranlassen, wollen wir daher hier noch festsetzen,

daß wir das Zeichen e^z auch in der Folge immer nur als eindeutige natürliche Potenz gebrauchen werden, d. h. als Ausdruck für die unendliche Reihe $S\left[\frac{z^b}{b!}\right]$ und deshalb, wenn einmal e^z als allgemeine Potenz vorkommen sollte, dies jedesmal ausdrücklich bemerken und entschieden mit Worten hervorheben werden, wenn wir nicht vorziehen, lieber sogleich die natürliche Potenz $e^{z+z \cdot log 1}$ dafür zu schreiben, welche alle Werthe der gedachten allgemeinen Potenz ausdrückt, wenn statt $log\,1$ alle seine Werthe $2n\pi \cdot i$ gesetzt werden.

Dagegen werden wir von nun an, so lange $a=e$ nicht ist, unter dem Zeichen a^x stets die allgemeine Potenz verstehen, und nie die (eindeutige) künstliche, auch wenn a positiv sein sollte, wenn wir nicht ausdrücklich und entschieden mit Worten hinzufügen, daß wir dasmal eine Ausnahme machen wollen.

Durch Festhaltung dieser Annahmen hoffen wir unsern Leser vor jeder möglichen Verwirrung der Begriffe gesichert zu sehen.

§. 217.

Die nächste Aufgabe ist nun: Alle Werthe von a^x „auszurechnen", d. h. auf die Form $P+Q \cdot i$ zu bringen, wenn a und x beliebig reell oder imaginär gegeben sind, etwa

$$a=p+q \cdot i \quad \text{und} \quad x=\alpha+\beta \cdot i.$$

Also, man soll alle Werthe der allgemeinen Potenz $(p+q \cdot i)^{\alpha+\beta \cdot i}$ ausrechnen.

Es ist (nach §. 175.)

$$log(p+q \cdot i) = L\,r+(2n\pi+\varphi) \cdot i,$$

also (nach ☾)

$$(p+q \cdot i)^{\alpha+\beta \cdot i} = e^{(\alpha+\beta \cdot i) \cdot log(p+q \cdot i)} = e^{(\alpha+\beta \cdot i)[L\,r+(2n\pi+\varphi) \cdot i]},$$

wenn

$$\text{I. } r=+\sqrt{p^2+q^2}, \quad \text{II. } Cos\,\varphi=\frac{p}{r}, \quad \text{III. } Sin\,\varphi=\frac{q}{r}$$

und φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommen wird, während n sowohl 0, als auch jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt. — Verwandelt man nun den Exponenten der letztern natürlichen Potenz in

$$[\alpha \cdot Lr - \beta(2n\pi+\varphi)] + [\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi+\varphi)] \cdot i,$$

so verwandelt sich die gedachte Potenz selbst in

$$e^{\alpha \cdot Lr + \beta(2n\pi+\varphi)} \times e^{[\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi+\varphi)] \cdot i}$$

und man findet daher in der ausgerechneten Form

$$\text{IV.} \quad (p+q\cdot i)^{\alpha+\beta\cdot i} = e^{\alpha \cdot Lr + \beta(2n\pi+\varphi)}$$
$$\times Cos([\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi+\varphi)] + i \cdot Sin[\beta \cdot Lr + \alpha(2n\pi+\varphi)]),$$

wenn r, φ und n die in I.—III. und den darauf folgenden Zeilen festgesetzte Bedeutung haben. — Damit ist die Aufgabe gelöst.

§. 218.

Dieses Resultat IV. läßt sehen:

1) Ist der Exponent x der allgemeinen Potenz a^x imaginär, ist also β nicht Null, so hat (weil statt n sowohl 0, als auch jede positive und negative ganze Zahl gesetzt werden muß) bereits der erste (reelle) Faktor (in IV. zur Rechten) unendlich viele von einander wirklich verschiedener Werthe, die zwischen $+\frac{1}{\infty}$ und $+\infty$ liegen. Die allgemeine Potenz a^x hat also wirklich unendlich viele Werthe, von denen keiner dem andern gleich ist, so oft x imaginär ist.

2) Ist x reell und $=\alpha$, so hat man $\beta=0$ und die IV. geht nun über in

$$\text{V.} \quad (p+q\cdot i)^{\alpha} = e^{\alpha \cdot Lr}[Cos\,\alpha(2n\pi+\varphi) + i \cdot Sin\,\alpha(2n\pi+\varphi)],$$

während der erstere (reelle) Faktor $e^{\alpha \cdot Lr}$ der Werth der künstlichen Potenz r^{α} ist (nach §. 209.).

Ist nun α positiv oder negativ ganz und $=m$, so ist $\alpha(2n\pi) = 2mn\pi$ eine positive oder negative gerade Anzahl

von π, oder Null, und der Kosinus und der Sinus von $\alpha(2n\pi+\varphi)$ d. h. von $2mn\pi+m\varphi$ ist daher von bezüglich dem Kosinus und Sinus von $m\varphi$ durchaus nicht verschieden, welche ganze positive oder negative Zahl auch statt n gesetzt werden mag. Alle Werthe der allgemeinen Potenz $(p+q\cdot i)^m$ werden daher einander und dem Werthe $r^m\cdot[Cos(m\varphi)+i\cdot Sin(m\varphi)]$ gleich, was mit §. 143., §. 181. ⊙ und §. 171. vollkommen übereinstimmt.

Es ist also

V. 1. $\quad (p+q\cdot i)^m = r^m[Cos(m\varphi)+i\cdot Sin(m\varphi)]$,

wenn r und φ die in I.—III. festgesetzte Bedeutung haben und m positiv oder negativ ganz ist *).

Ist aber α positiv oder negativ gebrochen und $=\frac{\mu}{\nu}$, wo wir ν positiv ganz, μ dagegen positiv oder negativ ganz voraussetzen, auch voraussetzen, daß μ und ν keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, also daß die gebrochene Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, — so erhalten wir aus V. jetzt

$$\text{VI.} \quad (p+q\cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}} = e^{\frac{\mu}{\nu}\cdot Lr}\cdot\left[Cos\left(\frac{2\mu n\pi}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}\varphi\right)\right.$$
$$\left. +i\cdot Sin\left(\frac{2\mu n\pi}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}\varphi\right)\right],$$

wo $e^{\frac{\mu}{\nu}\cdot Lr}$ der Werth der künstlichen Potenz $r^{\frac{\mu}{\nu}}$ ist.

---

*) Daß

$$(Cos\,\psi+i\cdot Sin\,\psi)^m = Cos(m\psi)+i\cdot Sin(m\psi)$$

ist, für jeden Werth von ψ, wenn nur m positiv oder negativ ganz vorausgesetzt wird, weiß man auch daraus, daß der Ausdruck links, $=(e^{\psi\cdot i})^m$, der zur Rechten aber, $=e^{m\psi\cdot i}$ und daß (nach §. 143. III.)

$$(e^{\psi\cdot i})^m = e^{m\psi\cdot i}$$

ist, so oft m eine Differenz ganzer Zahlen bedeutet.

§. 219.

A. Diese (mehrdeutige) allgemeine Potenz, deren Exponent eine (positive oder negative) gebrochene Zahl ist, wird auch häufig die gebrochene Potenz genannt*). — Sie hat allemal nicht mehr und nicht weniger als ν von einander wirklich verschiedener Werthe, welche alle erhalten werden, wenn man in VI. dem n nicht mehr als irgend ν nächst auf einander folgender seiner Werthe giebt.

Setzen wir nämlich in VI. zur Rechten statt n die ν Werthe h, h+1, h+2, h+3, ⋯ h+ν−1, wo h irgend eine bestimmte positive oder negative ganze Zahl oder die Null vorstellen mag. Diese Zahl h ist entweder ein Vielfaches von ν, etwa $\varkappa\nu$ (wo $\varkappa$ irgend eine positive oder negative ganze Zahl oder die Null bedeutet), oder sie ist von der Form $\varkappa\nu+\varkappa'$, wo $\varkappa'<\nu$ ist, aber positiv ganz. Bezeichnen wir nun noch durch ν' alle ν Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ ν−1, so sind die ν Werthe h, h+1, h+2, ⋯ h+ν−1, welche wir statt n setzen wollen, ausgedrückt durch $\varkappa\nu+\varkappa'+\nu'$, wenn man nur, im Falle $h=\varkappa\nu$, unter $\varkappa'$ die Null versteht, so daß $\varkappa$, so wie $\varkappa'$ entweder die Null oder bestimmte, von einander unabhängige, ganze Zahlen vorstellen, und zwar $\varkappa'$ eine positive, $\varkappa$ dagegen eine positive oder negative, — während ν' die ν verschiedenen Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ ν−1 vertritt.

---

*) Man kann natürlich die Werthe der gebrochenen Potenz auch direkt (aus ℂ) finden. Es ist nämlich

$$(p+q\cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}} = e^{\frac{\mu}{\nu}\cdot log(p+q\cdot i)} = e^{\frac{\mu}{\nu}\cdot[Lr+(2n\pi+\varphi)\cdot i]}$$

$$= e^{\frac{\mu}{\nu}\cdot Lr}\cdot e^{\frac{(2n\pi+\varphi)\mu}{\nu}\cdot i}$$

$$= r^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left[Cos\frac{(2n\pi+\varphi)\mu}{\nu}+i\cdot Sin\frac{(2n\pi+\varphi)\mu}{\nu}\right],$$

wo $r^{\frac{\mu}{\nu}}$ die (eindeutige) künstliche Potenz (deren Werth stets positiv ist) vorstellt.

Dann wird

$$\frac{2\mu n}{\nu}\pi = \frac{2\mu(\varkappa\nu+\varkappa'+\nu')}{\nu}\pi = 2\mu\varkappa\pi + \frac{2\mu(\varkappa'+\nu')}{\nu}\pi;$$

und es sind daher die Kosinus und Sinus von $\frac{2\mu n}{\nu}\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi$ bezüglich genau dieselben, wie die von $\frac{2\mu(\varkappa'+\nu')}{\nu}\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi$, weil die Bogen um eine gerade Anzahl π von einander verschieden sind, — während diese letzteren Bogen nur ν von einander verschiedene Werthe haben, weil μ und $\varkappa'$ und ν völlig bestimmte Werthe sind, ν' aber bloß die ν Werthe 0, 1, 2, 3, ... $\nu-1$ vorstellt.

Betrachten wir nun

$$Cos\left(\frac{2\mu(\varkappa'+\nu')}{\nu}\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi\right) \quad \text{und} \quad Sin\left(\frac{2\mu(\varkappa'+\nu')}{\nu}\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi\right)$$

für diese ν verschiedenen Bogen, so finden wir, daß sie alle von einander wirklich verschieden sind. Denn wären, etwa für $\nu' = \gamma$ und für $\nu' = \delta$ die Kosinus der beiden Bogen

$$\frac{2\mu(\varkappa'+\gamma)}{\nu}\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi \quad \text{und} \quad \frac{2\mu(\varkappa'+\delta)}{\nu}\pi + \frac{\mu}{\nu}\varphi,$$

und auch ihre Sinus einander gleich, so könnten die Bogen selbst nur um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden sein, während ihr wirklicher Unterschied $= 2\frac{\mu(\gamma-\delta)}{\nu}\pi$ gefunden wird, und $\gamma-\delta$ nothwendig kleiner als ν ist, weil γ und δ selbst Werthe von ν', also $<\nu$ sind. Ist nun, wie vorausgesetzt, $\frac{\mu}{\nu}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. haben μ und ν keinen gemeinschaftlichen Theiler, so kann $\frac{\mu(\gamma-\delta)}{\nu}$ keine ganze Zahl werden, weil sonst $\gamma-\delta$, welches kleiner als ν ist, durch ν selbst theilbar sein müßte. Unsere Annahme führt also zu dem Widerspruch, daß eine gebrochene Zahl zu gleicher

Zeit eine ganze Zahl sein müßte. — Folglich sind diese ν Werthe von $(p+q \cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}}$ alle wirklich von einander verschieden.

Es hat aber $(p+q \cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}}$ keine weiteren als diese eben besprochenen ν Werthe. Denn, welche andere positive oder negative ganze Zahl man auch statt n setzen mag, so ist sie doch ausgedrückt durch ein positives oder negatives Vielfache von ν, etwa durch $\varkappa\nu$ nebst noch einem der ν Werthe, welche so eben statt n gesetzt worden sind (unter denen der Werth 0, oder $\pm\nu$, oder ein Vielfaches von ν sich allemal befindet) und den wir durch λ bezeichnen wollen, so daß also jede andere Zahl n durch $\varkappa\nu+\lambda$ ausgedrückt ist. Dann hat man aber, wenn dieser Werth statt n in die Gleichung VI. gesetzt wird, in dem zweiten Faktor zur Rechten den Bogen

$$\frac{2\mu(\varkappa\nu+\lambda)}{\nu}\pi+\frac{\mu}{\nu}\varphi \quad \text{d. h.} \quad 2\mu\varkappa\pi+\frac{2\mu\lambda}{\nu}\pi+\frac{\mu}{\nu}\varphi$$

und dieser hat denselben Kosinus und Sinus, wie der Bogen $\frac{2\mu\lambda}{\nu}\pi+\frac{\mu}{\nu}\varphi$; so daß der entstehende Werth von $(p+q \cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}}$ jetzt kein anderer wird, als der erhalten worden ist, als man bloß den Werth λ statt n gesetzt hatte. — Wir sehen also, daß wenn man fortfährt, weitere, oder vorhergehende ν Werthe statt n zu setzen, dieselben ν Werthe von $(p+q \cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}}$, welche man bereits erhalten hat, immerfort periodisch wiederkehren.

Die Formel VI. liefert also für $(p+q \cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}}$ nur ν von einander allemal wirklich verschiedener Werthe und diese werden erhalten, wenn man in der gedachten Formel statt n irgend ν nächst auf einander folgender seiner Werthe setzt. — Gewöhnlich setzt man die ν Werthe 0, 1, 2, 3, ⋯ $\nu-1$ statt n; und noch bequemer ist es, die Werthe statt n zu setzen, welche auf beiden Seiten der 0 liegen mit Inbegriff der Null, also 0, ±1, ±2, ±3, ⋯ folglich zuletzt $\pm\frac{1}{2}(\nu-1)$, wenn ν ungerade;

oder, wenn ν gerade und man schon bis zu $\pm\frac{1}{2}(\nu-2)$ gekommen ist, zuletzt noch $+\frac{1}{2}\nu$; so daß in diesem letzteren Falle 0 und $\frac{1}{2}\nu$ gewissermaaßen ein zusammengehöriges Paar von Werthen geben, während die übrigen zusammengehörigen Paare von Werthen aus $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, rc. rc. hervorgehen.

B. Die (positiv oder negativ) gebrochene Potenz ist also eine allgemeine Potenz a^x, deren Exponent x aber positiv oder negativ gebrochen ist. Sie ist daher mehrdeutig, wenn auch die ihr, der Definition nach, zukommenden unendlich vielen Werthe sich auf eine endliche Anzahl derselben zurückziehen, auf eine Anzahl, welche mit dem Nenner des Exponenten zusammenfällt, — vorausgesetzt, daß der Exponent in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Die (positiv oder negativ) ganze Potenz (d. h. die Differenz-Potenz) ist ebenfalls eine allgemeine Potenz a^x, deren Exponent x eine positive oder negative ganze Zahl ist. Sie bleibt aber eindeutig, weil alle ihre unendlich vielen Werthe einander gleich werden.

Ist endlich in a^x, der Exponent x irrational z. B. $\sqrt{2}$ oder $\sqrt[3]{5}$, oder dergl., so muß man diesen Fall genau dem einer gebrochenen Potenz gleich achten, da wir uns (im I. Th. d. W.) eine solche irrationale Zahl nicht anders denken konnten, als daß sie eine gebrochene Zahl sei, deren Zähler und Nenner unendlich groß sind, während sie selbst einen endlichen, zwischen völlig bestimmten Grenzen liegenden Werth hat. Eine solche Potenz, wie $a^{\sqrt{2}}$ und dergl., hat aber, gerade dieser Ansicht wegen, so viele Werthe, als der Nenner des Bruches Einheiten hat, der, in der Idee, der $\sqrt{2}$ gleich ist, nämlich unendlich viele.

§. 220.

A. Ist a beliebig reell oder imaginär und durch $p+q\cdot i$ vorgestellt, so sind alle Werthe von *log* a (nach §. 175.) ausgedrückt durch

$$log\,a = log(p+q\cdot i) = Lr + (2n\pi+\varphi)\cdot i$$

wenn

I. $r = +\sqrt{p^2+q^2}$; II. $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$ und III. $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$

genommen wird und φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$. — Der Werth, der hieraus für $n=0$ sich ergiebt, wurde (im §. 178.) der „einfachste Werth" des $log\,a$ genannt und durch La bezeichnet; und ist a positiv, so ist dieser „einfachste Werth" allemal nichts anders als der Neper'sche Logarithme von a.

Man kann daher unter allen Werthen der allgemeinen Potenz a^x, welche alle durch $e^{x\cdot log\,a}$ ausgedrückt sind, denjenigen ausscheiden, welcher durch $e^{x\cdot La}$ ausgedrückt ist, und solchen den „einfachsten Werth" der allgemeinen Potenz a^x nennen, ihn aber etwa durch $[a^x]$ bezeichnen. Dann hat man

$[a^x] = e^{x\cdot La}$, wo $a = p+q\cdot i$, reell oder imaginär.

In dem besonderen Falle aber, wo a positiv ist, ist dieser durch $[a^x]$ bezeichnete „einfachste Werth" der allgemeinen Potenz, allemal die im §. 209. definirte (eindeutige) „künstliche" Potenz.

Die Formel VI. des §. 218. schreibt sich nun auch so, nämlich:

$$\text{IV.}\quad (p+q\cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}} = \left[r^{\frac{\mu}{\nu}}\right]\cdot\left(Cos\frac{(2n\pi+\varphi)\mu}{\nu} + i\cdot Sin\frac{(2n\pi+\varphi)\mu}{\nu}\right)$$

$$= \left[r^{\frac{\mu}{\nu}}\right]\cdot\left(Cos\frac{(2n\pi-\varphi)\mu}{\nu} - i\cdot Sin\frac{(2n\pi-\varphi)\mu}{\nu}\right),^{*)}$$

wo statt n eine Anzahl ν auf einander folgender ganzen positiven oder negativen Zahlen, unter denen die Null sein kann, gesetzt wird, etwa $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, ꝛc. ꝛc.

---

*) Es ist $Cos\,v = Cos(-v)$ und $Sin\,v = -Sin\,v$; also ist $Cos\frac{(2n\pi-\varphi)\mu}{\nu} = Cos\frac{(-2n\pi+\varphi)\mu}{\nu}$ und $Sin\frac{(2n\pi-\varphi)\mu}{\nu} = -Sin\frac{(-2n\pi+\varphi)\mu}{\nu}$ während überall $-2n\pi$ statt $+2n\pi$ und umgekehrt gesetzt werden kann, in so ferne n doch jede negative ganze Zahl eben so gut vorstellt, als jede positive ganze Zahl. Daher drückt die zweite Linie dasselbe aus, was die erste.

Man kann aber auch

$$\text{V.}\quad (p+q\cdot i)^{\frac{\mu}{\nu}} = \left[r^{\frac{\mu}{\nu}}\right]\cdot\left(Cos\frac{(2n\pi\pm\varphi)\mu}{\nu}\pm i\cdot Sin\frac{(2n\pi\pm\varphi)\mu}{\nu}\right)$$

nehmen, dem n nur $\frac{1}{2}\nu$ oder $\frac{1}{2}(\nu+1)$ Werthe geben, dagegen alle oberen Vorzeichen zugleich und alle unteren Vorzeichen zugleich nehmen, und man wird wiederum alle ν Werthe der gebrochenen Potenz haben.

B. Alle Werthe der allgemeinen Potenz a^x erhält man übrigens, wenn man irgend einen einzigen derselben mit allen Werthen von 1^x multiplicirt.

Denn es ist $a^x = e^{x\cdot log\, a} = e^{x(L\, a+2n\pi\cdot i)}$, wo La den „einfachsten Werth" des log a oder $log(p+q\cdot i)$ vorstellt. Nimmt man nun einen dieser Werthe von a^x, etwa den Werth $e^{x(L\, a+2\mu\pi\cdot i)}$, wo μ irgend eine bestimmte (positive oder negative) ganze Zahl oder die Null bezeichnet, und nimmt man alle Werthe von $1^x = e^{x\cdot log\, 1} = e^{2nx\pi\cdot i}$, und multiplicirt man letztere mit ersterem, so erhält man $e^{x[L\, a+2(\mu+n)\pi\cdot i]}$; dies Resultat drückt aber wiederum nichts anders als alle Werthe von a^x aus, weil $n+\mu$ gerade so wie n, doch nichts anders giebt, als alle positiven und negativen ganzen Zahlen und die Null.

Man hat daher auch, wenn man den einfachsten Werth nimmt

$$\text{VI.}\quad a^x = [a^x]\cdot 1^x$$

als eine richtige Gleichung, welche links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe hat.

§. 221.

Nennt man, wenn a wieder beliebig reell oder imaginär ist, von zwei allgemeinen Potenzen a^x und a^z, die den gemeinschaftlichen Dignanden a haben, diejenigen Werthe homologe, welche aus einem und demselben Werthe des log a hervorgehen, so folgt sogleich:

1) Multiplicirt oder dividirt man einen der Werthe von a^x mit dem einzigen homologen Werth von a^z, so erhält man allemal einen der Werthe von bezüglich a^{x+z} oder a^{x-z}; und zwar wieder den homologen.

Denn man hat $e^{x \cdot log\, a} \cdot e^{z \cdot log\, a} = e^{x \cdot log\, a + z \cdot log\, a}$; ist nun *log* a in den beiden Summanden des Exponenten $x \cdot log\, a + z \cdot log\, a$ ein und derselbe, so kann man für letzteren $(x+z) \cdot log\, a$ setzen, und man erhält dann $e^{(x+z) \cdot log\, a}$ d. h. die Potenz a^{x+z}, aber nur einen ihrer Werthe, nämlich den, der zu demselben Werth des *log* a gehört. — Das Analoge zeigt sich, wenn man dividirt.

2) Zu gleicher Zeit erkennt man aber auch, daß wenn einer der Werthe von a^x mit den unendlich vielen der nicht homologen Werthe von a^z multiplicirt oder dividirt wird, oder wenn man alle letzteren durch den ersteren dividirt, nur dann ein Werth von bezüglich a^{x+z}, oder a^{x-z}, oder a^{z-x} kommen kann, wenn noch besondere Bedingungen erfüllt sind, und zwar solche, die bei imaginären Werthen von x und z im Allgemeinen nicht zu erfüllen sein werden.

Denn es sei $e^{x \cdot [log\, a]}$ einer der Werthe von a^x, und $e^{z([log\, a] + 2\nu\pi \cdot i)}$ ein nicht homologer Werth von a^z, also ν nicht Null, sondern positiv oder negativ ganz, — so ist das Produkt dieser beiden Werthe

$$= e^{(x+z) \cdot [log\, a] + 2\nu z\pi \cdot i}.$$

Nun sind aber alle Werthe von a^{x+z} ausgedrückt durch $e^{(x+z) \cdot [log\, a] + 2n(x+z)\pi \cdot i}$, wo n Null oder positiv oder negativ ganz ist. Soll also das vorher erhaltene Produkt, einer dieser Werthe sein, so müssen $2\nu z\pi$ und $2n(x+z)\pi$ entweder einander gleich, oder nur um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden sein. Also muß dann $nx + (n-\nu)z$ entweder 0 oder positiv oder negativ ganz sein, für irgend ganze oder Null-Werthe von n und ν. Und dies ist dasmal die zu erfüllende Bedingung.

Ganz analoges ergiebt sich, wenn man dieselben zwei nicht homologen Werthe der Potenzen a^x und a^z durch einander dividirt.

3) Die beiden Formeln

$$a^x \cdot a^z = a^{x+z} \quad \text{und} \quad \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$$

sind also als, in allgemeinen Rechnungen brauchbare, allgemeingültige (vollkommene, richtige) Gleichungen nicht anzusehen, und ihre Anwendung bei allgemeinen Rechnungen kann zu unrichtigen Resultaten führen *).

4) Eben so bedürfen die Gleichungen

$$(a^x)^z = a^{xz} \quad \text{und} \quad \mathit{log}(a^x) = x \cdot \mathit{log}\, a$$

einer Korrektion, um allgemeingültige (richtige) Gleichungen zu werden.

§. 222.

A. Dagegen sind allgemeingültige (vollkommene, richtige) Gleichungen (welche links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe haben) die nachstehenden:

I. $$a^x \cdot a^z = a^{x+z} \cdot e^{2(\mu x + \nu z)\pi \cdot i};$$

II. $$\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z} \cdot e^{2(\mu x + \nu z)\pi \cdot i};$$

---

*) Die Formel $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ würde z. B. geben

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^2,$$

welche zur Linken drei Werthe hat, zur Rechten aber nur einen einzigen.

Diese Formel ist also bei allgemeinen Rechnungen nicht zuzulassen.

Die Formel $(a^x)^z = a^{xz}$ würde z. B. liefern

$$(a^2)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}},$$

welche links vier Werthe hat, rechts aber deren nur zwei.

Auch diese Formel ist also in allgemeinen Rechnungen nicht zuzulassen.

III. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;

IV. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$;

V. $(a^x)^z = a^{xz} \cdot e^{2nz\pi \cdot i}$;

VI. $log(a^x) = x \cdot log\, a + 2n\pi \cdot i$,

wenn μ und ν und n unabhängig von einander alle positiven und negativen ganzen Zahlen und die Null vorstellen, während a, b, x und z ganz allgemein gedacht sind, also eben so gut reell als auch imaginär sein können.

Ist aber x eine gebrochene Zahl $= \pm\frac{\alpha}{\beta}$, so braucht man in der I. und II. statt μ bloß β auf einander folgende seiner Werthe zu setzen; und ist z gebrochen und $= \pm\frac{\gamma}{\delta}$, so braucht man eben daselbst statt ν nur δ seiner Werthe zu setzen.

Beweis der I. — Denn es ist
$a^x = e^{x(L\,a+2\mu\pi\cdot i)}$ und $a^z = e^{z(L\,a+2\nu\pi\cdot i)}$; folglich hat man, wenn beide Gleichungen mit einander multiplicirt werden,

$$a^x \cdot a^z = e^{(x+z)(L\,a+2n\pi\cdot i)} \cdot e^{(2(\mu-n)x+2(\nu-n)z)\cdot\pi\cdot i}$$
$$= a^{x+z} \cdot e^{2[(\mu-n)x+(\nu-n)z]\pi\cdot i}.$$

Weil aber $\mu-n$ und $\nu-n$, eben so wie μ, ν und n selbst nichts weiter vorstellen als die Reihe aller ganzen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Einschluß der Null, so kann man bezüglich μ und ν dafür schreiben, und so ergiebt sich die I.

Beweis der II. — Ferner findet sich

$$\frac{a^x}{a^z} = e^{(x-z)(L\,a+2n\pi\cdot i)} \cdot e^{[2(\mu-n)x-2(\nu-n)z]\pi\cdot i}$$
$$= a^{x-z} \cdot e^{2[(\mu-n)x+(n-\nu)z]\pi\cdot i}$$

und dadurch ist die II. außer Zweifel gestellt, weil $\mu-n$ und $n-\nu$ eben so wie μ, ν, n selbst, doch nur die Reihe aller ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, mit Einschluß der Null, vorstellen, also durch μ und ν ersetzt werden können.

Man kann auch die II. aus der I. erhalten, wenn man in der I. zuerst $x-z$ statt x schreibt und dann durch a^z auf beiden Seiten wegdividirt, wobei man nur beachten muß, daß

$$e^{2(\mu x+\nu z)\pi \cdot i}, \quad e^{-2(\mu x+\nu z)\pi \cdot i}, \quad e^{2(\mu x-\nu z)\pi \cdot i} \text{ und } e^{-2(\mu x-\nu z)\pi \cdot i}$$

ein und dasselbe ist, weil μ und ν positives und negatives zugleich vorstellen.

Ist aber $x=\frac{\alpha}{\beta}$ und wollte man dann dem Buchstaben μ einen Werth geben, der durch $\mu'\beta+\mu$ vorgestellt ist, wo $\mu'\beta$ irgend ein Vielfaches von β vorstellt, so würde der Exponent des zweiten Faktors in I. und II. zur Rechten, um $2\mu'\pi \cdot i$ größer werden und die Potenz selbst daher ihren Werth behalten. — Dasselbe fände statt, wenn $x=\frac{\gamma}{\delta}$ wäre und $\nu'\delta+\nu$ statt ν gesetzt würde.

Beweis der III. — Es ist $a^x=e^{x \cdot log\, a}$ und $b^x=e^{x \cdot log\, b}$, folglich auch $a^x \cdot b^x = e^{x \cdot (log\, a + log\, b)} = e^{x \cdot log\, (ab)} = (ab)^x$, weil $log\, a + log\, b$ (nach §. 179.) alle Werthe von $log\, (ab)$ giebt, selbst dann noch, wenn auch unter $log\, a$, oder unter $log\, b$ nur ein einziger seiner Werthe gedacht wird, wenn nur der andere Logarithme noch alle seine Werthe vorstellt.

Beweis der IV. — Man setze in III. zuerst $\frac{a}{b}$ statt a und dividire dann die erhaltene Gleichung durch b^x; — oder man beweise direkt, wie für die III. — Es ist nämlich

$\frac{a^x}{b^x}=e^{x \cdot log\, a - x \cdot log\, b}=e^{x log\, (a:b)}=\left(\frac{a}{b}\right)^x$, weil $log\, a - log\, b$ selbst dann schon alle Werthe von $log\, \frac{a}{b}$ giebt, wenn auch einer der beiden Logarithmen, entweder $log\, a$ oder $log\, b$, nur einen einzigen seiner Werthe vorstellt.

Beweis der V. und VI. — Weil $a^x=e^{x \cdot log\, a}$ ist, so ist $x \cdot log\, a$ für jeden Werth des $log\, a$, einer der Werthe des zu diesem Werthe des $log\, a$, gehörigen Werthes von

log(a^x). — Folglich hat man als eine vollkommen richtige Gleichung (nach §. 177.)

$$log(a^x) = x \cdot log\, a + log\, 1 = x \cdot log\, a + 2n\pi \cdot i,$$

wodurch die VI. erwiesen ist.

Dann ist aber (nach der Definition der allgemeinen Potenz)

$$(a^x)^z = e^{z \cdot log(a^x)} = e^{xz \cdot log\, a + 2nz\pi \cdot i}$$
$$= e^{xz \cdot log\, a} \cdot e^{2nz\pi \cdot i} = a^{xz} \cdot e^{2nz\pi \cdot i}.$$

Welches zu erweisen war.

Anmerkung. So wie man sich x und z positiv oder negativ ganz denkt, so ist auch $\mu x + \nu z$ positiv oder negativ ganz; daher ist dann der zweite Faktor in I. und II. zur Rechten, $=1$, und so entstehen (aus I. und II.) die Gleichungen $a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ und $\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$, wie solche im I. Th. d. W. für Differenz-Potenzen erwiesen worden sind.

B. Setzt man in der II. $x = 0$, so erhält man

$$\frac{1}{a^z} = a^{-z} \cdot e^{2\nu z\pi \cdot i},$$

wo ν sowohl 0 als jede (positive oder negative) ganze Zahl vorstellt. — Weil aber $a^{-z} = e^{-z \cdot log\, a} = e^{-z \cdot (L\, a + 2n\pi \cdot i)}$ ist, so ist auch noch $a^{-z} \cdot e^{2\nu z\pi \cdot i} = e^{-z \cdot [L\, a + 2(n-\nu)\pi \cdot i]} = e^{-z \cdot log\, a} = a^{-z}$, weil $n-\nu$ nichts weiter bedeutet, als die Reihe aller ganzen Zahlen von $-\infty$ an bis zu $+\infty$ hin, mit Einschluß der Null. — Man findet demnach als allgemeingültig die Gleichung

II. 1. $$a^{-z} = \frac{1}{a^z},$$

wie sich auch (viel einfacher noch) direkt ergiebt. Denn es ist

$$a^{-z} = e^{-z \cdot log\, a} = \frac{1}{e^{z \cdot log\, a}} = \frac{1}{a^z},$$

weil für natürliche Potenzen der Satz, daß $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$ ist, längst schon erwiesen worden ist.

C. Aus den Beweisen der III. und der IV. ergiebt sich auch noch mit Entschiedenheit,

1) daß man alle Werthe von $(ab)^x$ bereits erhalte, wenn man einen einzigen Werth von a^x mit allen Werthen von b^x, oder alle Werthe von a^x mit einem einzigen Werth von b^x multiplicirt; es ist also namentlich noch

$$[a^x] \cdot b^x = (ab)^x = a^x \cdot [b^x],$$

wenn $[a^x]$, $[b^x]$ (nach §. 220.) die „einfachsten Werthe" dieser Potenzen vorstellen;

2) daß man alle Werthe von $\left(\frac{a}{b}\right)^x$ bereits erhalte, wenn man einen einzigen Werth von a^x durch alle Werthe von b^x, oder wenn man alle Werthe von a^x durch einen einzigen Werth von b^x dividirt; es ist also namentlich noch

$$\frac{[a^x]}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{[b^x]};$$

und von diesen letzteren beiden Gleichungen hat jeder der drei einander gleichen Ausdrücke gleich viele und genau dieselben Werthe, wie dasselbe von allen unsern Gleichungen gilt, so lange wir nicht ausdrücklich die nöthige Beschränkung mit Worten hinzufügen.

D. Denkt man sich endlich in der V. den Exponenten z positiv oder negativ ganz und $= m$, so ist der zweite Faktor zur Rechten, $= e^{2mn\pi \cdot i}$ d. h. $= 1$, und die V. geht dann über in

V. 1. $$(a^x)^m = a^{mx},$$

welches stets eine allgemeingültige Gleichung ist, obgleich a^x und a^{mx} allgemeine Potenzen sind, wenn nur m einer Differenz ganzer Zahlen gleich ist.

Diese Gleichung V. 1. liefert auch noch, wenn m bloß positiv ganz gedacht und gleichzeitig $\frac{1}{m}$ statt x gesetzt wird:

V. 2. $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^1 = a;$

d. h. jeder der m Werthe (§. 218.) von $a^{\frac{1}{m}}$ hat die Eigenschaft, daß er, mit m potenzirt, stets dasselbe a giebt, während a ganz allgemein gedacht, also eben so gut reell als imaginär ist.

§. 223. Erklärung.

Das Zeichen $\sqrt[m]{a}$, wo m positiv ganz, a dagegen völlig allgemein gedacht ist, nennen wir eine allgemeine Wurzel (die m^{te} Wurzel aus a) und wir bezeichnen damit jeden Ausdruck, welcher die Eigenschaft hat, mit m potenzirt, a zu geben.

Da jeder der m Werthe der gebrochenen Potenz $a^{\frac{1}{m}}$ (nach §. 222. V. 2.) die gedachte Eigenschaft hat, so gehören alle m Werthe von $a^{\frac{1}{m}}$ zu den durch $\sqrt[m]{a}$ bezeichneten Ausdrücken. Es giebt aber auch keinen weiteren Ausdruck, der dieselbe Eigenschaft hat, und der nicht einem dieser letztgedachten m Werthe gleich wäre, d. h. es ist

I. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$

eine allgemeingültige Gleichung.

Denn ist $a = p + q \cdot i = R \cdot e^{\varphi \cdot i} = R(Cos\,\varphi + i \cdot Sin\,\varphi)$, reell (wo $\varphi = 0$) oder imaginär, so sind (nach §. 220. IV. V.) alle m Werthe von $a^{\frac{1}{m}}$ d. h. von $(p+q \cdot i)^{\frac{1}{m}}$ ausgedrückt durch

$$\text{II.} \quad a^{\frac{1}{m}} = (p+q \cdot i)^{\frac{1}{m}} = \left[R^{\frac{1}{m}}\right] \cdot e^{\frac{2n\pi + \varphi}{m} \cdot i}$$

$$= \left[R^{\frac{1}{m}}\right] \cdot \left(Cos\,\frac{2n\pi \pm \varphi}{m} \pm i \cdot Sin\,\frac{2n\pi \pm \varphi}{m}\right),$$

wo alle obern Vorzeichen zugleich oder alle unteren zugleich gelten.

Gäbe es nun noch einen reellen oder imaginären Werth $\alpha + \beta \cdot i$ d. h. $r \cdot e^{\psi \cdot i}$ d. h. $r \cdot (Cos\,\psi + i \cdot Sin\,\psi)$, welcher die

durch $\sqrt[m]{a}$ vorgestellte Eigenschaft hat, so müßte demnach die m^{te} Potenz desselben, nämlich

$$r^m \cdot e^{m\psi i} \quad \text{d. h.} \quad r^m \cdot [Cos(m\psi) + i \cdot Sin(m\psi)],$$
$$= a \quad \text{d. h.} \quad = R \cdot (Cos\,\varphi + i \cdot Sin\,\varphi)$$

sein; folglich wäre dann auch

1) $r^m \cdot Cos(m\psi) = R \cdot Cos\,\varphi$ und 2) $r^m \cdot Sin(m\psi) = R \cdot Sin\,\varphi$.

Quadrirt und addirt man aber diese letztern beiden Gleichungen so geben sie

3) $r^m = R$, folglich $r = \left[R^{\frac{1}{m}}\right]$;

dann aber folgt noch aus ihnen, daß die Bogen $m\psi$ und φ einerlei Kosinus und einerlei Sinus haben, also nur um eine gerade Anzahl von π von einander verschieden sein können; daß also

4) $m\psi = 2\nu\pi + \varphi$, also $\psi = \dfrac{2\nu\pi + \varphi}{m}$

sein müsse. Folglich ist der neue Werth $r \cdot (Cos\,\psi + i \cdot Sin\,\psi)$ oder $\alpha + \beta \cdot i$, doch (für $n = \nu$) unter den in 2.) aufgestellten m Werthen von $a^{\frac{1}{m}}$, mit begriffen.

Diese Definition der **allgemeinen** m^{ten} Wurzel ist endlich auch gerechtfertigt, denn die im I. Th. d. W. aufgestellten Begriffe der allgemeinen zweiten (Quadrat-), dritten (Kubik-) und vierten (Biquadrat-) Wurzel, stecken als besondere Fälle in ihm (für $m = 2$, 3 und 4). Endlich ist, wenn a positiv wird, auch die in dem I. Th. d. W. definirte **absolute** m^{te} Wurzel einer der m Werthe der **allgemeinen** Wurzel.

Aus der Gleichung I., in Verbindung mit §. 220. IV. und V., geht aber noch hervor:

III. $\sqrt[m]{1} = e^{\frac{\pm 2n\pi}{m} \cdot i} = Cos\dfrac{2n\pi}{m} \pm i \cdot Sin\dfrac{2n\pi}{m}$;

IV. $\sqrt[m]{(-1)} = e^{\frac{\pm(2n+1)\pi}{m} \cdot i} = Cos\dfrac{(2n+1)\pi}{m} \pm i \cdot Sin\dfrac{(2n+1)\pi}{m}$;

$$\text{V.} \quad \sqrt[m]{(Cos\,\varphi + i \cdot Sin\,\varphi)} = Cos\frac{2n\pi \pm \varphi}{m} \pm i \cdot Sin\frac{2n\pi \pm \varphi}{m};$$

$$\text{VI.} \quad \sqrt[m]{(p + q \cdot i)} = \left[\sqrt[m]{r}\right] \cdot \left(Cos\frac{2n\pi \pm \varphi}{m} \pm i \cdot Sin\frac{2n\pi \pm \varphi}{m}\right),$$

wenn überall alle obern Vorzeichen zugleich oder alle unteren zugleich gelten, — wenn statt n nach und nach so viele ganze Zahlen (die Null nicht ausgeschlossen) gesetzt werden, bis man zur Rechten wirklich m verschiedene Werthe hat, — und wenn endlich in VI. $r = +\sqrt{p^2 + q^2}$ und φ ebendaselbst aus den Gleichungen $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$ und $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$ und zwischen $-\pi$ und $+\pi$ genommen wird, so daß φ mit q zugleich eine positive oder negative Zahl vorstellt.

§. 224.

Für die allgemeinen Wurzeln ergiebt sich aus dieser Definition sogleich Folgendes:

A. Alle m Werthe der allgemeinen Wurzel $\sqrt[m]{a}$ erhält man, wenn man irgend einen derselben mit allen m Werthen der $\sqrt[m]{1}$ multiplicirt (weil $a = a \cdot 1$ ist, so folgt dies unmittelbar aus §. 222. C. 1. und aus §. 223. I.). — Man hat aber

$$1) \quad \sqrt[m]{1} = 1^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \cdot log\,1} = e^{\frac{2n\pi}{m} \cdot i} = Cos\frac{2n\pi}{m} + i \cdot Sin\frac{2n\pi}{m},$$

wenn man statt n eine Anzahl m von auf einander folgenden positiven oder negativen ganzen Zahlen, die Null nicht ausgenommen, setzt. — Also ist auch

$$2) \quad \sqrt[m]{a} = [\sqrt[m]{a}] \cdot \sqrt[m]{1} = [\sqrt[m]{a}] \cdot \left(Cos\frac{2n\pi}{m} + i \cdot Sin\frac{2n\pi}{m}\right),$$

wo n die eben angegebene Bedeutung hat, während das eingeklammerte Zeichen $[\sqrt[m]{a}]$ einen einzigen beliebigen der m Werthe der $\sqrt[m]{a}$ vorstellt.

B. Der Definition zufolge ist

$$\text{I.} \qquad (\sqrt[m]{a})^m = a$$

und der A.) zufolge ist

$$\text{II.} \qquad \sqrt[m]{(a^m)} = a\cdot\sqrt[m]{1} = a\cdot e^{\frac{2n\pi}{m}\cdot i}$$

wo n die vorbemerkte Bedeutung hat *).

Die Gleichung I. hat links und rechts nur einen einzigen Werth; die Gleichung II. hat links und rechts dieselben m Werthe; jede ist daher eine vollkommene (richtige) Gleichung.

C. Es ist ferner, während a und b, wie jetzt immer, ganz allgemein gedacht werden,

$$3) \quad \sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} \quad \text{und} \quad 4) \quad \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Diese Gleichungen haben links und rechts dieselben m Werthe, und dies ist auch dann schon der Fall, wenn statt einer der beiden Wurzeln, $\sqrt[m]{a}$ oder $\sqrt[m]{b}$, nur ein einziger ihrer Werthe gesetzt wird, wenn nur die andere allgemein (also m deutig) bleibt. — Solches folgt unmittelbar aus $\sqrt[m]{q} = q^{\frac{1}{m}}$ und aus §. 222. A. III. und IV. und C. Nr. 1.

D. Dagegen findet sich (nach §. 222. V.), weil

$\sqrt[m]{(a^b)} = (a^b)^{\frac{1}{m}}$ ist,

$$5) \quad \sqrt[m]{(a^b)} = a^{\frac{b}{m}}\cdot e^{\frac{2n\pi}{m}\cdot i} = a^{\frac{b}{m}}\cdot\sqrt[m]{1} \text{ **}).$$

---

*) Die Gleichung

$$\sqrt[m]{(a^m)} = a$$

kann in allgemeinen Rechnungen nicht zugelassen werden.

**) Diese Gleichung kann links und rechts unendlich viele Werthe haben (wenn b imaginär ist); sie hat links und rechts νm Werthe, wenn $b = \pm\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu}{m\nu}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Es ist aber auch

6) $\sqrt[m]{(a^b)} = a^{\frac{b}{m}} = (\sqrt[m]{a})^b$,

jedoch nur dann, wenn b positiv oder negativ ganz, 0 oder 1 ist, und dabei b und m keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben (d. h. Primzahlen unter sich sind), weil dann $a^{\frac{b}{m}}$ wirklich m von einander verschiedene Werthe hat, welche durch $\left[a^{\frac{b}{m}}\right].1^{\frac{b}{m}} = \left[a^{\frac{b}{m}}\right].e^{\frac{2\mu b\pi}{m}.i}$ ausgedrückt sind und welche mit dem andern Faktor $e^{\frac{2n\pi}{m}.i}$ (in Nr. 5.) multiplicirt, $\left[a^{\frac{b}{m}}\right].e^{\frac{2(\mu b+n)\pi}{m}.i}$ oder $\left[a^{\frac{b}{m}}\right].\sqrt[m]{1}$ geben, in so ferne $\mu b+n$, wie n selbst, abermals nur die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, mit Einschluß der Null, vorstellt *).

Ferner ist (nach §. 223. I. und nach §. 222. V.)

7) $(\sqrt[m]{a})^b = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^b = a^{\frac{b}{m}} \cdot e^{2\nu b\pi \cdot i} = a^{\frac{b}{m}}$

eine allgemeingültige Gleichung, so oft b einer Differenz ganzer Zahlen gleich ist, weil dann νb positiv oder negativ ganz oder 0, also $e^{2\nu b\pi \cdot i} = 1$ ist. Dadurch ist aber die 6.) in ihrer doppelten Gestalt erwiesen.

Die drei Ausdrücke in 6.) haben also gleich viele und genau dieselben Werthe, wenn nur b einer Differenz ganzer Zahlen gleich und $\frac{b}{m}$ ein bereits in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch ist.

Ist aber $\frac{b}{m}$ zwar eine positive oder negative aber noch

---

*) Wollte man die Gleichung 6.) z. B. für den Fall anwenden, wo $m = 4$ und $b = 6$ wäre, so würde man die allgemein ungültige Gleichung erhalten $\sqrt[4]{(a^6)} = a^{\frac{3}{2}}$, welche links 4 Werthe hätte und rechts deren nur 2.

nicht in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl, so muß man

8) $\sqrt[m]{(a^b)} = (\sqrt[m]{a})^b \cdot \sqrt[m]{1}$

nehmen, wenn man eine allgemeingültige (vollkommene, richtige) Gleichung haben will.

E. Dagegen finden sich folgende Gleichungen, in denen m und b und $\frac{m}{b}$ positiv ganz gedacht werden müssen, allemal als allgemeingültige, nämlich

9) $\sqrt[mb]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[b]{a}}$;

10) $\sqrt[m:b]{a} = a^{\frac{b}{m}} = (\sqrt[m]{a})^b$,

von denen die erstere links und rechts m·b, die andere $\frac{m}{b}$ verschiedene Werthe hat.

Die Richtigkeit der letztern 10.) folgt unmittelbar aus §. 223. I., nach welcher $\sqrt[m:b]{a} = a^{1:\frac{m}{b}} = a^{\frac{b}{m}}$ ist, und aus der vorstehenden Nr. 7. — Setzt man aber in ihr mb statt m, so erhält man $\sqrt[m]{a} = (\sqrt[mb]{a})^b$; folglich ist $\sqrt[mb]{a} = \sqrt[b]{\sqrt[m]{a}}$, und daraus ergiebt sich die 9.), wenn man noch m und b mit einander vertauscht.

F. Endlich ist allgemeingültig die Gleichung

11) $log\sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot log\, a$,

sobald $\sqrt[m]{a}$ allgemein, d. h. m deutig gedacht wird. Diese Gleichung hat links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe.

Denn es ist

α) $\frac{1}{m} \cdot log\, a = \frac{1}{m} \cdot (La + 2n\pi \cdot i) = \frac{1}{m} \cdot La + \frac{2n\pi}{m} \cdot i$,

wo n sowohl 0 als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt. — Auf der andern Seite ist

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\cdot log\, a} = e^{\frac{1}{m}(L\,a+2\mu\pi\cdot i)},$$

wo μ die Werthe 0, 1, 2, 3, bis m—1 vorgestellt, wenn alle m Werthe der $\sqrt[m]{a}$ ausgedrückt sein sollen; folglich ist $\frac{1}{m}\cdot(L\,a+2\mu\pi\cdot i)$ für jeden Werth von μ, d. h. für jeden Werth der $\sqrt[m]{a}$, ein Werth des $log\sqrt[m]{a}$; addirt man also dazu alle Werthe $2\nu\pi\cdot i$ des $log\,1$, so hat man alle Werthe des $log\sqrt[m]{a}$ (nach §. 177.), nämlich

$$\beta)\qquad log\sqrt[m]{a} = \frac{1}{m}(L\,a+2\mu\pi\cdot i)+2\nu\pi\cdot i = \frac{1}{m}L\,a+2\frac{\mu+\nu m}{m}\pi\cdot i.$$

Weil aber ν alle Werthe hat, welche 0 oder positiv oder negativ ganz sind, und μ die m Werthe 0, 1, 2, 3, bis m—1, so drückt die Form $\mu+\nu m$ genau wieder alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Einschluß der Null aus; und so folgt aus den Gleichungen α) und β) die Wahrheit unserer Behauptung. (Man vergleiche sorgfältig hiermit den §. 180., in welchem dieselbe Formel bereits erwiesen ist, aber nur für m = 2, 3 und 4.

Anmerkung 1. Betrachten wir noch die m Werthe von $\sqrt[m]{1}$; sie sind ausgedrückt durch

$$\sqrt[m]{1} = e^{\frac{2n\pi}{m}\cdot i} = \left(Cos\frac{2n\pi}{m}+i\cdot Sin\frac{2n\pi}{m}\right),$$

wenn man statt n eine Anzahl m auf einander folgender ganzen Zahlen (mit oder ohne die Null) setzt.

Aus ihrer Betrachtung geht hervor:

1) Sie können paarweise so geordnet werden (dadurch, daß man dem n einen Werth $+\alpha$ und zugleich den Werth $-\alpha$ giebt), daß das Produkt eines solchen Paares, = 1 wird.

2) Ist m ungerade, so ist einer der Werthe von $\sqrt[m]{1}$, selbst $= 1$; die übrigen sind alle imaginär.

3) Ist m gerade, so ist einer der Werthe von $\sqrt[m]{1}$, $= 1$ (für $n = 0$), ein anderer $= -1$ (für $n = \frac{1}{2}m$); die übrigen alle sind imaginär.

4) Jede positive oder negative ganze Potenz eines jeden der Werthe von $\sqrt[m]{1}$, ist stets wieder ein Werth von $\sqrt[m]{1}$.

Ist nämlich $z^m = 1$, so ist, wenn b positiv oder negativ ganz, während m positiv ganz vorausgesetzt wird,

$$(z^m)^b = z^{mb} = (z^b)^m = 1^b = 1; \text{ also ꝛc. ꝛc.}$$

Noch direkter folgt die Wahrheit dieser Behauptung, wenn man ohne Weiteres $e^{\frac{2n\pi}{m}\cdot i}$ mit b potenzirt, wodurch man $e^{\frac{2nb\pi}{m}\cdot i}$ erhält, welches wieder ein Werth von $\sqrt[m]{1}$ ist, weil nb irgend eine positive oder negative ganze Zahl sein wird.

5) Nimmt man aber den Werth $e^{\frac{2\pi}{m}\cdot i} = \varepsilon$ von $\sqrt[m]{1}$, so sind dessen ganze Potenzen $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots \varepsilon^m$, lauter verschiedene Werthe von $\sqrt[m]{1}$, so daß alle m Werthe von $\sqrt[m]{1}$ vorgestellt sind durch $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots \varepsilon^{m-1}, \varepsilon^m$; der letztere ist der Werth 1 selbst.

6) Das Produkt je zweier Werthe von $\sqrt[m]{1}$, ist allemal wieder ein Werth von $\sqrt[m]{1}$.

Anmerkg. 2. Weniger interessant sind die Eigenschaften der m Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$. Sie sind ausgedrückt durch

$$\sqrt[m]{(-1)} = (-1)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\cdot log(-1)} = e^{\frac{(2n+1)\pi}{m}\cdot i}$$

d. h.

$$\sqrt[m]{(-1)} = Cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + i\cdot Sin\frac{(2n+1)\pi}{m} = e^{\frac{(2n+1)\pi}{m}\cdot i}$$

wo n entweder Null oder jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, während aber nur m auf einander folgende seiner Werthe genommen zu werden brauchen.

Daraus folgt

1) Das Produkt zweier Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$ ist allemal einer der Werthe von $\sqrt[m]{(+1)}$.

2) Das Produkt eines der Werthe von $\sqrt[m]{1}$ mit einem der Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$, ist allemal einer der Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$.

3) Jede gerade Potenz eines der Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$ ist stets ein Werth von $\sqrt[m]{(+1)}$.

4) Jede ungerade Potenz eines der Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$ ist stets wieder ein Werth von $\sqrt[m]{(-1)}$.

5) Nimmt man die ungeraden Potenzen von dem Werth $\zeta = e^{\frac{\pi}{m}\cdot i}$ der $\sqrt[m]{(-1)}$ in der Ordnung, so sind solche, nämlich

$$\zeta,\ \zeta^3,\ \zeta^5,\ \ldots\ \zeta^{2m-1},$$

alle m Werthe von $\sqrt[m]{(-1)}$, weil sie alle von einander verschieden sind; denn es ist z. B. für irgend eine ganze Zahl r,

$$\zeta^{2r-1} = e^{\frac{2r-1}{m}\pi\cdot i} = Cos\,\frac{(2r-1)\pi}{m} + i\cdot Sin\,\frac{(2r-1)\pi}{m};$$

und dieser Werth ist für jeden andern Werth von r ein anderer, so lange r zwischen 0 und m bleibt, weil dann der Bogen stets zwischen 0 und 2π liegt und zwei Bogen, welche zwischen 0 und 2π liegen, nie einerlei Kosinus und gleichzeitig einerlei Sinus haben.

§. 225.

Von den gebrochenen Potenzen wollen wir noch Folgendes bemerken:

A. Die Potenz $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ hat dieselben ν Werthe, welche die $\sqrt[\nu]{(a^{\mu})}$ hat (nach §. 224. D. 6.), so oft $\frac{\mu}{\nu}$ positiv oder negativ, aber in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist; sie hat weniger Werthe als die gedachte Wurzel, wenn $\frac{\mu}{\nu}$ nicht in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

B. Daher hat das Produkt $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{q}}$ und der Quotient $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{q}}}$, wenn $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{q}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, nicht mehr als q Werthe (obgleich jeder Werth von $a^{\frac{p}{q}}$ mit jedem Werth von $a^{\frac{r}{q}}$ multiplicirt oder dividirt wird, also q·q Werthe gebildet werden), weil das Produkt und der Quotient der Wurzeln $\sqrt[q]{(a^p)}$ und $\sqrt[q]{(a^r)}$ nicht mehr als q Werthe hat (nach §. 224.).

C. Unter derselben Voraussetzung, daß $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{q}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, ist die Gleichung

$$1) \qquad a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{q}} = a^{\frac{p+r}{q}}$$

eine richtige (welche links und rechts gleich viele und dieselben Werthe hat), so oft p+r und q keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Eben so ist

$$2) \qquad a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{q}} = a^{\frac{p-r}{q}}$$

eine richtige (allgemeingültige) Gleichung, wenn p−r und q keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.

Dabei denken wir uns die Nenner der in den Exponenten vorkommenden Brüche, stets positiv ganz, die Zähler dagegen positiv oder negativ ganz.

D. Die Gleichungen

$$3) \qquad a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}}$$

und

$$4) \qquad a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}}$$

haben links und rechts gleich viele (nämlich $q \cdot s$) und dieselben Werthe, wenn $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, und wenn dasselbe in 3.) mit dem Bruche $\frac{ps+qr}{qs}$, in 4.), dagegen mit dem Bruche $\frac{ps-qr}{qs}$ der Fall ist. (Folgt aus A. unmittelbar.).

So wie diese Bedingungen nicht erfüllt sind, müssen statt dieser Gleichungen (3. oder 4.) die allgemeinen Gleichungen §. 222. I. oder II. eintreten, wenn man allgemeingültige Gleichungen haben will.

So z. B. ist die Gleichung

$$a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{8}} = a^{\frac{11}{8}}$$

deshalb nicht unbedingt zuzulassen, weil nicht beide Seiten derselben unbedingt für einander gesetzt werden können, welches doch unserem gegebenen Begriff einer Gleichung zufolge, allemal der Fall sein muß. — Soll sie in dem Sinne verwandt werden, daß die 8 Werthe der Potenz zur Rechten unter den 32 Werthen des Produkts zur Linken vorkommen, so muß man sehr behutsam mit ihrer Hilfe rechnen, wenn man nicht falsche Resultate haben will.

§. 226. Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob und in welchem Sinne der, früher für Differenz-Potenzen erwiesene binomische Lehrsatz, auch noch für die jetzigen allgemeinen Potenzen gelten könne.

Auflösung. Da alle Werthe von $(1+x)^z$ in $e^{z \cdot log(1+x)}$ enthalten sind, so darf man nur statt $log(1+x)$ die Reihe

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}\right] \text{ d. h. } x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\cdots$$

setzen (diese Reihe mag hier durch $f_{(x)}$ bezeichnet sein), und dann

$$e^{z\cdot f(x)} \text{ d. h. } S\left[\frac{z^a\cdot[f_{(x)}]^a}{a!}\right] \text{ d. h. } 1+z\cdot f_{(x)}+\frac{z^2\cdot[f_{(x)}]^2}{2!}+\cdots$$

gehörig nach x ordnen, und man wird einen der Werthe von $(1+x)^z$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt haben; und zwar ergeben sich sogleich die 2 ersten Glieder dieser nach x geordneten Reihe, $=1+z\cdot x$, während alle übrigen Glieder die höhern Potenzen von x enthalten.

Ist aber auf diese Weise die Existenz einer nach Potenzen von x fortlaufenden Reihe gesichert, welche einem der Werthe von $(1+x)^z$ gleich sein muß, so setze man

1) $(1+x)^z = S[P_a\cdot x^a]$,

wo $P_0=1$, $P_1=z$, ist, wo aber P_2, P_3, P_4, ⋯ überhaupt P_a noch unbestimmte uud zu suchende Koeffizienten sind. — Setzt man nun hier y statt x, so erhält man

2) $(1+y)^z = S[P_a\cdot y^a]$,

folglich, wenn man multiplicirt 1.) mit 2.), weil

$(1+x)^z\cdot(1+y)^z = [(1+x)(1+y)]^z = [1+(x+y+xy)]^z$ ist,

3) $[1+(x+y+xy)]^z = S[P_a\cdot P_b\cdot x^a\cdot y^b]$.

Wird dagegen in 1.) $x+y+xy$ statt x gesetzt, so findet sich noch

4) $[1+(x+y+xy)]^z = S[P_b\cdot(x+y+xy)^b]$,

so daß (aus 3. und 4.):

5) $S[P_a\cdot P_b\cdot x^a\cdot y^b] = S[P_b\cdot(x+y+xy)^b]$

hervorgeht. — Nun ist aber nach dem trinomischen Lehrsatze (§. 64.) für ganze Exponenten

$$(x+y+xy)^b = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}\cdot x^a\cdot y^b\cdot(xy)^c\right]_{a+b+c\,=\,b}$$

$$= S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}\cdot x^{a+c}\cdot y^{b+c}\right]_{a+b+c\,=\,b};$$

folglich, wenn man diese Reihe statt $(x+y+xy)^{\mathfrak{b}}$ (in 5.) substituirt, und wenn $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ statt $\mathfrak{d}$ gesetzt wird:

$$6)\quad S[P_{\mathfrak{a}}\cdot P_{\mathfrak{b}}\cdot x^{\mathfrak{a}}\cdot y^{\mathfrak{b}}] = S\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})!}{\mathfrak{a}!\;\mathfrak{b}!\;\mathfrak{c}!}P_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\cdot x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}\cdot y^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\right].$$

Und weil hier links und rechts die Koeffizienten von y einander gleich sein müssen, so folgt, wenn links 1 statt $\mathfrak{b}$, rechts aber $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=1$ gesetzt wird:

$$7)\quad S[P_{\mathfrak{a}}\cdot P_1\cdot x^{\mathfrak{a}}] = S\left[(\mathfrak{a}+1)\cdot P_{\mathfrak{a}+1}\cdot x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}\right]_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=1}.$$

Und da nun hier links und rechts wiederum die Koeffizienten von x einzeln einander gleich sein müssen, also namentlich auch der Koeffizient von x^n, so folgt hieraus noch

$$8)\quad P_n\cdot P_1 = S\left[(\mathfrak{a}+1)P_{\mathfrak{a}+1}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=n,\ \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=1}.$$

Und da die Gleichung $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=1$, bloß $\mathfrak{c}=0$, $\mathfrak{a}=n$ oder $\mathfrak{c}=1$, $\mathfrak{a}=n-1$ zuläßt, so folgt ferner

$$9)\quad P_n\cdot P_1 = (n+1)\cdot P_{n+1} + n\cdot P_n,$$

wo $P_1 = z$ ist, so daß diese Gleichung noch in

$$10)\quad (z-n)\cdot P_n = (n+1)\cdot P_{n+1}$$

übergeht.

Wird nun hier nach und nach 0, 1, 2, 3, ⋯ $\mathfrak{a}-1$ statt n gesetzt, so ergiebt sich

$$z\cdot P_0 = 1\cdot P_1$$
$$(z-1)\cdot P_1 = 2\cdot P_2$$
$$(z-2)\cdot P_2 = 3\cdot P_3$$
$$(z-3)\cdot P_3 = 4\cdot P_4$$

u. s. w. f.; zuletzt

$$[z-(\mathfrak{a}-1)]\cdot P_{\mathfrak{a}-1} = \mathfrak{a}\cdot P_{\mathfrak{a}}.$$

Folglich, wenn man alle diese Gleichungen mit einander multiplicirt, und links und rechts mit den gemeinschaftlichen Faktoren wegdividirt, auch 1 statt P_0 setzt:

$$z^{\mathfrak{a}|-1} = \mathfrak{a}!\,P_{\mathfrak{a}};$$

also $$P_a = \frac{z^{a|-1}}{a!};$$

d. h. der unbestimmte Koeffizient P_a ist jetzt bestimmt und als derjenige Ausdruck gefunden worden, welchen wir (§. 14.) mit z_a bezeichnet haben, und welcher unter dem Namen des Binomial-Koeffizienten bekannt zu sein pflegt.

Also hat man

$$11)\quad (1+x)^z = S[z_a \cdot x^a] = S\left[\frac{z^{a|-1}}{a!} \cdot x^a\right],$$

wo der Ausdruck zur Rechten jedoch nur einen Werth von $(1+x)^z$ repräsentirt, aus welchem aber alle Werthe hervorgehen, wenn man ihn noch mit allen Werthen von 1^z multiplicirt.

Ist aber gefunden, für jedes allgemeine z,

$$(1+x)^z = S[z_c \cdot x^c],$$

so multiplicire man links und rechts mit a^z, so erhält man

$$(a+ax)^z = S[z_c \cdot a^z x^c];$$

und wenn man $ax = b$, also $x = \frac{b}{a}$ setzt,

$$12)\quad (a+b)^z = S[z_c \cdot a^{z-c} \cdot b^c],$$

welcher Ausdruck zur Rechten jedoch in der Form

$$a^z \cdot S[z_c \cdot a^{-c} \cdot b^c]$$

geschrieben gedacht werden muß, wenn man alle Reihen von einander abgesondert sehen will, welche der allgemeinen Potenz $(a+b)^z$ entsprechen.

Also findet der binomische Lehrsatz, mit dieser letztern Beschränkung, auch noch für allgemeine Potenzen statt, und zwar so, wie er in den hiesigen Formeln (NNr. 11. und 12.) ausgedrückt sich findet, so daß der Ausdruck zur Rechten eine unendliche Reihe ist.

§. 227.

Ganz auf dieselbe Weise wie solches (§§. 64.—67.) geschehen ist, leitet man nun aus diesem allgemeinen binomischen Lehrsatze,

den trinomischen, ꝛc. ꝛc. ꝛc., und zuletzt den polynomischen Lehrsatz für allgemeine Potenzen ab, nämlich

$$\text{I.}\qquad (a+b)^z \quad = S\left[\frac{z^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot a^{z-\mathfrak{b}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\right] = a^z\cdot S\left[\frac{z^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}\cdot\frac{b^{\mathfrak{b}}}{a^{\mathfrak{b}}}\right];$$

$$\text{II.}\qquad (a+b+c)^z \quad = S\left[\frac{z^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!}\cdot a^{z-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\right];$$

$$\text{III.}\quad (a+b+c+d)^z = S\left[\frac{z^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}|-1}}{\mathfrak{b}!\ \mathfrak{c}!\ \mathfrak{d}!}\cdot a^{z-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}\cdot b^{\mathfrak{b}}\cdot c^{\mathfrak{c}}\cdot d^{\mathfrak{d}}\right].$$

Und daraus findet sich zuletzt ganz allgemein für jedes z:

$$(\odot)\cdots\qquad (a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+\cdots\text{ in inf.})^z$$

$$= S\left[A\cdot a_0^{\,z-\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3\cdots-\mathfrak{a}_n}\cdot(a_1)^{\mathfrak{a}_1}\cdot(a_2)^{\mathfrak{a}_2}\cdot(a_3)^{\mathfrak{a}_3}\cdots(a_n)^{\mathfrak{a}_n}\times x^n\right]_{\mathfrak{a}_1+2\cdot\mathfrak{a}_2+3\cdot\mathfrak{a}_3+\cdots+n\cdot\mathfrak{a}_n=n}$$

wo A statt $\dfrac{z^{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3+\cdots+\mathfrak{a}_n|-1}}{(\mathfrak{a}_1)!\,(\mathfrak{a}_2)!\,(\mathfrak{a}_3)!\cdots(\mathfrak{a}_n)!}$ gesetzt worden ist; wie aus der Betrachtung und Ableitung derselben Formel, für den Fall, daß z eine positive ganze Zahl ist (in den §§. 117. bis 121.), sogleich hervorgeht.

Dieser Satz ist aber der polynomische Lehrsatz in seiner allgemeinsten Gestalt. — Er liefert jedoch zur Rechten, im Falle auch die Reihe konvergent, also brauchbar sein sollte, doch jedesmal nur dann die von einander abgesonderten Werthe der Potenz zur Linken, wenn man zur Rechten a^z als einen und denselben gemeinschaftlichen Faktor herausrückt. Die unendliche Reihe, die als zweiter Faktor zur Rechten bleibt, hat dann, wenn sie überhaupt einen Werth hat, nur einen einzigen, und dieser wird also mit allen Werthen des ersten Faktors a^z multiplicirt.

Anmerkung 1. Man kann sich des hier erwiesenen Satzes bedienen, um aus einer numerischen positiven Zahl irgend eine ν^{te} absolute Wurzel numerisch zu ziehen. — Man hat nämlich

$$(a+b)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a+b} = a^{\frac{1}{\nu}}\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

weil nun

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)_{\mathfrak{a}} = \frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}!} = \frac{1^{\mathfrak{a}|-\nu}}{\mathfrak{a}!\,\nu^{\mathfrak{a}}} = \frac{1\cdot(1-\nu)^{\mathfrak{a}-1|-\nu}}{\mathfrak{a}!\,\nu^{\mathfrak{a}}} = \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}(\nu-1)^{\mathfrak{a}-1|\nu}}{\mathfrak{a}!\,\nu^{\mathfrak{a}}}$$

ist, wo statt $(-1)^{\mathfrak{a}-1}$ auch $(-1)^{\mathfrak{a}+1}$ geschrieben werden kann, so hat man nach dem binomischen Lehrsatze,

$$\sqrt[\nu]{a+b} = \sqrt[\nu]{a}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\cdot\frac{(\nu-1)^{\mathfrak{a}-1|\nu}}{\mathfrak{a}!\,\nu^{\mathfrak{a}}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{a}}\right],$$

oder

$$\sqrt[\nu]{a+b} = \sqrt[\nu]{a}\cdot\left[1+\frac{1}{\nu}\cdot\frac{b}{a}-\frac{\nu-1}{2!\,\nu^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{3!\,\nu^3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{(\nu-1)(2\nu-1)(3\nu-1)}{4!\,\nu^4}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\cdots \text{ in inf.}\right]$$

Sollte also z. B. $\sqrt[3]{70}$ numerisch gefunden werden, so würde man statt a setzen unter den Potenzen 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, ꝛc. diejenige, nämlich 4^3 oder 64, welche der Zahl 70 zunächst kommt, und statt b das noch fehlende, nämlich 6, damit

$a+b = 64+6 = 70$ werde, wo dann $\frac{b}{a} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$ ist, und man hat dann, weil $\sqrt[\nu]{a} = \sqrt[3]{64} = 4$ ist,

$$\sqrt[3]{70} = 4\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{32}-\frac{2}{2\cdot3^2}\cdot\frac{3^2}{(32)^2}+\frac{2\cdot5}{3!\,3^3}\cdot\frac{3^3}{(32)^3} - \frac{2\cdot5\cdot8}{4!\,3^4}\cdot\frac{3^4}{(32)^4}+\cdots \text{ in inf.}\right]$$

$$= 4\cdot\left[1+\frac{1}{32}-\frac{1}{(32)^2}+\frac{5}{3\cdot(32)^3}-\frac{2\cdot5}{3\cdot(32)^4}+\frac{2\cdot11}{3\cdot(32)^5}-\cdots \text{ in inf.}\right],$$

von welcher Reihe dann einige erste Glieder berechnet, die übrigen aber außer Acht gelassen zu werden pflegen.

Anmerkung 2. In der Anwendung solcher Mittel, wie das eben beschriebene, muß man jedoch ungemein vorsichtig sein, um nicht ein so berechnetes Resultat für den praktischen Zweck als genau genug anzusehen, während man den gemachten Fehler vielleicht noch nicht einmal zu beurtheilen im Stande ist. — Es

muß daher eine feine praktische Analysis, bei solchen Näherungsrechnungen, wie sie die Praxis jedesmal allein nur fordert, ihr Augenmerk vorzüglich auf die Berechnung der Fehler richten, welche in jedem Falle gemacht werden, oder vielmehr auf die Berechnung der Grenzen, welche diese Fehler nicht übersteigen können. — Davon in spätern Theilen dieses Werkes.

Anmerkg. 3. Ist b gegen a sehr klein, so daß $\frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch wird, so kann man in der Formel der Anmerkung 1.) blos die beiden ersten Glieder nehmen, nämlich

$$\sqrt[\nu]{a+b} = \sqrt[\nu]{a}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\cdot\frac{b}{a}\right) = \alpha+\frac{b}{\nu\cdot\alpha^{\nu-1}},$$

wo α die $\sqrt[\nu]{a}$, d. h. etwas vorstellt, was sich bereits der gesuchten $\sqrt[\nu]{(a+b)}$ bedeutend nähert. Das Glied $\frac{b}{\nu\cdot\alpha^{\nu-1}}$ giebt dann die zweite Annäherung.

§. 228.

Der allgemeinen Potenz steht natürlich auch ein allgemeiner Logarithme, wie noch eine allgemeinste Wurzel gegenüber.

Unter dem „allgemeinen Logarithmen" b?a verstehen wir jeden Ausdruck x, welcher die Eigenschaft hat, daß $a^x = b$ wird, wobei b der Logarithmand, a die Basis des Logarithmen genannt wird. Beide, b und a, sind beliebig reell oder imaginär.

Soll aber a^x d. h. $e^{x\cdot log\, a} = b$ sein, so muß $x\cdot log\, a = log\, b$ genommen werden, und daher findet sich x d. h.

$$b?a = \frac{log\, b}{log\, a},$$

so daß der allgemeine Logarithme unendlich mal unendlich viele Werthe hat. Es liegt dies, wie man sieht, darin, daß $a^x = e^{x\cdot log\, a}$ unendlich viele Werthe hat, nach den verschiedenen

Werthen des *log* a, und daß jeder dieser Werthe = b werden kann, während, damit dies geschieht, für jeden Werth des *log* a noch unendlich viele Exponenten denselben Werth der Potenz geben.

Es ist nun sehr leicht, die Werthe des allgemeinen Logarithmen $(\alpha+\beta\cdot i)?(p+q\cdot i)$ auszurechnen (wobei man finden wird, daß gewisse imaginäre Zahlen, für eine imaginäre Basis, reelle Werthe ihres Logarithmen geben), — die Formeln hinzustellen, welche den Gegensatz des allgemeinen Logarithmen zur allgemeinen Potenz und die Beziehungen desselben zu den vorangegangenen Operationen, aussprechen (also die Gesetze, nach denen mit allgemeinen Logarithmen gerechnet werden kann), — mit einem Worte, die Eigenschaften dieser allgemeinen Logarithmen aus ihrer Definition abzuleiten. Wir entheben uns aber hier des weiteren Verfolges, weil wir zur Zeit keinen praktischen Nutzen davon absehen.

Eben so kann man den Begriff der $\sqrt[b]{a}$, wo b wie a ganz allgemein, eben so gut reell als imaginär gedacht wird, aufstellen mittelst der Gleichung

$$\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}},$$

weil in diesem allgemeineren Begriff, der frühere für $\sqrt[m]{a}$ aufgestellte (wo m positiv ganz vorausgesetzt wird) enthalten ist. — Dies wäre aber vollends von keinem Nutzen, da wir nur ein neues Zeichen einführten, für einen, in allen seinen Konsequenzen bereits untersuchten Begriff. Selbst die Einführung des Zeichens $\sqrt[m]{a}$, wo m positiv ganz ist, in der Bedeutung der allgemeinen Wurzel des §. 223. war eigentlich überflüssig, eben weil das Zeichen $a^{\frac{1}{m}}$ demselben Begriff vollkommen entspricht, und der letztere Begriff bereits untersucht war. Doch gewährte uns diese Einführung einige Bequemlichkeit und mußte auch schon deshalb geschehen, weil dieses Zeichen einmal gebräuchlich geworden ist.

Eilftes Kapitel.

Von den (algebraischen) höhern Gleichungen.

Erste Abtheilung.

Fundamental-Sätze.

§. 229.

In dem fünften Kapitel haben wir bereits die wichtigsten elementaren Eigenschaften der ganzen Funktionen von x, von einem beliebigen m^{ten} Grade, entwickelt. Wir fügen hier noch folgende hinzu:

I. Wird eine reelle ganze Funktion F_x von x, für $x = p + q \cdot i$, der Null gleich, so wird sie auch allemal für $x = p - q \cdot i$ der Null gleich; wo p und q dieselben reellen Werthe vorstellen. Denn da i jede der beiden Formen von $\sqrt{-1}$ vorstellt, so muß jede Gleichung wahr bleiben, wenn der andere Werth $-i$ statt i gesetzt wird, während die Koeffizienten der Gleichung, da sie alle reell vorausgesetzt sind, sich nicht ändern. — Nach §. 81. ist dann dieselbe ganze Funktion F_x nicht bloß durch $x-(p+q \cdot i)$, sondern auch durch $x-(p-q \cdot i)$ theilbar, wenn nur q nicht Null ist, so daß beide Werthe $p \pm q \cdot i$ wirklich imaginär sind.

Daraus folgt aber weiter, daß dieselbe ganze Funktion F_x dann auch noch durch das Produkt

$$[x-(p+q \cdot i)][x-(p-q \cdot i)] \quad \text{d. h. durch} \quad x^2-2px+(p^2+q^2)$$

theilbar, und der Quotient $\dfrac{F_x}{x^2-2px+(p^2+q^2)}$ einer ganzen

Funktion vom $(m-2)^{ten}$ Grade gleich ist *). — Verwandelt man die eine imaginäre Zahl $p+q\cdot i$ (nach §. 170.) in das Produkt $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ oder $r\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)$, so ist die andere $p-q\cdot i$, $=r\cdot e^{-\varphi\cdot i}=r\cdot(Cos\,\varphi-i\cdot Sin\,\varphi)$; und der Doppel-Faktor $x^2-2px+(p^2+q^2)$ nimmt dann diese Form an, nämlich $(x-r\cdot e^{\varphi\cdot i})(x-r\cdot e^{-\varphi\cdot i})$ d. h. $x^2-(e^{\varphi\cdot i}+e^{-\varphi\cdot i})\cdot rx+r^2$ d. h. $x^2-2rx\cdot Cos\,\varphi+r^2$.

Dieses alles gilt nicht mehr, wenn die ganze Funktion F_x einen, oder mehrere imaginäre Koeffizienten hat.

II. Ist eine ganze Funktion F_x mit beliebigen (reellen oder imaginären) Koeffizienten durch den Doppel-Faktor x^2+ax+b theilbar, so ist sie auch durch jeden der beiden einfachen Faktoren $x-\alpha$ und $x-\beta$ theilbar, in welche sich x^2+ax+b (nach dem I. Th. d. W.) selbst wieder zerlegen läßt.

Soll aber $x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ werden, so sind α und β die beiden Werthe von x, welche x^2+ax+b, $=0$ machen, so daß man hat

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b}.$$

Sind nun a und b reell, so sind die beiden einfachen Faktoren $x-\alpha$ und $x-\beta$ reell **), so oft $\frac{1}{4}a^2-b$ positiv oder Null ist;

*) Es ist nämlich

$$F_x=[x-(p+q\cdot i)]\cdot\varphi_x,$$

wo φ_x vom $(m-1)^{ten}$ Grade ist. Da nun F_x für $x=p-q\cdot i$ ebenfalls der Null gleich wird, dieser letztere Werth von x aber den ersteren Faktor $x-(p+q\cdot i)$ des Produkts $[x-(p+q\cdot i)]\cdot\varphi_x$ in $-2q\cdot i$ verwandelt also nie in Null, (weil q nicht Null ist), so muß der andere Faktor φ_x, für $x=p-q\cdot i$, der Null gleich werden, folglich φ_x die Form $[x-(p-q\cdot i)]\cdot\psi_x$ annehmen können, wo ψ_x vom $(m-2)^{ten}$ Grade ist.

**) Man nennt eine ganze Funktion von x (also auch eine trinomische x^2+ax+b und die binomischen $x-\alpha$ und $x-\beta$) reell oder imaginär, wenn ihre Koeffizienten alle reell sind, oder wenn sie nicht alle reell sind. — Die Ziffernwerthe also, welche x selbst noch annehmen kann, kommen dabei

sie sind beide imaginär und von der Form $x-(p+q\cdot i)$ und $x-(p-q\cdot i)$, so oft $\frac{1}{4}a^2-b$ negativ ist; und dabei ist $p=-\frac{1}{2}a$ und $q=\sqrt{b-\frac{1}{4}a^2}$. — Nur in dem letztern Falle kann der Doppel-Faktor die Form $x^2-2rx\cdot Cos\,\varphi+r^2$ annehmen, wenn nämlich φ einen wirklichen Kreisbogen ausdrücken soll.

III. Eine reelle (d. h. mit lauter reellen Koeffizienten versehene) ganze Funktion von x, ändert sich stetig mit den sich stetig ändernden reellen Werthen von x (§. 95.).

Dasselbe läßt sich aber jetzt viel allgemeiner aussprechen. Es gilt nämlich noch, nicht bloß für jede ganze Funktion F_x mit beliebigen (reellen oder imaginären) Koeffizienten von der Form $\alpha+\beta\cdot i$, sondern auch, wenn (gleichzeitig) sich stetig ändernde imaginäre Werthe von x (von der Form $p+q\cdot i$) statt der reellen gedacht werden; d. h. wenn

$x=p+q\cdot i=r\cdot e^{\varphi\cdot i}=r\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)$ gesetzt und dadurch F_x auf die Form $P+Q\cdot i=R\cdot e^{\psi\cdot i}=R\cdot(Cos\,\psi+i\cdot Sin\,\psi)$ gebracht wird, so ändern sich, P und Q oder R und ψ mit den stetig sich ändernden Werthen p und q oder r und φ ebenfalls nur stetig, in dem Sinne als die stetige Aenderung im §. 94. erklärt worden ist.

Denn es sei

1) $$F_x=S[(b_a+c_a\cdot i)\cdot x^{m-a}]$$

die ganze Funktion von x, vom m^{ten} Grade (weshalb a die Werthe 0, 1, 2, 3, bis m vorstellt, aber keinen Werth der $>m$ ist, was man statt mit Worten durch die untergesetzte Gleichung $a+b=m$ hätte ausdrücken können), deren Koeffizienten $p_0+q_0\cdot i$, $p_1+q_1\cdot i$, $p_2+q_2\cdot i$, ⋯ $p_m+q_m\cdot i$ beliebig reell oder imaginär sein sollen. Setzt man nun statt x irgend einen Werth $p+q\cdot i$, $=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ und verwandelt man gleichzeitig jeden der Koeffizienten $b_a+c_a\cdot i$ in die Form $\varrho_a\cdot e^{\xi_a\cdot i}$, so wird

---

nicht in Betrachtung, eben weil man sich bei einer Funktion von x, unter x gar keine bestimmte Zahl, sondern nur einen Träger der Operations-Zeichen denkt.

2) $F_{p+q\cdot i} = S[\varrho_\alpha \cdot r^{m-\alpha} \cdot e^{(\xi_\alpha + (m-\alpha)\varphi)\cdot i}]$

$= S[\varrho_\alpha \cdot r^{m-\alpha} \cdot (Cos[\xi_\alpha + (m-\alpha)\varphi] + i \cdot Sin[\xi_\alpha + (m-\alpha)\varphi])]$.

Vermehrt man nun φ um ein unendlich kleines *) h, so lassen sich $Cos(\xi_\alpha + (m-\alpha)\varphi + (m-\alpha)h)$ und $Sin(\xi_\alpha + (m-\alpha)\varphi + (m-\alpha)h)$ doch immer in Reihen umformen, deren allererste Glieder die alten Werthe derselben sind, während die folgenden Glieder nach ganzen Potenzen von h fortlaufen. Also ist der neue Werth von F_x für diesen neuen Werth von x, während r den alten Werth unverändert behält, nur um Glieder verschieden von der Form

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 \cdot h + B_2 \cdot h^2 + B_3 \cdot h^3 + \text{ in inf.} \\ + i \cdot (C_1 \cdot h + C_2 \cdot h^2 + C_3 \cdot h^3 + \text{ in inf.} \end{array}\right\}',$$

während die Summen dieser einzelnen Reihen (nach §. 131.) mit h zugleich unendlich klein sind.

Gerade so aber erhellet, daß, wenn man in diesem zweiten Werth von F_x, auch r noch um ein unendlich kleines h′ vermehrt oder vermindert, ein dritter Werth von F_x entsteht, der nach Potenzen von h′ entwickelt werden kann und der von dem zweiten Werth von F_x nur um Glieder verschieden ist, von der Form

$$\left\{\begin{array}{l} D_1 \cdot h' + D_2 \cdot h'^2 + D_3 \cdot h'^3 + \cdots + D_m \cdot h'^m \\ + i \cdot (E_1 \cdot h' + E_2 \cdot h'^2 + E_3 \cdot h'^3 + \cdots + E_m \cdot h'^m \end{array}\right\}',$$

während auch die Summe, jeder dieser beiden (endlichen) Reihen mit h′ zugleich, unendlich klein ist (nach §§. 91. 93.).

Dadurch ist aber die Behauptung erwiesen.

---

*) Unendlich klein haben wir dasjenige genannt, was immer noch kleiner gedacht wird, als jede noch so kleine aber bestimmte Zahl. — Dem Unendlich-Kleinen liegt nur die Null nächst an, und jede noch so klein gedachte aber bestimmte Zahl $\varkappa$, ist von dem unendlich-kleinen h unendlich weit entfernt, weil man von $\varkappa$ doch noch jeden beliebigen, z. B. 1000ten, 1000000ten, u. s. w.; Theil sich denken kann, und davon wieder jeden beliebigen bestimmten Theil, und h dann doch immer noch kleiner gedacht werden muß.

IV. Giebt man in $x = p + q \cdot i = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$, dem r irgend einen bestimmten positiven Werth, dem φ aber nach und nach alle stetig auf einander folgenden Werthe, von 0 an bis zu 2π hin, so bilden die Repräsentanten M der zugehörigen (imaginären) Werthe von $p + q \cdot i$, eine Kreislinie (Fig. 9.), deren Radius der bestimmte Werth von r und deren Mittelpunkt O ist (§§. 207. 208.).

Gleichzeitig aber werden die Repräsentanten M_1 der zugehörigen Werthe des allerersten Gliedes $\varrho_0 \cdot r^m \cdot e^{(\xi_0 + m\varphi) \cdot i}$ von

$$3) \quad F_{p+q\cdot i} = S[\varrho_a \cdot r^{m-a} \cdot e^{(\xi_a + (m-a)\varphi) \cdot i}],$$

eine Kreis-Linie bilden, welche m mal in sich selber zurück läuft und deren Radius $\varrho_0 \cdot r^m$ ist, welcher mit r zugleich einen und denselben bestimmten Werth behält.

Denn, während φ alle Werthe durchläuft von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, durchläuft $m\varphi$ schon alle Werthe von 0 bis 2π; es wird also $m\varphi$, — während φ alle Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ durchläuft, — die Werthe von 0 bis 2π, von 2π bis 4π, von 4π bis 6π, u. s. f. und zuletzt noch alle Werthe von $2(m-1)\pi$ bis $2m\pi$ durchlaufen. Der Repräsentant M_1 von $\varrho_0 \cdot r^m \cdot e^{(\xi_0 + m\varphi) \cdot i}$ beschreibt also den Kreis m mal.

V. Bezeichnet man den Model $\varrho_0 \cdot r^m$ dieses allerersten Gliedes von $F_{p+q\cdot i}$, durch r_1, so wie dieses Glied selbst durch $p_1 + q_1 \cdot i$, so daß man hat

1) $p_1 = \varrho_0 \cdot r^m \cdot Cos(\xi_0 + m\varphi)$ und 2) $q_1 = \varrho_0 \cdot r^m \cdot Sin(\xi_0 + m\varphi)$,

so wie 3) $r_1 = \varrho_0 \cdot r^m$;

verwandelt man ferner die Summe aller (m) übrigen Glieder von $F_{p+q\cdot i}$ in $p_2 + q_2 \cdot i$, und bezeichnet man den Model dieser imaginären Zahl durch r_2, so daß sich findet

$$\left.\begin{array}{l} 4) \quad p_2 = S[\varrho_a \cdot r^{m-a} \cdot Cos(\xi_a + (m-a)\varphi)] \\ \text{und} \\ 5) \quad q_2 = S[\varrho_a \cdot r^{m-a} \cdot Sin(\xi_a + (m-a)\varphi)] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{wo } a \text{ nur die Werthe} \\ 1, 2, 3 \text{ bis } m \text{ hat, aber} \\ \text{nicht den Werth } 0, \end{array}$$

und 6) $r_2 = +\sqrt{p_2^2+q_2^2}$;

bezeichnet man ferner den Werth $F_{p+q\cdot i}$ selbst durch $p_0+q_0\cdot i$ und dessen Model durch r_0, so daß man hat

$$\left.\begin{array}{l} 7)\quad p_0 = S[\varrho_a\cdot r^{m-a}\cdot Cos(\xi_a+(m-a)\varphi)] \\ \text{und} \\ 8)\quad q_0 = S[\varrho_a\cdot r^{m-a}\cdot Sin(\xi_a+(m-a)\varphi)] \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{für } a=0 \\ \text{bis} \\ a=m \end{array}$$

und 9) $r_0 = +\sqrt{p_0^2+q_0^2}$;

sind endlich M_1, M_2 und M_0 die Repräsentanten dieser imaginären Zahlen $p_1+q_1\cdot i$ (des allerersten Gliedes von $F_{p+q\cdot i}$), $p_2+q_2\cdot i$ (der Summe aller übrigen Glieder von $F_{p+q\cdot i}$), und $p_0+q_0\cdot i$ (des ganzen Werthes $F_{p+q\cdot i}$); so bilden die Punkte O, M_1, M_2 und M_0 (nach §. 208. Nr. 4.) die Ecken eines Parallelogramms, in welchem $OM_1 = r_1$, $OM_2 = r_2$ und $OM_0 = r_0$ ist; und die Richtung der Diagonale OM_0 macht mit der Richtung der Seite OM_1 einen unendlich kleinen Winkel, wenn der Quotient $\frac{r_2}{r_1}$ unendlich klein ist (nach §. 208. Nr. 5.); dabei ist allemal

10) $r_0 < r_1 + r_2$

und 11) $r_2 < S[\varrho_a\cdot r^{m-a}]$ von $a=1$ bis $a=m$

(nach §. 208. Nr. 6.), weil $\varrho_1\cdot r^{m-1}$, $\varrho_2\cdot r^{m-2}$, $\varrho_3\cdot r^{m-3}$, $\cdots$ $\varrho_m\cdot r^0$ die Model aller übrigen Glieder von $F_{p+q\cdot i}$ sind.

VI. Nun kann man, — wenn $p+q\cdot i = r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ statt x in die ganze Funktion $F_x = S[(b_a+c_a\cdot i)x^{m-a}]$ gesetzt worden ist, — dem r allemal einen so großen Werth geben, daß (nach V. Nr. 3.)

r_1 d. h. $\varrho_0\cdot r^m$, die Summe $\varrho_1\cdot r^{m-1}+\varrho_2\cdot r^{m-2}+\cdots+\varrho_m\cdot r^0$, also (nach V. Nr. 11.) um so mehr den Werth r_2 um jeden noch so groß gedachten Werth übersteigt (nach §. 92.); — für einen so großen positiven Werth von r, wird also (nach V. Nr. 11. und V. Nr. 3.) der Quotient $\frac{r_2}{r_1}$ einen Werth anneh-

men, der kleiner ist, als jede noch so klein gedachte bestimmte Zahl; folglich wird dann der Winkel, den OM_0 mit OM_1 macht, — wie auch der Werth von φ (zwischen 0 und 2π) genommen werden mag, — stets kleiner bleiben, als jeder noch so klein gedachte bestimmte Winkel.

Weil aber, während φ nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ erhält, (nach IV.) die Richtung OM_1 nicht weniger und nicht mehr als m mal um den Punkt O sich herumdreht, so muß für einen so groß gedachten positiven Werth von r, natürlich auch die Richtung von OM_0, — weil der Winkel M_1OM_0 stets (für jeden der Werthe von φ) unendlich klein bleibt, — m mal um O sich herumdrehen, und der Repräsentant M_0 des Werthes $F_{p+q\cdot i}$ oder $p_0 + q_0 \cdot i$, wird daher ebenfalls m mal um O sich herum bewegen, dabei aber (weil der Model r_0 für verschiedene Werthe von φ, verschiedene Werthe annimmt) in verschiedener Entfernung von O abstehen, während M_1 mit dem (stets derselbe bleibenden) Radius $r_1 (= \varrho_0 \cdot r^m)$ m mal seine Kreislinie um O beschreibt. Die von M_0 beschriebene Kurve wird also zwar m mal um O sich herumschlingen, aber (in der Regel) keine Kreislinie bilden, jedoch in sich selber zurückkehren, weil r_0 also OM_0 für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 2\pi$ (nach V. NNr. 7.–9.) denselben Werth erhält. — Dies alles gilt jedoch nur dann, wenn r einen so großen positiven Werth erhalten hat.

Läßt man nun r nach und nach stetig abnehmen, so wird für jeden, um unendlich wenig kleiner gedachten Werth von r, die für $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ von M_0 beschriebene neue Kurve sich dicht an die vorhergehende anschließen (nach III.), und die Repräsentanten M_0 der Werthe $F_{p+q\cdot i}$ oder $p_0 + q_0 \cdot i$ werden daher, wenn nicht die ganze Ebene der Koordinaten-Axen U'OU und V'OV, doch nothwendig einen Theil dieser Ebene mehrere Male oder doch einmal völlig bedecken und nie vereinzelt stehen, auch nie in vereinzelten Kurven; und da für $r = 0$, der Werth $F_{p+q\cdot i}$ in F_0 d. h. in $\varrho_m \cdot e^{\xi_m \cdot i}$ d. h. in

$\varrho_m \cdot (Cos\,\xi_m + i \cdot Sin\,\xi_m)$ übergeht (für jeden Werth von φ), so geht für $r=0$, die Kurve, welche M_0 für andere Werthe von r beschrieben hat, in einen einzigen Punkt A über; nimmt man dagegen r (positiv und) unendlich klein, so muß die von M_0 beschriebene Kurve sich um diesen Punkt A herum, dicht anschmiegen.

Wenn aber die erstere von M_0 (für einen so sehr groß gedachten Werth von r) beschriebene Kurve sich entschieden um den Punkt O (m mal) herumschlingt, die letztere dagegen (für einen unendlich kleinen Werth von r gedacht) dicht um den Punkt A herum liegt, — wenn ferner alle diese Kurven, für die nach und nach, von $r=\infty$ an bis zu $r=\frac{1}{\infty}$ hin, stetig abnehmenden Werthe von r, dicht an einander liegen müssen, so folgt mit unabweislicher Nothwendigkeit, daß mindestens eine dieser Kurven durch den Punkt O hindurch gehen muß, wenn nicht A selbst mit O zusammenfällt, was wir dadurch verhindern wollen, daß wir den letzten Koeffizienten $\varrho_m \cdot e^{\xi_m \cdot i}$ der gegebenen ganzen Funktion F_x, nicht Null sein lassen *).

Fällt aber M_0 in O, so ist $p_0=0$ und $q_0=0$, also $F_{p+q\cdot i}=0$; d. h. die Werthe von p und q, also die Werthe von r und φ, für welche der Repräsentant M_0 von $F_{p+q\cdot i}$, mit dem Punkte O zusammenfällt, machen $F_{p+q\cdot i}$ der Null gleich.

Folglich ist durch das Vorstehende strenge erwiesen, daß es immer mindestens einen Werth $p+q\cdot i$ von x giebt, welcher die gegebene ganze Funktion F_x d. h. $S[(b_a+c_a\cdot i)x^{m-a}]$ vom

---

*) Ist das letzte Glied A_m einer ganzen Funktion F_x oder $A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\cdots+A_m$ der Null gleich, so wird sie selbst für $x=0$ der Null gleich, und sie nimmt dann die Form

$$x\cdot(A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\cdots+A_{m-1})$$

an, so daß man es dann nur mit einer ganzen Funktion vom niedrigeren Grade zu thun hat.

m^{ten} Grade, der Null gleich macht, mögen ihre Koeffizienten $b_\alpha + c_\alpha \cdot i$ reell (also $c_\alpha = 0$) oder imaginär sein *).

VII. Daraus folgt aber wieder, daß es im Allgemeinen allemal m solche Werthe von x giebt, und auch nie mehr als m Werthe, welche die ganze Funktion F_x oder

$$A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m$$

der Null gleich machen, so lange die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, $\cdots$ A_{m-1} und A_m reell oder imaginär (von der Form $b + c \cdot i$) sind.

Und gleichzeitig folgt noch unabweisbar, daß wenn diese m Werthe durch w_1, w_2, w_3, $\cdots$ w_m bezeichnet werden, dieselbe ganze Funktion F_x allemal dem Produkte

$$A_0 \cdot (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \cdots (x - w_m)$$

(für jeden Werth von x) gleich sein müsse, — auch, daß jede solche ganze Funktion F_x immer nur in dieselben m einfachen (binomischen) Faktoren sich zerlegen lasse.

Denn, ist w_1 der eine (nach VI.) allemal existirende Werth von x, welcher F_x, $= 0$ macht, so ist (nach I. oder nach §. 81.) allemal

$$1) \qquad F_x = (x - w_1) \cdot G_x,$$

wo G_x vom $(m-1)^{ten}$ Grade mit reellen oder imaginären Koeffizienten und von der Form $A_0 \cdot x^{m-1} + B_1 \cdot x^{m-2} + \cdots + B_{m-1}$ ist. Aber eben deshalb giebt es nun (nach VI.) wieder einen Werth w_2 von x, welcher G_x, $= 0$ macht, so daß also auch (nach I.)

---

*) Von diesem höchst wichtigen Satz haben wir in der 2ten Auflage den Beweis des Cauchy gegeben. — Man hat mehrere schöne Beweise von Gauß (in den Göttinger Commentar.) und einen guten Beweis von dem Prof. v. Staudt zu Erlangen (in Crelle's Journal); wir haben aber hier dem Wesen nach einen Beweis gegeben, den Prof. Ullherr zu Nürnberg in Crelle's Journal mitgetheilt hat und welchen wir für den elementarsten und anschaulichsten halten.

$$2) \qquad G_x = (x - w_2) \cdot H_x$$

werden muß, wo H_x vom $(m-2)^{ten}$ Grade und von der Form $A_0 \cdot x^{m-2} + C_1 \cdot x^{m-3} + \cdots + C_{m-2}$ ist. — Und deshalb giebt es nun wieder (nach VI.) einen reellen oder imaginären Werth w_3 von x, welcher H_x, $= 0$ macht, so daß (nach I.) wiederum

$$3) \qquad H_x = (x - w_3) \cdot K_x$$

werden wird, wo K_x eine ganze Funktion vom $(m-3)^{ten}$ Grade und von der Form $A_0 \cdot x^{m-3} + D_1 \cdot x^{m-4} + \cdots + D_{m-3}$ sein muß, mit reellen oder imaginären Koeffizienten. — Man sieht nun deutlich, wie diese Schlüsse fortgesetzt werden können, und daß zuletzt eine ganze Funktion vom ersten Grade, von der Form $A_0 \cdot x + Q$, als zweiter Faktor sich ergeben muß, welche durch $x = -\frac{Q}{A_0} = w_m$ der Null gleich wird, so daß er selbst die Form $(x - w_m) \cdot A_0$ annimmt.

Dadurch ist endlich bewiesen, daß es allemal m Werthe $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ giebt, die so sind, daß man die ganze Funktion

$$4) \qquad F_x \quad \text{d. h.} \quad S[A_a \cdot x^{m-a}],$$
$$= A_0 \cdot (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3) \cdots (x - w_m)$$

hat.

Daraus folgt aber sogleich noch, daß jeder dieser m Werthe w, einen dieser m Faktoren, und folglich auch das ganze Produkt, also die Funktion F_x selbst, der Null gleich macht.

Endlich folgt hieraus noch, daß, wenn irgend ein Werth w von x existirt, welcher F_x, $= 0$ macht, dann auch das Produkt

$$5) \qquad A_0(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3) \cdots (w - w_m) = 0$$

sein müsse, während A_0 nie Null ist (weil sonst F_x von einem niedrigeren, als vom m^{ten} Grade sein würde). Da man nun zunächst mit A_0 und dann noch mit jedem dieser m letztern Faktoren, welcher nicht Null ist, die Gleichung 5.) dividiren kann, so erhält man zuletzt als Endgleichung, daß einer dieser

Faktoren z. B. $w - w_n = 0$, d. h. daß der Werth w **einem** der m Werthe $w_1, w_2, \cdots w_m$ gleich sein müsse.

Ließe sich aber F_x noch in ein anderes Produkt $A_0 \cdot (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \cdots (x-\nu)$ von m einfachen Faktoren zerlegen, so würden die Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \nu$ von x, die Funktion F_x, der Null gleich machen, während nur die m Werthe $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ diese Eigenschaft haben. Es kann also kein einziger der Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \nu$ ein neuer Werth sein, der nicht mit einem der m Werthe $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ zusammenfiele *). — Dadurch ist aber alles Behauptete erwiesen.

VIII. Aus der Gleichung

$$1) \qquad A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_{m-1}x + A_m = A_0(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3) \cdots (x-w_m)$$

folgt auch noch (weil diese Gleichung für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$ besteht)

$$2) \qquad A_m = (-1)^m \cdot A_0 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_m \quad (= A_0 \cdot (-w_1)(-w_2)(-w_3) \cdots (-w_m)).$$

Dividirt man nun beide Gleichungen durch einander, so findet man, wenn dieselbe ganze Funktion zur Linken in 1.) durch F_x bezeichnet wird, diese neue Form des Produkts, nämlich:

$$3) \quad F_x = A_m\left(1-\frac{x}{w_1}\right)\left(1-\frac{x}{w_2}\right)\left(1-\frac{x}{w_3}\right) \cdots \left(1-\frac{x}{w_m}\right),$$

während auch aus dieser Form noch ersichtlich ist, daß $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ die Werthe von x sind, welche $F_x, = 0$ machen.

§. 230.

Die Gleichung

$$1) \qquad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

*) Im I. Th. d. W. haben wir alles in diesem Paragraphen für die ganze Funktion vom m[ten] Grade erwiesene bereits von den ganzen Funktionen vom 2[ten], 3[ten] und 4[ten] Grade nachgewiesen, so daß die hiesigen Lehren nur eine Verallgemeinerung jener, zuweilen auf ganz anderen Wegen erhaltenen Resultate bilden.

heißt (nach dem I. Th. d. W.) eine algebraische „höhere Gleichung" vom m^{ten} Grade. In ihr konnte die Potenz x^m auch noch einen beliebigen Koeffizienten A_0 haben, der aber nicht Null sein kann (wenn die Gleichung nicht von einem niedrigern Grade sein soll), und deshalb kann man die Gleichung allemal durch ihn wegdividiren, so daß sie die obige Form annimmt.

Eine solche Gleichung setzt voraus, daß der Buchstabe x in ihr, nicht mehr allgemein (ein bloßer Träger der Operationszeichen) ist, sondern gerade einen der (nach §. 229.) allemal existirenden m Werthe $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ vorstellt, welche die ganze Funktion

2) $$F_x = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

der Null gleich machen.

Diese m Werthe $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ heißen die Wurzelwerthe der höhern Gleichung.

§. 231.

Weil (nach §. 229.) allemal die Gleichung

1) $$(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)\cdots(x-w_m)$$
$$= F_x = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

richtig sein muß, für jeden Werth von x (d. h. während x ganz allgemein, als ein bloßer Träger der Operationszeichen gedacht wird), so oft unter $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ die m Wurzelwerthe der höhern Gleichung

2) $$F_x = 0$$

verstanden werden, so folgt, daß die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_m$ dieser höheren Gleichung (2.) als Zusammensetzungen (Funktionen) aus den m Wurzelwerthen $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ erscheinen können und werden; und da jeder der m Wurzelwerthe zur Bildung der Koeffizienten gleichmäßig beiträgt, — in dem Produkt zur Linken von 1.), die Faktoren auch beliebig mit einander vertauscht werden können, so müssen die gedachten Koeffizienten sich auch als symmetrische Funktionen der m

Wurzelwerthe herstellen, d. h. als solche, welche keine wesentliche Aenderung erleiden, wenn auch je zwei beliebige der Wurzelwerthe in ihnen, mit einander vertauscht werden.

Nach den §§. 71. und 72., wo das Produkt solcher m Faktoren bereits hergestellt sich findet, weiß man aber:

a) der erste Koeffizient A_1 ist die Summe aller m Wurzelwerthe, mit entgegengesetztem Vorzeichen;

b) der zweite Koeffizient A_2 ist die Summe der Produkte je zweier der m Wurzelwerthe, ohne Aenderung des Vorzeichens;

c) der dritte Koeffizient A_3 ist die Summe der Produkte je dreier der m Wurzelwerthe, mit entgegengesetztem Vorzeichen; u. s. w. f.; allgemein

d) der n^{te} Koeffizient A_n ist die Summe der Produkte von je n der m Wurzelwerthe, ohne Aenderung des Vorzeichens, wenn n gerade, — aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn n ungerade ist; daher ist auch

e) der letzte Koeffizient A_m dem Produkte $w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_m$ aller m Wurzelwerthe gleich, wenn m gerade; dagegen ist solcher $= -w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_m$, wenn m ungerade.

Daraus folgt sogleich noch:

I. Fehlt in einer höheren Gleichung vom m^{ten} Grade

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

das mit x^{m-1} versehene Glied $A_1 x^{m-1}$, d. h. ist der erste Koeffizient A_1 der Null gleich, so ist die Summe der m Wurzelwerthe der höheren Gleichung, der Null gleich. — Deshalb ist z. B. auch die Summe aller m Werthe von der $\sqrt[m]{a}$, also auch von $\sqrt[m]{1}$ und $\sqrt[m]{(-1)}$, allemal der Null gleich; eben weil diese Werthe die Wurzelwerthe der Gleichungen $x^m - a = 0$, $x^m - 1 = 0$ und $x^m + 1 = 0$ sind.

II. Fehlt aber das letzte Glied A_m (ohne x) d. h. ist $A_m = 0$, so ist das Produkt aller m Wurzelwerthe der Null

gleich; also ist dann wenigstens einer derselben ebenfalls der Null gleich.

III. Fehlen in einer höheren Gleichung vom m^{ten} Grade

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

die letzten n Glieder, d. h. ist $A_m = A_{m-1} = A_{m-2} = \cdots = A_{m-n+1} = 0$, so daß sie bloß die Form

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-n} x^n = 0$$

hat, so sind n der Wurzelwerthe der Null gleich, eben weil die ganze Funktion zur Linken nun den Faktor x^n, d. h. die n gleichen Faktoren $x-0$, $x-0$, $x-0$, 2c. 2c. hat. — Die $m-n$ übrigen Wurzelwerthe sind dann zu gleicher Zeit die Wurzelwerthe der Gleichung

$$x^{m-n} + A_1 x^{m-n-1} + A_2 x^{m-n-2} + \cdots + A_{m-n} = 0.$$

§. 232.

1) Sind in der höhern Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

alle Koeffizienten reell, so hat sie (nach §. 229.) imaginäre Wurzelwerthe entweder gar nicht oder paarweise, und wenn der eine $p+q\cdot i$ oder $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ ist, so ist der andere allemal $p-q\cdot i$ oder $r\cdot e^{-\varphi\cdot i}$, wo p und q, oder r und φ dieselben Werthe behalten. Die Summe dieser beiden Wurzelwerthe ist $2p$ oder $2r\cdot Cos\,\varphi$; ihre Differenz ist $2q\cdot i$ oder $2i\cdot r\cdot Sin\,\varphi$; ihr Produkt ist $= p^2+q^2$ oder $= r^2$, und ihr Quotient $= e^{2\varphi\cdot i} = Cos\,2\varphi + i\cdot Sin\,2\varphi$.

2) Dieselbe höhere Gleichung vom m^{ten} Grade mit reellen Koeffizienten hat daher reelle Wurzelwerthe entweder gar nicht oder in gerader Anzahl, wenn m gerade ist. Sie hat aber allemal mindestens einen reellen Wurzelwerth, und überhaupt die reellen Wurzelwerthe in ungerader Anzahl, wenn m ungerade ist. (Vergl. §. 98.).

3) Ist das letzte Glied A_m derselben höhern Gleichung

negativ, und dabei m gerade, so hat diese Gleichung mindestens zwei reelle Wurzelwerthe, wovon der eine positiv, der andere negativ ist. (Vgl. §. 99.).

§. 233.

I. Ist eine beliebige Gleichung vom m^{ten} Grade gegeben, z. B.

1) $A_0 \cdot x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$,

so darf man in ihr nur $\frac{z}{b}$ statt x setzen, und man hat eine neue höhere Gleichung, nämlich

2) $A_0 z^m + A_1 b x^{m-1} + A_2 b^2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} b^{m-1} x + A_m b^m = 0$,

deren Wurzelwerthe bezüglich die b fachen der Wurzelwerthe der Gleichung 1.) sind; weil aus $x = \frac{z}{b}$ sogleich $z = bx$ folgt.

II. Setzt man aber in die 1.) by statt x, so erhält man eine neue Gleichung, nämlich

3) $A_0 y^m + \frac{A_1}{b} y^{m-1} + \frac{A_2}{b^2} y^{m-2} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{b^{m-1}} y + \frac{A_m}{b^m} = 0$,

deren Wurzelwerthe bezüglich die b^{ten} Theile der Wurzelwerthe der Gleichung 1.) sind; weil aus $x = by$ sogleich $y = \frac{x}{b}$ folgt. — Dies gilt alles, es mag b reell oder imaginär sein.

III. Setzt man $x = \frac{1}{z}$ in die 1.), so erhält man die Gleichung in z, nämlich:

$$A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \cdots + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0,$$

deren Wurzelwerthe $z = \frac{1}{x}$ sind, d. h. die $(-1)^{ten}$ Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung.

IV. Setzt man in die Gleichung 1.) b+z statt x, so erhält man eine neue Gleichung vom m^{ten} Grade, in welcher z

als der Unbekannte betrachtet werden soll, und deren Wurzelwerthe bezüglich von den Wurzelwerthen der gegebenen Gleichung 1.), um b verschieden sind (um b kleiner sind, wenn b positiv ist und wenn die Wurzelwerthe alle reell sind, damit der Begriff „kleiner" Platz greifen kann), während b eben so gut reell wie imaginär sein kann; denn aus $x = b + z$ folgt sogleich $z = x - b$.

Diese neue Gleichung in z erhält man aber schnell und sicher aus der Gleichung 1.), wenn man die ganze Funktion von x, zur Linken derselben durch F_x bezeichnet (nach §. 84.) unmittelbar dadurch, daß man daselbst b statt x und z statt h setzt; sie wird nämlich:

$$4)\quad F_b + F_b^{\mathrm{I}} \cdot z + F_b^{\mathrm{II}} \cdot \frac{z_2}{2!} + F_b^{\mathrm{III}} \cdot \frac{z^3}{3!} + \cdots$$
$$+ F_b^{(m-1)} \cdot \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} + F_b^{(m)} \cdot \frac{z^m}{m!} = 0,$$

wenn F_b, F_b^{I}, F_b^{II}, F_b^{III}, 2c. 2c. das vorstellen, was bezüglich aus F_x, F_x^{I}, F_x^{II}, F_x^{III}, 2c. 2c. hervorgeht, sobald b statt x gesetzt wird.

V. Dabei ersieht man aus §. 83., daß

$$F_b^{(m)} = m!\, A_0, \quad \text{also} \quad F_b^{(m)} \cdot \frac{z^m}{m!} = A_0 z^m$$

und

$$F_b^{(m-1)} = m^{m-1|-1} A_0 b + (m-1)!\, A_1,$$

also $$F_b^{(m-1)} \cdot \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} = (mA_0 b + A_1) z^{m-1}$$

ist. Nimmt man daher

$$mA_0 b + A_1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad b = -\frac{1}{m} \cdot \frac{A_1}{A_0},$$

so wird in der neuen höheren Gleichung (in z) der Koeffizient von z^{m-1}, der Null gleich, so daß das nach $A_0 z^m$ folgende

mit der nächst niedrigeren Potenz von z afficirte Glied, ganz fehlt *).

Die neue Gleichung in z, heißt nun eine reducirte höhere Gleichung vom m^{ten} Grade; in ihr ist die Summe ihrer m Wurzelwerthe, der Null gleich (nach §. 231. I.).

Ist z. B. die gegebene Gleichung $F_x = 0$ die nachstehende vom 3^{ten} Grade, nämlich

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$

so ist die reducirte Gleichung in z, jetzt diese (weil $m = 3$)

$$A_0z^3 + (3A_0b^2 + 2A_1b + A_2)\cdot z + (A_0b^3 + A_1b^2 + A_2b + A_3) = 0,$$

während $b = -\frac{1}{3}\frac{A_1}{A_0}$ ist.

Ist aber die gegebene Gleichung $F_x = 0$ die allgemeine quadratische, nämlich (für $m = 2$)

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0,$$

so ist die reducirte Gleichung in z, jetzt diese

$$A_0\cdot z^2 + (A_0b^2 + A_1b + A_2) = 0$$

während $b = -\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}$ ist. — Diese letztere ist nun eine sogenannte reine quadratische Gleichung, kann sofort aufgelöst werden, und giebt dann, weil $x = b + z = -\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0} + z$ ist, sofort die beiden Werthe von x. — Durch dieses Verfahren haben wir im I. Th. d. W. die allgemeine quadratische Gleichung aufgelöst.

Eben so führte die Auflösung der reducirten kubischen Gleichung im I. Th. d. W. zur Cardanischen Formel, und aus

---

*) Eben so könnte man den, Anfangs unbestimmt gelassenen Werth von b, so bestimmen, daß irgend ein anderer der Koeffizienten der neuen Gleichung in z, (statt des Koeffizienten von z^{m-1}) der Null gleich wird. Man würde aber dann zur Bestimmung von b eine quadratische oder eine Gleichung von höherem Grade erhalten.

ihr folgte dann die Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung, weil man $x = -\frac{1}{3}\frac{A_1}{A_0} + z$ hatte.

Endlich haben wir ebenfalls im I. Th. d. W. aus der Auflösung der reducirten biquadratischen Gleichung, die der allgemeinen abgeleitet, weil für $m = 4$, $x = -\frac{1}{4}\frac{A_1}{A_0} + z$ wurde.

Zweite Abtheilung.

Wie aus einer gegebenen höhern Gleichung, neue höhere Gleichungen gebildet werden können, deren Wurzelwerthe durch eine beliebig gegebene rationale Funktion je zweier, je dreier, u. s. w. der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung ausgedrückt sind. — Die dazu nöthigen Lehrsätze der symmetrischen Funktionen; so wie der Newton'sche Lehrsatz der Potenz-Summen der Wurzelwerthe.

§. 234. Aufgabe.

Es sei gegeben die Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0,$$

welche die vier unbekannten Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3, x_4 hat. — Man soll, ohne diese Wurzelwerthe zu kennen, aus der gegebenen Gleichung eine neue ableiten, deren Wurzelwerthe die Summe je zweier der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung sind.

Auflösung. Man bilde sich alle Wurzelwerthe der neuen Gleichung, subtrahire jeden von einem Buchstaben z. B. z, den man als den Unbekannten einführen will, — multiplicire diese Faktoren alle mit einander und setze das Produkt $= 0$; man erhält dann zunächst

$$(z-x_1-x_2)(z-x_1-x_3)(z-x_1-x_4)(z-x_2-x_3)(z-x_2-x_4)(z-x_3-x_4) = 0.$$

Der Ausdruck links ist nun offenbar eine symmetrische Funk-

tion der vier Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3 und x_4, d. h. eine solche, welche wesentlich sich nicht ändert, wenn je zwei der Wurzelwerthe mit einander vertauscht werden. Verwandelt man daher dieses Produkt links, in eine nach fallenden Potenzen von z geordnete Summe, so daß die Gleichung selbst die Form

$$z^6+B_1z^5+B_2z^4+B_3z^3+B_4z^2+B_5z+B_6=0$$

annimmt, so sind nothwendig auch alle einzelnen dieser letztern Koeffizienten B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und B_6 symmetrische Funktionen derselben Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3 und x_4; und da auch die Koeffizienten A_1, A_2, A_3 und A_4 symmetrische Funktionen derselben Wurzelwerthe sind, so kommt alles darauf an, die erstern in die letztern noch auszudrücken. Man hat aber (nach §. 231.)

1) $x_1+x_2+x_3+x_4 = -A_1$

2) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 = +A_2$

3) $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 = -A_3$

4) $x_1x_2x_3x_4 = +A_4$.

Nun ist zunächst (nach demselben §. 231.) $-B_1$ die Summe der sechs Wurzelwerthe

5) x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_4, x_2+x_3, x_2+x_4 und x_3+x_4;

und diese Summe nimmt x_1, x_2, x_3 und x_4, 3 mal auf; daher findet sich

6) $-B_1=-3A_1$ d. h. $B_1=3A_1$.

Der nächste Koeffizient B_2 ist die Summe der Produkte je zweier der 6 Wurzelwerthe (in 5.) und enthält deshalb die Summe der Quadrate $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ dreimal, und die Summe der Produkte in 2.), zweimal. Es ist daher

$$B_2=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+2A_2.$$

Die Summe $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ findet sich aber, wenn man die Summe in 1.) zur Linken, quadrirt und davon die doppelte Summe der Produkte in 2.) zur Linken, subtrahirt. Also wird

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = A_1^2-2A_2$; und dadurch geht die vorhergehende Gleichung über in

7) $B_2 = 3A_1^2-4A_2$.

Der nächste Koeffizient, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen, also $-B_3$, ist die Summe der Produkte je dreier der 6 Wurzelwerthe (in 5.); und wenn man diese letzteren herstellt, so findet sich die ganze Summe bestehend

α) aus $(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3)$, dann β) aus Gliedern, welche aus $x_1^2x_2$, $x_1^2x_3$ und $x_1^2x_4$ hervorgehen, wenn man x_1 nach und nach mit x_2, x_3 und x_4 vertauscht, und nach jeder Vertauschung auch den zweiten Faktor so umändert, daß beide Faktoren der Produkte nicht einerlei Wurzelwerth erhalten; jedes dieser Glieder kommt 7 mal vor; — ferner γ) aus den Produkten, welche sich in 3.) zur Linken, befinden, jedes 18 mal *). Es ist daher

---

*) Der Anfänger ist hier noch auf Folgendes aufmerksam zu machen:

Die gegebene symmetrische Funktion, weil sie die dritte Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen aus sechs Elementen war, enthält $\frac{6^{3|-1}}{3!}$, d. h. $\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}$, oder 20 Produkte; und jedes Produkt liefert 8 Glieder, wenn man die 3 zweigliedrigen Summen mit einander multiplicirt; also enthält jene, $8\cdot20$, d. h. 160 Glieder. Der zuletzt dafür gefundene Ausdruck, enthält die Potenzsumme, welche, weil blos die 4 Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und x_4 vorkommen, nur 4 Glieder hat; dann 7 mal die einfache symmetrische Funktion $\Sigma(x_1^2x_2)$, welche $4\cdot3$ d. h. 12 Glieder hat; endlich 18 mal die symmetrische Funktion in 3.), welche 4 Glieder hat; also zusammen $4+7\cdot12+18\cdot4$ d. h. 160 Glieder. Diese Uebereinstimmung ist wichtig, wegen der Versicherung, welche daraus hervorgeht, daß man keine Glieder ausgelassen habe.

Man wird nämlich die, in diesen einzelnen obigen gegebenen Produkten angezeigte Multiplikation nicht wirklich verrichten, sondern blos eine davon, und die entstehenden Glieder aufmerksam betrachten. Dann findet man, daß jedes dieser Glieder 3 Faktoren bekommt, die alle 3 einander gleich, oder alle 3 von einander verschieden, oder von denen zwei einander gleich, der

$$-B_3 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) + 7\Sigma(x_1^2 x_2) - 18A_3,$$

indem wir durch $\Sigma(x_1^2 x_2)$ die Summe in β) bezeichnen.

Kubirt man nun die Gleichung 1.), so erhält man (nach dem quatrinomischen Lehrsatze §. 65.)

$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) + 3\Sigma(x_1^2 x_2) + 6$ mal die Summe in 3.), $= -A_1^3$.

Addirt man diese Gleichung zu der vorstehenden, so ergiebt sich

$$-B_3 = 4\Sigma(x_1^2 x_2) - A_1^3 - 12A_3,$$

und es bleibt jetzt nur noch die Summe $\Sigma(x_1^2 x_2)$ in A_1, A_2, 2c. 2c. auszuwerthen.

Multiplicirt man aber die Gleichungen 1.) und 2.) mit einander, so erhält man zur Linken, einmal die Summe $\Sigma(x_1^2 x_2)$ und noch 3 mal die Summe, welche in 3.) zur Linken zu sehen und welche $= -A_3$ ist. Man erhält daher

$$\Sigma(x_1^2 x_2) - 3A_3 = -A_1 \cdot A_2.$$

Die vorhergehende Gleichung giebt daher nun

$$-B_3 = 12A_3 - 4A_1 A_2 - A_1^3 - 12A_3,$$

woraus

8) $B_3 = A_1^3 + 4A_1 A_2$

hervorgeht.

---

dritte aber verschieden sein können. Es muß also die gegebene symmetrische Funktion ganz und vollkommen hervorgehen, wenn man aufsucht, wie oft in allen diesen Produkten x_1^3, wie oft $x_1^2 \cdot x_2$, und wie oft $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ vorkommt, und dann in diesen Gliedern nach und nach die Veränderlichen mit einander vertauscht sich denkt. Eine leichte Betrachtung der gegebenen Funktion zeigt aber sogleich, daß x_1^3 nur einmal, $x_1^2 \cdot x_2$ dagegen 7 mal, und $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, alle Produkte wohlgeordnet gedacht, 18 mal vorkommt.

Diese Winke in Bezug auf dieses Beispiel, mögen hinreichen, den Anfänger fühlen zu lassen, wie er sich in andern ähnlichen vorkommenden Fällen ungefähr zu verhalten habe, um jedesmal dem vorgesteckten Ziele schnell und sicher näher zu rücken.

Wir überheben uns der Mühe, die Auswerthung der übrigen Koeffizienten B_4, B_5, B_6 der neuen Gleichung, durchzusetzen, da der Anfänger aus dem Vorstehenden die Art und Weise, wie solches ermöglicht werden kann, hinreichend durchfühlen wird.

§. 235.

Der Newton'sche Lehrsatz für die Potenzsummen der Wurzelwerthe.

Man erkennt aber nun, daß die Auswerthung beliebig gegebener symmetrischer Funktionen der m Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3, ⋯ x_m, einer höheren Gleichung vom m^{ten} Grade,

1) $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$, oder $F_x = 0$,

in die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, ⋯ A_m, welche nichts anders als die Kombinationsklassen $\overset{1}{C}$, $\overset{2}{C}$, $\overset{3}{C}$, ⋯ $\overset{m}{C}$ dieser Wurzelwerthe sind (mit eigenem oder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, je nachdem der Zeiger 1, 2, 3, ⋯ m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist), — eine Aufgabe ist, deren systematische Lösung vorausgehen muß, wenn man solche und ähnliche Aufgaben, wie die im vorhergehenden Paragraphen behandelte, mit Sicherheit lösen will. — Wir wollen uns daher zunächst mit der systematischen Auswerthung der Potenzsummen dieser Wurzelwerthe, d. h. mit der Auswerthung der Summe

2) $x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_m^n$, welche durch S_n

bezeichnet sein mag, beschäftigen.

Ist aber α irgend einer dieser m Wurzelwerthe, so ist F_x durch $x-\alpha$ theilbar und der Quotient $\frac{F_x}{x-\alpha}$ findet sich früher (im §. 81. Anmerkg. 2.) bereits ausgewerthet, wenn man nur dort 1 statt A_0 schreibt, wie dies hier (in 1.) angenommen worden ist. Betrachtet man jenes Resultat genauer, so findet man zur Rechten in den Gliedern, die Potenzen des Wurzelwerthes α vorkommen. Setzt man also statt α nach und nach einen der m Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3, x_4, ⋯ x_m, nach dem

andern, und addirt man die m dadurch entstehenden Gleichungen, so erhält man zur Rechten (wenn man noch 1 statt A_0 setzt)

$$3)\quad m\cdot x^{m-1}+(S_1+mA_1)x^{m-2}+(S_2+A_1S_1+mA_2)x^{m-2}+\cdots +(S_{m-1}+A_1S_{m-2}+A_2S_{m-3}+\cdots+mA_{m-1}),$$

so daß sich

$$4)\quad S_n+A_1S_{n-1}+A_2S_{n-2}+A_3S_{n-3}+\cdots+A_{n-1}S_1+m\cdot A_n$$

als der Koeffizient von x^{m-1-n} findet. — Auf der linken Seite dagegen hat man die Summe

$$5)\quad \frac{F_x}{x-x_1}+\frac{F_x}{x-x_2}+\frac{F_x}{x-x_3}+\cdots+\frac{F_x}{x-x_m}$$

von m Summanden, ebenfalls nach fallenden Potenzen von x zu ordnen. Es ist aber jeder Summand ein Produkt von m—1 einfachen Faktoren; folglich nimmt er die Form

$$6)\quad x^{m-1}+D_1\cdot x^{m-2}+D_2\cdot x^{m-3}+\cdots+D_n\cdot x^{m-1-n}+\cdots +D_{n-2}\cdot x+D_{n-1}$$

an, wo D_n die Summe der Produkte A_n von je n aller m Wurzelwerthe ist, mit Ausnahme der Produkte, welche den gerade fehlenden Wurzelwerth enthalten (mit eigenem oder entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem n gerade oder ungerade ist, nach §. 231.); es ist also in jedem dieser Summanden (in 5.), der Koeffizient D_n, $= A_n$ minus der Summe der fehlenden Produkte von je n der Wurzelwerthe. Weil aber jedes der z. B. in $\frac{F_x}{x-x_r}$ dem Koeffizienten D_n gegen A_n fehlenden Produkte, außer x_r noch n—1 andere Wurzelwerthe enthält, so fehlt solches auch noch in dem Koeffizienten D_n von noch n—1 anderen der Summanden (in 5.), also in dem entsprechenden Koeffizienten der Summe in 5.), n mal. Ordnet man also die Summe in 5.) nach fallenden Potenzen von x, so findet sich (durch Addition der m einzelnen Summanden in 6.) der Koeffizient von x^{m-1-n},

$$7)\quad = m\cdot A_n - n\cdot A_n,\quad \text{also} \quad = (m-n)A_n.$$

Da nun die Koeffizienten von x^{m-1-n} (in 4. und in 7.) zur Rechten und zur Linken, einander gleich sein müssen, so erhält man augenblicklich die Gleichung

$$\text{I.}\quad S_n+A_1S_{n-1}+A_2S_{n-2}+A_3S_{n-3}+\cdots$$
$$+A_{n-2}S_2+A_{n-1}S_1+n\cdot A_n=0;$$

und diese Gleichung ist die von uns gesuchte; sie enthält den, nach Newton benannten „Satz der Potenzsummen der Wurzelwerthe", wo $n=1, 2, 3, 4,$ bis $m-1$ einschließlich sein kann.

Setzt man nach und nach diese Werthe statt n, so erhält man

$$\text{I. 1.}\quad S_1+A_1=0;$$
$$\text{I. 2.}\quad S_2+A_1S_1+2A_2=0;$$
$$\text{I. 3.}\quad S_3+A_1S_2+A_2S_1+3A_3=0:$$
$$\text{I. 4.}\quad S_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1+4A_4=0$$

u. s. w. f.;

und man erkennt nun deutlich, wie die erste dieser Gleichungen die Summe S_1 oder $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m$, die zweite dagegen S_2 oder $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_m^2$, die dritte Gleichung S_3, die vierte dann S_4, und jede folgende dieser Gleichungen, jede folgende dieser Potenzsummen der Wurzelwerthe der gegebenen höheren Gleichung, in ihre Koeffizienten ausgedrückt liefert.

Die Gleichungen I. 1.–4. liefern aber, wenn man sie nach S_1, S_2, S_3, S_4, 2c. algebraisch auflöst, die nachstehenden Resultate, nämlich:

$$1.\,1.)\quad S_1=-A_1;$$
$$2.\,2.)\quad S_2=A_1^2-2A_2;$$
$$3.\,3.)\quad S_3=-A_1^3+3A_1A_2-3A_3;$$
$$4.\,4.)\quad S_4=A_1^4-4A_1^2A_2+4A_1\cdot A_3-2A_2^2-4A_4;$$

u. s. w. f.

II. Die Gleichung I. gilt auch noch für $n=m$, wie sich ergiebt, wenn man in $F_x=0$, statt x nach und nach jeden

ihrer m Wurzelwerthe setzt und die entstehenden m Gleichungen zu einander addirt.

Ist aber $n>m$, etwa $n=m+\mu$, so setze man in die Gleichung $x^{\mu}\cdot F_x=0$ statt x nach und nach jeden der m Wurzelwerthe und addire alle m entstandenen Gleichungen und man erhält:

$$\text{III.}\quad S_{m+\mu}+A_1\cdot S_{m+\mu-1}+A_2\cdot S_{m+\mu-2}+\cdots+A_m\cdot S_{\mu}=0.$$

Mittelst dieser Gleichungen I.—III. ist es leicht jede Potenz-Summe der Wurzelwerthe einer gegebenen höheren Gleichung, in die Koeffizienten derselben Gleichung auszudrücken und dadurch systematisch auszuführen, was wir im vorhergehenden Paragraphen in Bezug auf die beiden Potenz-Summen S_2 und S_3 (und bloß für $m=4$) gleichsam als Naturalisten durchgesetzt haben.

Anmerkung 1. Wendet man diesen Satz auf die höhere Gleichung

$$x^m-1=0$$

an, deren m Wurzelwerthe die früher gefundenen m Werthe der $\sqrt[m]{1}$ sind, so ist dasmal $A_1=A_2=A_3=\cdots A_{m-1}=0$, aber $A_m=-1$; und die Gleichungen I.—III. geben nun

1) $S_n\ =0$, so lange $n<m$ ist; ferner

2) $S_m\ =m$;

3) $S_{m+\mu}=S_{\mu}$, für jede positive ganze Zahl μ,

also auch (für $\mu=m, 2m, 3m, 4m$, ꝛc.)

4) $S_m=S_{2m}=S_{3m}=S_{4m}=\cdots=S_{\nu m}=m$;

dagegen

5) $S_{\nu m+m'}=0$, wenn $m'<m$ aber positiv ganz ist, während ν jede beliebige positive ganze Zahl vorstellt.

Und diese Gleichungen gelten alle noch, wenn auch die Zeiger von S (unten rechts) negativ gedacht werden, weil wenn β ein Werth von $\sqrt[m]{1}$ ist, dann allemal auch $\frac{1}{\beta}$ d. h. β^{-1}

ein Werth von $\sqrt[m]{1}$ sein muß, weil $\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^m} = 1$ ist, und weil, wenn

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \cdots\ \alpha^{m-1} \text{ und } \alpha^m (=1)$$

die Werthe von $\sqrt[m]{1}$ sind, dann die $(-1)^{ten}$ Potenzen dieser Werthe wiederum alle Werthe von $\sqrt[m]{1}$ sein werden; während $(\gamma^{-1})^n = \gamma^{-n}$ ist, so daß die Summe der positiven Potenzen der Wurzelwerthe von $x^m - 1 = 0$ (in dieser letztern Form) gleichzeitig die Summe der negativen Potenzen der Wurzelwerthe derselben Gleichung $x^m - 1 = 0$ (in der erstern Form) sein werden.

Anmerkung 2. Wir kommen nun zur Betrachtung der übrigen ganzen symmetrischen Funktionen der Wurzelwerthe unserer gegebenen höheren Gleichung vom m^{ten} Grade, betrachten aber zunächst m beliebige Veränderliche $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$, unter denen wir dann später in der Anwendung auf die höhere Gleichung, die m Wurzelwerthe der letztern uns denken können.

§. 236.

Haben in einer ganzen Funktion der m beliebigen Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$, alle diejenigen Glieder, welche aus einem einzigen dadurch hervorgehen, daß man die Veränderlichen beliebig und durchaus mit einander vertauscht, — einen und denselben Koeffizienten, d. h. sind die Koeffizienten dieser Glieder alle einander gleich (übrigens beliebig, also auch beliebig Null), so ändert sich diese ganze Funktion nicht, wenn in ihr alle Veränderlichen beliebig und durchaus mit einander vertauscht werden; sie ist also eine symmetrische ganze Funktion dieser Veränderlichen.

So ist z. B.:

$$4\cdot x_0\cdot x_1 + 4\cdot x_0\cdot x_2 + 4\cdot x_0\cdot x_3 + 4\cdot x_1\cdot x_2 + 4\cdot x_1\cdot x_3 + 4\cdot x_2\cdot x_3$$
$$-7\cdot x_0^3 - 7\cdot x_1^3 - 7\cdot x_2^3 - 7\cdot x_3^3 + 2\cdot x_0^2\cdot x_1^2\cdot x_2^3\cdot x_3^3 + 2\cdot x_0^2\cdot x_1^3\cdot x_2^2\cdot x_3^3$$
$$+2\cdot x_0^2\cdot x_1^3\cdot x_2^3\cdot x_3^2 + 2\cdot x_0^3\cdot x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^3 + 2\cdot x_0^3\cdot x_1^2\cdot x_2^3\cdot x_3^2 + 2\cdot x_0^3\cdot x_1^3\cdot x_2^2\cdot x_3^2$$

eine symmetrische Funktion der vier Veränderlichen x_0, x_1, x_2 und x_3 (und zwar der zehnten Ordnung); denn sie ändert sich nicht, wenn auch x_0, x_1, x_2 und x_3 beliebig mit einander vertauscht werden. Dieselbe ist wieder eine Summe aus den drei symmetrischen Funktionen derselben Veränderlichen, bezüglich von der zweiten, dritten und zehnten Ordnung, welche bei ihrem bloßen Anblick sogleich in die Augen fallen.

So ist:

$$3\cdot x_0^2+3\cdot x_1^2+3\cdot x_2^2-4\cdot x_0\cdot x_1-4\cdot x_0\cdot x_2-4\cdot x_1\cdot x_2$$
$$+10\cdot x_0^3\cdot x_1^3+10\cdot x_0^3\cdot x_2^3+10\cdot x_1^3\cdot x_2^3$$
$$+8\cdot x_0^3\cdot x_1^2+8\cdot x_0^2\cdot x_1^3+8\cdot x_0^3\cdot x_2^2+8\cdot x_0^2\cdot x_2^3+8\cdot x_1^3\cdot x_2^2+8\cdot x_1^2\cdot x_2^8$$
$$-5\cdot x_0-5\cdot x_1-5\cdot x_2+18$$

eine ganze symmetrische Funktion von der sechsten Ordnung aus den drei Veränderlichen x_0, x_1 und x_2; und sie selber besteht wieder aus den einzelnen symmetrischen Funktionen:

$3\cdot x_0^2+3\cdot x_1^2+3\cdot x_2^2$ von der zweiten Ordnung,
und $4\cdot x_0\cdot x_1+4\cdot x_0\cdot x_2+4\cdot x_1\cdot x_2$ ebenfalls von der zweiten Ordnung,
und $10\cdot x_0^3\cdot x_1^3+10\cdot x_0^3\cdot x_2^3+10\cdot x_1^3\cdot x_2^3$ von der sechsten Ordnung,
und $8\cdot x_0^3\cdot x_1^2+8\cdot x_0^2\cdot x_1^3+8\cdot x_0^3\cdot x_2^2+8\cdot x_0^2\cdot x_2^3+8\cdot x_1^3\cdot x_2^2+8\cdot x_1^2\cdot x_2^3$
von der fünften Ordnung,
und $5\cdot x_0+5\cdot x_1+5\cdot x_2$ von der ersten Ordnung,
endlich 18 von der nullten Ordnung.

§. 237.

1) Jede ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen x_0, x_1, x_2, ⋯ x_{m-1} ist nothwendig durch Addition oder Subtraktion aus einzelnen ganzen symmetrischen Funktionen zusammengesetzt, deren Glieder aus $M\cdot x_0^n$, oder aus $M_1\cdot x_0^n\cdot x_1^p$, oder aus $M_2\cdot x_0^n\cdot x_1^p\cdot x_2^q$, oder aus $M_3\cdot x_0^n\cdot x_1^p\cdot x_2^q\cdot x_3^r$, oder aus Gliedern von derselben Form, jedoch immer mehr Veränderliche enthaltend, und in denen M, M_1, M_2, M_3 ꝛc. ganz beliebige, von den Veränderlichen unabhängige (konstante) Koeffizienten sind, dadurch hervorgehen, daß man in ihnen jeden Veränderlichen, mit jedem andern vertauscht, wenn nur n, p, q, r, beliebige absolute ganze Zahlen sind, welche eben sowohl von einander verschieden, als theilweise oder alle einander gleich sein können.

2) Nennt man jede der letztern, blos aus einem einzigen Gliede durch Vertauschung der Veränderlichen hervorgehende symmetrische Funktion, eine einfache ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen, — so ist also jede ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen aus lauter solchen einfachen ganzen symmetrischen Funktionen derselben Veränderlichen durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzt, wenn sie nicht selber schon zu den einfachen gehört.

3) Diese einfachen ganzen symmetrischen Funktionen der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ lassen sich daher bequem, wenn nur n, p, q, r, alle als von einander verschieden gedacht werden, so schreiben:

$$M \cdot S\left[x_{\mathfrak{a}}^n\right], \text{ oder } M_1 \cdot S\left[\begin{matrix} x_{\mathfrak{a}}^n \cdot x_{\mathfrak{b}}^p \\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \end{matrix}\right], \text{ oder } M_2 \cdot S\left[\begin{matrix} x_{\mathfrak{a}}^n \cdot x_{\mathfrak{b}}^p \cdot x_{\mathfrak{c}}^q \\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{c} \end{matrix}\right], \text{ oder}$$

$$M_3 \cdot S\left[\begin{matrix} x_{\mathfrak{a}}^n \cdot x_{\mathfrak{b}}^p \cdot x_{\mathfrak{c}}^q \cdot x_{\mathfrak{d}}^r \\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{d} \end{matrix}\right], \text{ oder u. s. w. f.;}$$

wo die deutschen Buchstaben alle durchlaufenden Werthe von 0 bis m—1 haben können, und wo man die noch hinzugefügten beschränkenden Gleichungen (oder vielmehr Ungleichungen) ebenfalls noch weglassen kann, wenn man nicht vergißt, daß in einem und demselben Gliede die deutschen Buchstaben nie gleiche Werthe annehmen dürfen, weil außerdem das Glied zu einer andern einfachen symmetrischen Funktion, deren Glieder aus weniger Veränderlichen bestehen, gezählt werden müßte.

4) Namentlich stellt $S[x_{\mathfrak{a}}^n]$ die Summe aller Potenzen der Veränderlichen:

$$x_0^n + x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_{m-1}^n$$

vor, und heißt deshalb Potenzsumme.

Es ist dies dieselbe, welche wir im (§. 235.) durch S_n' bezeichnet haben.

Dagegen stellen:

$$S\left[\begin{matrix} x_{\mathfrak{a}} \cdot x_{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \end{matrix}\right], \qquad S\left[\begin{matrix} x_{\mathfrak{a}} \cdot x_{\mathfrak{b}} \cdot x_{\mathfrak{c}} \\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{c} \end{matrix}\right], \qquad S\left[\begin{matrix} x_{\mathfrak{a}} \cdot x_{\mathfrak{b}} \cdot x_{\mathfrak{c}} \cdot x_{\mathfrak{d}} \\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{d} \end{matrix}\right]$$

u. s. w. f. die kombinatorischen Variations-Klassen vor, $\overset{2}{V}$, $\overset{3}{V}$, $\overset{4}{V}$, 2c., ohne Wiederholungen aus den m Elementen x_0, x_1, x_2, ⋯ x_{m-1} entwickelt, die einzelnen Verbindungen als Produkte angesehen, und alle zu einander addirt gedacht. Und will man blos die Kombinations-Klassen $\overset{2}{C}$, $\overset{3}{C}$, $\overset{4}{C}$, 2c. ohne Wiederholungen aus denselben Elementen vorgestellt haben, so schreibe man:

$$S\left[\begin{matrix} x_a \cdot x_b \\ a<b \end{matrix}\right], \qquad S\left[\begin{matrix} x_a \cdot x_b \cdot x_c \\ a<b<c \end{matrix}\right], \qquad S\left[\begin{matrix} x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d \\ a<b<c<d \end{matrix}\right], \text{ u. s. w. f.}$$

Und allgemein, will man die symmetrische Funktion:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_d^r \cdots]$$

unter der Bedingung ausgedrückt haben, daß n, p, q, r, 2c., nicht alle von einander verschieden sind, sondern einige derselben einander gleich, so schreibe man entweder diese Gleichungen $n = p$ oder $n = r$, oder $n = q = r$, 2c. darunter, oder man beschränke die deutschen Buchstaben a, b, c, d, 2c. so, daß von den mit einerlei (gleichen) Exponenten versehenen Faktoren die früher (zur Linken) stehenden deutschen Buchstaben nie Werthe bekommen, welche größer wären, als Werthe der in denselben Faktoren später (zur Rechten) folgenden deutschen Buchstaben.

So wird also jedes der beiden Aggregate:

$$S\left[\begin{matrix} x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \\ n = q \end{matrix}\right] \quad \text{und} \quad S\left[\begin{matrix} x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^n \\ a \gtrless b,\ b \gtrless c \\ a<c \end{matrix}\right]$$

immer eine und dieselbe ganze symmetrische Funktion derselben m Veränderlichen vorstellen.

5) Die einfache symmetrische Funktion $S[x_a^n \cdot x_b^p]$ aus denselben m Veränderlichen besteht aus $m(m-1)$ Gliedern, wenn n von p verschieden ist; dagegen nur aus $\frac{m(m-1)}{2!}$ Gliedern, wenn $n = p$ sein sollte (nach §. 27.).

Eben so hat die einfache ganze symmetrische Funktion:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q]$$

aus denselben m Veränderlichen, bald $m(m-1)(m-2)$, bald $\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}$, bald auch nur $\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$ Glieder, je nachdem n, p, q alle drei von einander verschieden, oder zwei derselben einander gleich, oder alle drei einander gleich sind.

Ferner hat die einfache ganze symmetrische Funktion:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_d^r]$$

$m^{4|-1}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{2!}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{2!\,2!}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{3!}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{4!}$ Glieder, je nachdem n, p, q, r alle viere von einander verschieden, oder zwei davon einander gleich, oder zugleich auch die beiden andern einander gleich, oder drei derselben einander gleich, oder alle vier einander gleich sind.

Und ist überhaupt ν die Anzahl der Faktoren in dem allgemeinen Gliede der symmetrischen Funktion derselben m Veränderlichen,

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_d^r \cdots],$$

so ist die Anzahl der Glieder dieser symmetrischen Funktion:

$$= m^{\nu|-1},$$

wenn die Exponenten n, p, q, r, ꝛc. alle von einander verschieden sind, dagegen

$$= \frac{m^{\nu|-1}}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \text{ꝛc. ꝛc.}},$$

wenn unter n, p, q, r ꝛc. ꝛc. α gleiche, hernach noch β andere gleiche, darauf noch γ weitere gleiche, u. s. w. f. vorkommen, und, wie immer vorausgesetzt wird, keiner $= 0$ ist. (Alles nach §. 27.).

§. 238. Lehrsätze.

Es ist allemal, bei denselben m Veränderlichen:

I. $$S[x_a^n] \cdot S[x_a^p] = S[x_a^{n+p}] + S\left[\underset{a \gtrless b}{x_a^n \cdot x_b^p}\right].$$

$$\text{II.}\quad S[x_a^n]\cdot S[x_a^p]\cdot S[x_a^q] = S[x_a^{n+p+q}] + \left[\begin{matrix} x_a^{n+p}\cdot x_b^q \\ a \gtrless b \end{matrix}\right]$$

$$+ S\left[\begin{matrix} x_a^{n+q}\cdot x_b^p \\ a \gtrless b \end{matrix}\right] + S\left[\begin{matrix} x_a^{p+q}\cdot x_b^n \\ a \gtrless b \end{matrix}\right] + S\left[\begin{matrix} x_a^n\cdot x_b^p\cdot x_c^q \\ a \gtrless b \gtrless c \end{matrix}\right].$$

Beweis. Denn es ist (nach §. 57.):

$$S[x_a^n]\cdot S[x_a^p] = S[x_a^n\cdot x_b^p].$$

Aber das Aggregat zur Rechten läßt sich sogleich in zwei Aggregate zerlegen, von denen das eine die Glieder enthält, in welchen $a = b$ ist, und welches sich durch $S[x_a^{n+p}]$ ausdrückt, während das andere alle die Glieder liefert, in welchen a von b verschieden ist, und welches daher die durch $S\left[\begin{matrix} x_a^n\cdot x_b^p \\ a \gtrless b \end{matrix}\right]$ vorgestellte einfache symmetrische Funktion der m Veränderlichen ist.

Und eben so wird (nach §. 57.):

$$S[x_a^n]\cdot S[x_a^p]\cdot S[x_a^q] = S[x_a^n\cdot x_b^p\cdot x_c^q],$$

während sich das Resultat zur Rechten wiederum in fünf Aggregate zerlegen läßt, von denen das erste alle Glieder enthält, in welchen $a = b = c$, die drei andern aber alle die Glieder enthalten, in denen entweder $a = b$, oder $a = c$, oder $b = c$ wird, während das fünfte Aggregat alle die Glieder in sich aufnimmt, in denen a, b, c, von einander verschieden sind.

Zugleich erhellet, wie das Produkt:

$$S[x_a^n]\cdot S[x_a^p]\cdot S[x_a^q]\cdot S[x_a^r]\cdot \text{ꝛc. ꝛc.}$$

von beliebig viel solchen Potenzsummen auf ähnliche Weise in einfache symmetrische Funktionen verwandelt werden kann.

§. 239.

Aber aus diesen Gleichungen I. und II. und denen, die noch in beliebiger Menge gefunden werden können, lassen sich nun umgekehrt alle einfachen symmetrischen ganzen Funktionen

blos in Potenzsummen ausdrücken; wenn man diese Gleichungen in Bezug auf die jetzt als unbekannt gedachten Ausdrücke auflöset. Man findet namentlich:

I. $$S\left[\underset{a \gtrless b}{x_a^n \cdot x_b^p}\right] = S[x_a^n]\cdot S[x_a^p] - S[x_a^{n+p}]$$

$$= S_n \cdot S_p - S_{n+p};$$

II. $$S\left[\underset{a \gtrless b \gtrless c}{x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q}\right] = S[x_a^n]\cdot S[x_a^p]\cdot S[x_a^q] - S[x_a^{n+p}]\cdot S[x_a^q]$$

$$-S[x_a^{n+q}]\cdot S[x_a^p] - S[x_a^{p+q}]\cdot S[x_a^n] + 2\cdot S[x_a^{n+p+q}]$$

$$= S_n \cdot S_p \cdot S_q - S_{n+p}\cdot S_q - S_{n+q}\cdot S_p - S_{p+q}\cdot S_n + 2S_{n+p+q};$$

III. $$S\left[\underset{a \gtrless b \gtrless c \gtrless b}{x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_b^r}\right] = S_n \cdot S_p \cdot S_q \cdot S_r - S_{n+p}\cdot S_q \cdot S_r - S_{n+q}\cdot S_p \cdot S_r$$

$$-S_{n+r}\cdot S_p \cdot S_q - S_{p+q}\cdot S_n \cdot S_r - S_{p+r}\cdot S_n \cdot S_q$$

$$-S_{q+r}\cdot S_n \cdot S_p + S_{n+p}\cdot S_{q+r} + S_{n+q}\cdot S_{p+r}$$

$$+S_{n+r}\cdot S_{p+q} - 2S_{n+p+q}\cdot S_r - 2S_{n+p+r}\cdot S_q$$

$$-2S_{n+q+r}\cdot S_p - 2S_{p+q+r}\cdot S_n - 6S_{n+p+q+r};$$

indem wir die im §. 235. bloß für die gegenwärtigen Untersuchungen eingeführte kürzere Bezeichnung der Potenzsummen benutzen.

Aehnliche Formeln ergeben sich auf demselben Wege für

$$S\left[\underset{a \gtrless b \gtrless c \gtrless b \gtrless e}{x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_b^r \cdot x_e^s}\right],$$

u. s. w. f.

§. 240.

Also läßt sich auch jede aus solchen einfachen, zusammengesetzte ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen, in Potenzsummen derselben Veränderlichen, durch bloße Addition, Subtraktion und Multiplikation zusammengesetzt ausdrücken.

Sind nun die m gedachten Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$, zu gleicher Zeit die m Wurzelwerthe der gegebenen höheren Gleichung

$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$, oder $F_x = 0$, so kann man (nach §. 235.) wiederum diese Potenz-Summen in die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, ⋯ A_m dieser Gleichung ausdrücken. Also steht jetzt das Verfahren systematisch fest, durch welches eine jede ganze symmetrische Funktion der Wurzelwerthe, in die Koeffizienten der Gleichung ausgedrückt werden kann.

§. 241. Aufgabe.

Statt der sehr speciellen Aufgabe des §. 234. kann man nun folgende ganz allgemeine Aufgabe stellen.

Es ist gegeben eine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade:

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m = 0,$$

deren m Wurzelwerthe durch α, β, γ, ⋯ μ, ν vorgestellt sein mögen. Man soll eine Gleichung in z finden, so daß irgend eine rationale Zusammensetzung φ eines oder mehrerer der Wurzelwerthe α, β, γ, ⋯ μ, ν jedesmal ein Wurzelwerth dieser neuen Gleichung sei, welche der Wurzelwerthe α, β, γ, ⋯ μ, ν, man auch an die Stelle der erst gesetzten, substituiren möge.

Auflösung. Man schreibe den gegebenen Ausdruck φ (z. B. $\alpha + \beta + M\alpha\beta$, wo M beliebig, aber von den Wurzelwerthen α, β, γ, ⋯ μ, ν, unabhängig ist), hin; und leite aus ihm alle möglichen verschiedenen Werthe ab, die er durch Vertauschung der Wurzelwerthe erhalten kann. Diese verschiedenen Werthe (z. B. $\alpha + \gamma + M\alpha\gamma$, $\alpha + \nu + M\alpha\nu$, $\mu + \nu + M\mu\nu$ u. dergl.), deren Anzahl n sein mag [in dem angenommenen Beispiel $= \frac{m(m-1)}{2}$ (nach §. 27. V.)], mögen durch φ, φ_1, φ_2, φ_3, u. s. w. bezeichnet sein. — Dann bilde man das Produkt:

$$F_z \text{ nämlich } (z-\varphi)(z-\varphi_1)(z-\varphi_2)(z-\varphi_3) \cdots$$

deren Faktoren-Anzahl $= n$ ist; verwandle solches in eine ganze Funktion (von z) vom n^{ten} Grade, so ist solches sowohl, als auch jeder ihrer Koeffizienten, nothwendig eine rationale symme-

trische Funktion der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$. — Diese symmetrischen Funktionen können aber (nach §. 240.) jedesmal durch die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_m$, der gegebenen höhern Gleichung rational ausgedrückt werden. Folglich hat man, ohne die Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, zu kennen, die neue Gleichung in z, aus der gegebenen Gleichung

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

abgeleitet, wenn man $F_z = 0$ setzt; weil jede der Funktionen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, ꝛc. statt z, gesetzt, einen Faktor von F_z zu Null macht, folglich ein Wurzelwerth von $F_z = 0$ sein muß.

§. 242.

Es ist also ein besonderer Fall dieser Aufgabe, wenn man eine Gleichung in z sucht, deren Wurzelwerthe, die Summen von je zwei der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, sind. Auch hier wird, weil $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ist, der Grad der Gleichung in z, $= \frac{m(m-1)}{2}$ $= m_2$ (nach §. 27. V.).

Ein zweiter besonderer Fall dieser allgemeinen Aufgabe wäre es, wenn man eine Gleichung in z suchte, deren Wurzelwerthe die Differenzen je zweier der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, wären. — Diese Gleichung in z würde aber, weil $\alpha - \beta$ und $\beta - \alpha$ von einander verschieden sind, weil daher aus den m Wurzelwerthen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, (nach §. 27. III.), $m(m-1)$ solche Differenzen gebildet werden können, vom Grade $m(m-1)$ sein.

Weil aber z. B. $\beta - \mu$ und auch $\mu - \beta$ Wurzelwerthe dieser Gleichung in z sein müssen, so muß solche zu Faktoren haben: $[z-(\beta-\mu)] \cdot [z-(\mu-\beta)]$, oder $[z-(\beta-\mu)] \cdot [z+(\beta-\mu)]$, oder $z^2-(\beta-\mu)^2$. —

Diese Gleichung in z enthält daher blos Potenzen von z^2; und setzt man y statt z^2, so wird sie wiederum vom Grade $\frac{m(m-1)}{2}$, nach y; und ihre Wurzelwerthe sind dann die Quadrate der Differenzen je zweier der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$.

Auch die vier Aufgaben des §. 233. gehören hierher. Soll nämlich jeder Wurzelwerth der neuen Gleichung das bfache werden, von den Wurzelwerthen x_1, x_2, x_3, $\cdots$ x_m der gegebenen Gleichung, so hat (nach §. 241.) die neue Gleichung die Form

$$(z-bx_1)(z-bx_2)(z-bx_3)\cdots(z-bx_m)=0;$$

und es ist nun klar, daß jedes Produkt von n dieser Wurzelwerthe das b^nfache des entsprechenden Produkts der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung ist. Daher muß die neue Gleichung die nachstehende sein, nämlich

$$z^m+A_1bz^{m-1}+A_2b^2z^{m-2}+\cdots+A_{m-1}b^{m-1}z+A_mb^m=0.$$

Soll aber die neue Gleichung die Wurzelwerthe x_1-b, x_2-b, x_3-b, $\cdots$ x_m-b enthalten, so ist sie (nach §. 245.)

$$[z-(x_1-b)][z-(x_2-b)][z-(x_3-b)]\cdots[z-(x_m-b)]=0$$

d. h.

$$[(z+b)-x_1][(z+b)-x_2][(z+b)-x_3]\cdots[(z+b)-x_m]=0,$$

d. h. $F_{z+b}=0$, wenn $F_x=0$ die gegebene Gleichung ist.

Anmerkung 1. Lagrange hat die allgemeine Aufgabe des §. 241. zur Auflösung der gegebenen höheren Gleichung $F_x=0$ zu benutzen gesucht, wie die folgende dritte Abtheilung näher bespricht. — Derselbe hat aber aus dieser Aufgabe auch einen Beweis hergeleitet für die Behauptung, daß eine numerische Gleichung mit reellen Koeffizienten, wenn sie nicht lauter reelle Wurzelwerthe hat, doch keine anderen imaginären Wurzelwerthe haben kann, als von der Form $p+q\cdot i$ und dann immer zwei zusammengehörige $p\pm q\cdot i$. — Der Gang seines Beweises ist folgender:

1) Jede numerische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat mindestens einen reellen Wurzelwerth, wenn sie von einem ungeraden Grade ist.

2) Jede solche Gleichung $F_x=0$ vom m^{ten} Grade, wenn m nicht ungerade aber von der Form $2(2n+1)$ ist, führt, — sobald die im §. 241. gesuchte neue Gleichung in z, die Wurzel-

werthe $M\alpha\beta+\alpha+\beta$, $M\alpha\gamma+(\alpha+\gamma)$ ..., $M\mu\nu+\mu+\nu$, haben soll, — zu einer Gleichung vom

$\frac{m(m-1)}{2}=\frac{(4n+2)(4n+1)}{2}=(2n+1)(4n+1)$ d. h. zu einer Gleichung in z, vom ungeraden Grade, so daß sie immer wenigstens einen reellen Wurzelwerth hat. Giebt man nun der beliebigen Zahl M, nach und nach mehr Werthe als der Grad der neuen Gleichung Einheiten hat, so hat man beliebig viele Gleichungen in z, wo jede wenigstens einen reellen Wurzelwerth hat. Da nun die Anzahl dieser Gleichungen größer ist als die Anzahl ihrer Wurzelwerthe, so muß wenigstens in zwei dieser Gleichungen in z, der jedesmalige reelle Wurzelwerth w, welcher $=M\alpha\beta+\alpha+\beta$, oder $=M\gamma\zeta+\gamma+\zeta$, oder irgend einer der übrigen Verbindungen gleich ist, — einer und derselben Verbindung, nur mit dem verschiedenen Werthe von M, angehören, so daß also existiren müssen z. B. die zwei Gleichungen

1) $M_1\gamma\zeta+\gamma+\zeta=w_1$ und 2) $M_2\gamma\zeta+\gamma+\zeta=w_2$.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich aber nun γ und ζ sogleich entweder reell oder von der Form $p\pm q\cdot i$. Es hat also jede Gleichung $F_x=0$ vom Grade $2(2n+1)$ mit reellen Koeffizienten, allemal wenigstens entweder zwei reelle oder doch zwei imaginäre Wurzelwerthe, welche $=p\pm q\cdot i$ sind.

Denkt man sich nun den Grad m der gegebenen Gleichung $F_x=0$ von der Form $2^2(2n+1)$, so ist der Grad $\frac{m(m-1)}{2}$ der neuen Gleichung in z, $=(4n+2)(8n+3)=2(2n+1)(8n+3)$, d. h. von der Form $2(2\nu+1)$; also existiren wiederum die Gleichungen 1.) und 2.), nur daß w_1 und w_2 vielleicht imaginäre Wurzelwerthe $p+q\cdot i$ und $p'+q'\cdot i$ von $F_x=0$ sind. Findet man aber unter dieser Voraussetzung, die Werthe γ und ζ aus den Gleichungen 1.) und 2.), so finden sie sich wieder entweder reell oder doch $=P\pm Q\cdot i$. — Es hat also jede Gleichung $F_x=0$ vom doppelt geraden Grade $2^2(2n+1)$, mit

29*

reellen Koeffizienten, mindestens zwei reelle oder doch zwei imaginäre Wurzelwerthe von der Form $P \pm Q \cdot i$. —

Ist der Grad m der alten Gleichung $F_x = 0$ von der Form $2^3(2n+1)$, so ist der Grad $\frac{m(m-1)}{2}$ der neuen Gleichung in z, von der Form $2^2(2\nu+1)$, die letztere hat also die Wurzelwerthe w_1 und w_2 entweder reell oder von der Form $P \pm Q \cdot i$; also liefern die Gleichungen 1.) und 2.) auch γ und ζ von derselben Form.

So sieht man, daß der Beweis sich nach und nach auf eine Gleichung $F_x = 0$ vom Grade $2^4(2n+1)$, $2^5(2n'+1)$, $2^6(2n''+1)$, u. s. f., also zuletzt auf eine Gleichung von jedem beliebigen Grade erstreckt.

Es erstreckt sich aber dieser Beweis nur auf die Form der Wurzelwerthe; daß überhaupt jede höhere Gleichung mindestens einen Wurzelwerth haben müsse, ist dabei vorausgesetzt, was wir jedoch, nach den von uns entwickelten Ansichten, nicht gerade als einen Tadel hervorheben können. Auch das ist kein Tadel, daß der Beweis, „daß die Wurzelwerthe von der Form $p+q \cdot i$ sein müssen", vorläufig nur für Gleichungen mit reellen Koeffizienten geführt ist; da er von Lagrange selbst später auf Gleichungen mit imaginären Koeffizienten, — welche doch allemal auf die Form

3) $\quad \varphi_x + i \cdot \psi_x = 0$

gebracht werden können, wo φ_x und ψ_x reelle Koeffizienten haben, — ausgedehnt wird. Nimmt man nämlich die Gleichung

4) $\quad (\varphi_x + i \cdot \psi_x)(\varphi_x - i \cdot \psi_x) = 0$, d. h. $\varphi_x^2 + \psi_x^2 = 0$,

so hat sie lauter reelle Koeffizienten; also hat sie lauter Wurzelwerthe von der Form $p+q \cdot i$; und da ihre Wurzelwerthe, die der Gleichung 3.) und noch die der Gleichung

5) $\quad \varphi_x - i \cdot \psi_x = 0$

sind, so sind auch alle Wurzelwerthe der Gleichung 3.) von derselben Form $p+q \cdot i$. —

Anmerkg. 2. Der Gleichung in z, deren Wurzelwerthe die Differenzen je zweier Wurzelwerthe einer gegebenen Gleichung $F_x = 0$ vom m^{ten} Grade sind, (und welche vom $m(m-1)^{ten}$ Grade ist, aber nur gerade Potenzen von z enthält, also für $z^2 = y$, sich auf eine Gleichung vom $\frac{m(m-1)^{ten}}{2}$ Grade zurückführen läßt, hat man sich ebenfalls zu verschiedenen Zwecken bedient, — namentlich auch bei Untersuchungen über die imaginären Wurzelwerthe.

Dritte Abtheilung.

Vom Auflösen der allgemeinen höhern Gleichungen. Elimination der Unbekannten aus mehreren gegebenen Gleichungen.

§. 243.

I. Die reine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade

1) $$x^m = a$$

giebt die m Wurzelwerthe

$$x = \sqrt[m]{a} = [\sqrt[m]{a}]\cdot\sqrt[m]{1}$$

d. h. (nach §. 223. III.)

2) $$x = \left[\sqrt[m]{a}\right]\cdot\left(Cos\frac{2n\pi}{m} \pm i\cdot Sin\frac{2n\pi}{m}\right),$$

wenn statt n nach und nach so viele auf einander folgender ganzen Zahlen (positive oder negative), die Null nicht ausgeschlossen, gesetzt werden, bis man m verschiedene Werthe hat; während $[\sqrt[m]{a}]$ irgend einen einzigen Werth dieser m^{ten} Wurzel vorstellt.

Dies gilt, wenn a reell oder imaginär ist. — Praktisch bequem ist das Resultat 2.) nur, wenn a positiv ist.

II. Ist a negativ und $= -b$, so daß man die Gleichung

3) $$x^m + b = 0$$

hat, so sind die m Wurzelwerthe dieser Gleichung ausgedrückt durch

$$4)\qquad x = \sqrt[m]{(-b)} = [\sqrt[m]{b}]\cdot\sqrt[m]{(-1)}$$
$$= [\sqrt[m]{b}]\cdot\left(Cos\frac{2n+1}{m}\pi \pm i\cdot Sin\frac{2n+1}{m}\pi\right).$$

III. Ist a imaginär und $= p+q\cdot i$, so daß die aufzulösende höhere Gleichung diese ist:

$$5)\qquad x^m = p+q\cdot i,$$

so sind alle m Wurzelwerthe derselben, ausgedrückt durch

$$x = \sqrt[m]{p+q\cdot i} = \sqrt[m]{(r\cdot e^{z\cdot i})}$$

d. h. (nach §. 223. VI.) durch

$$6)\qquad x = [\sqrt[m]{r}]\cdot\left(Cos\frac{2n\pi\pm\varphi}{m} \pm i\cdot Sin\frac{2n\pi\pm\varphi}{m}\right),$$

wenn $r = +\sqrt{p^2+q^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$ und $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$ ist, wenn φ innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ genommen wird, wo φ mit q zugleich positiv oder negativ ist, — wenn ferner rechts alle obern Vorzeichen zugleich oder alle untern zugleich genommen werden, und wenn n die Werthe 0, 1, 2, 3, 2c. vorstellt, oder beliebige auf einander folgende ganze Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen.

Anmerkung. Ist $F_x = x^m - a$, so ist $F_x^I = mx^{m-1}$. — Es haben daher F_x und F_x^I nur, wenn $a = 0$ ist, einen gemeinschaftlichen Faktor und zwar dann den Faktor x^{m-1} oder $(x-0)^{m-1}$. Dann werden auch alle Derivationen, nämlich F_x^{II}, F_x^{III}, 2c. bis $F_{(x)}^{m-1}$, aber nicht mehr $F_x^{(m)} (= m!)$ der Null gleich. Folglich hat dann die Gleichung $x^m - a = 0$, d. h. (weil $a = 0$) die Gleichung $x^m = 0$, m gleiche Wurzelwerthe 0. — Ist aber a nicht Null, so hat die Gleichung $x^m = a$ lauter verschiedene Wurzelwerthe, eben weil jetzt F_x und F_x^I keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben. (Alles nach dem §. 88.).

§. 244.

I. Soll daher die ganze Funktion

$$x^m - a^m,$$

wo a positiv gedacht ist, in reelle einfache oder Doppel-Faktoren zerlegt werden, so sucht man erst (nach §. 243.) alle Werthe

$$a \cdot e^{\pm \frac{2n\pi}{m} \cdot i} \quad \text{oder} \quad a \cdot \left(Cos \frac{2n\pi}{m} \pm i \cdot Sin \frac{2n\pi}{m}\right) \quad \text{von} \quad x,$$

welche $x^m - a^m, = 0$ machen, und hat dann (für $n = 0$) den reellen einfachen Faktor

$$x - a,$$

und nur wenn m gerade ist (für $n = \frac{1}{2}m$) auch noch den andern reellen einfachen Faktor

$$x + a,$$

außerdem aber die Reihe der Doppel-Faktoren

$$\left(x - a \cdot e^{\frac{2n\pi}{m} \cdot i}\right) \cdot \left(x - a \cdot e^{-\frac{2n\pi}{m} \cdot i}\right)$$

d. h. $$x^2 - 2ax \cdot Cos \frac{2n\pi}{m} + a^2,$$

für $n = 1, 2, 3, \cdots$ bis zuletzt zu $n = \frac{1}{2}(m-1)$, wenn m ungerade oder bis zu $n = \frac{1}{2}m - 1$, wenn m gerade sein sollte.

II. Eben so finden sich die reellen einfachen oder Doppel-Faktoren von

$$x^m + a^m,$$

wo a positiv gedacht ist, dadurch, daß man erst alle Werthe

$$a \cdot e^{\pm \frac{(2n+1)\pi}{m} \cdot i} \quad \text{oder} \quad a \cdot \left(Cos \frac{(2n+1)\pi}{m} \pm i \cdot Sin \frac{(2n+1)\pi}{m}\right) \quad \text{von} \quad x$$

sucht, welche $x^m + a^m, = 0$ machen; dann hat man, nur wenn m ungerade ist [für $n = \frac{1}{2}(m-1)$] den reellen Faktor

$$x + a,$$

außerdem aber die Reihe der Doppel-Faktoren

$$\left(x-a\cdot e^{\frac{(2n+1)\pi}{m}\cdot i}\right)\cdot\left(x-a\cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi}{m}\cdot i}\right)$$

d. h. $$x^2-2ax\cdot Cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+a^2,$$

für $n=0, 1, 2, 3, \cdots$ bis zu $n=\frac{1}{2}(m-1)$, wenn m ungerade ist, oder bis zu $n=\frac{1}{2}m-1$, wenn m gerade sein sollte.

Alle diese Doppel-Faktoren sind reell.

§. 245.

Die höhere Gleichung

1) $$x^{2m}+ax^m+b=0$$

giebt, wenn $x^m=z$ gesetzt wird, die quadratische Gleichung

$$z^2+az+b=0,$$

also

$$z=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b},$$

folglich

2) $$x=\sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b}},$$

welcher Ausdruck alle 2m Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung vom $(2m)^{\text{ten}}$ Grade liefert.

§. 246.

Sollen die reellen doppelten Faktoren von

$$a^{2m}-2a^mx^m\cdot Cos\,\varphi+x^{2m},$$

wo a positiv vorausgesetzt wird, gefunden werden, so liefert die Gleichung

$$x^{2m}-2a^m\cdot Cos\,\varphi\cdot x^m+a^{2m}=0$$

für $x^m=z$, zunächst diese andere, nämlich

$$z^2-2a^m\cdot Cos\,\varphi+a^{2m}=0,$$

dann $$z=a^m\cdot(Cos\,\varphi\pm i\cdot Sin\,\varphi)$$

und zuletzt aus $x^m=z$ (nach §. 223.)

$$x=a\cdot\left(Cos\frac{2n\pi+\varphi}{m}\pm i\cdot Sin\frac{2n\pi+\varphi}{m}\right),$$

wenn statt m, nach und nach 0, 1, 2, 3, ··· bis m−1 gesetzt wird. — Multiplicirt man aber den einfachen Faktor

$$a\cdot\left(Cos\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}+i\cdot Sin\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}\right)-x$$

wo ν irgend einer der Werthe von n ist, mit dem andern Faktor

$$a\cdot\left(Cos\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}-i\cdot Sin\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}\right)-x,$$

so erhält man

$$a^2-2ax\cdot Cos\frac{2\nu\pi+\varphi}{m}+x^2 \text{ *)};$$

und diese Formel gibt alle gesuchten doppelten reellen Faktoren von

$$a^{2m}-2a^m x^m\cdot Cos\,\varphi+x^{2m},$$

wenn man statt ν nach und nach 0, 1, 2, 3 bis m−1 setzt.

Anmerkung. Der §. 244. enthält das sogenannte Theorem des Cotes; der §. 250. die Erweiterung des Moivre.

Nimmt man nämlich eine Kreislinie (Fig. 12. und Fig. 13.), theilt solche in m gleiche Theile von A_0 an gerechnet, wie (Fig. 12.) zu sehen ist, wenn m gerade und $=2n$, (Fig. 13.) dagegen, wenn m ungerade und $=2n+1$ ist; nimmt man ferner $CM=x$, den Radius $=a$, während C der Mittelpunkt ist; so ist allemal das Produkt aller von M nach den Theilungspunkten gehenden m Linien, nämlich

*) Man kann auch als Werth von x, welcher die gegebene ganze Funktion vom $(2m)^{ten}$ Grade zu Null macht,

$$x=a\cdot\left(Cos\frac{2n\pi-\varphi}{m}\mp i\cdot Sin\frac{2n\pi-\varphi}{m}\right)$$

nehmen (nach §. 247. Nr. 6.) und man erhält als doppelten Faktor

$$a^2-2ax\cdot Cos\frac{2\nu\pi-\varphi}{m}+x^2,$$

welcher dann dieselben doppelten Faktoren, wie der im Texte gefundene liefert, nur in umgekehrter Ordnung, sobald man nach und nach 1, 2, 3, 4, ··· m statt ν setzt, wo jedoch für $\nu \mp m$ derselbe Faktor sich ergibt, wie für $\nu=0$.

I. $MA_0 \cdot MA_1 \cdot MA_2 \cdot MA_3 \cdots MA_{m-3} \cdot MA_{m-2} \cdot MA_{m-1}, = a^m - x^m.$

Denn es ist nach dem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie z. B. $(MA_3)^2 = (CM)^2 + (CA_3)^2 - 2CM \cdot CA_3 \cdot Cos\, A_0CM_3$; also in (Fig. 12.), wo $m = 2n$, d. h. wo m gerade ist,

$$MA_0 \quad = a - x$$

$$MA_1 = MA_{m-1} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{2\pi}{m} + x^2}$$

$$MA_2 = MA_{m-2} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{4\pi}{m} + x^2}$$

$$MA_3 = MA_{m-3} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{6\pi}{m} + x^2}$$

u. s. f. und

$$MA_n = MA_{\frac{1}{2}m} \quad = a + x.$$

Dagegen ist in (Fig. 13.), wo $m = 2n+1$, d. h. wo m ungerade ist, alles gerade so, nur daß jetzt keine dieser Linien $= a + x$ wird, weil jetzt

$$MA_n = MA_{n+1} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{(m-1)\pi}{m} + x^2}$$

wird. In beiden Fällen fällt aber die Behauptung, dem eben vorangegangenen zu Folge, in die Augen.

Halbirt man in beiden Figuren (12. und 13.), also mag m eine gerade oder ungerade Zahl sein, jeden der Theile A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ꝛc. ꝛc., und zieht man von M aus nach allen diesen Halbirungspunkten wiederum gerade Linien, so ist

II. das Produkt dieser Linien allemal $= a^m + x^m$,

wie in die Augen fällt, wenn man bedenkt, daß nun die Bogen von A_0 aus gerechnet, bezüglich $\frac{\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \frac{5\pi}{m}$, ꝛc. ꝛc. werden, während in Fig. 13., wo $m = 2n+1$, d. h. ungerade ist, eine dieser Linien

$$= \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{m\pi}{m} + x^2} = a + x \quad \text{wird.}$$

Und nimmt man (Fig. 14.) zuerst $A_0A_1 = \frac{\varphi}{m}$, und theilt dann von A_1 aus die ganze Kreislinie noch in m gleiche Theile, so wird

$$A_0A_2 = \frac{2\pi+\varphi}{m},\quad A_0A_3 = \frac{4\pi+\varphi}{m},\quad A_0A_4 = \frac{6\pi+\varphi}{m},\ \text{u. s. w. f.};$$

und es ist daher das Produkt der Quadrate der m Linien

$$\text{III.}\quad MA_1^2 \cdot MA_2^2 \cdot MA_3^2 \cdot MA_4^2 \cdots MA_{m-2}^2 \cdot MA_{m-1}^2 \cdot MA_m^2$$
$$= a^{2m} - 2a^m x^m \cdot Cos\,\varphi + x^{2m},$$

nach dem vorstehenden Paragraphen.

§. 247.

Es lassen sich ferner noch allgemein auflösen die beiden Gleichungen

$$1)\quad x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

und $$2)\quad x^{4m} + ax^{3m} + bx^{2m} + cx^m + d = 0,$$

indem man $x^m = z$ setzt, dadurch eine kubische oder biquadratische Gleichung in z erhält, diese nach dem im I. Th. d. W. beschriebenen Verfahren auflöst d. h. die drei, oder die vier Werthe von z findet, welche dieser Gleichung (in z) genügen; zuletzt aber für jeden einzelnen dieser Werthe von z, aus der Gleichung $x^m = z$, die m Werthe von x, $(= \sqrt[m]{z})$ (nach §. 223.) dazu findet. — Man erhält dann für die Gleichung 1.) sogleich ihre 3m, für die Gleichung 2.) dagegen ihre 4m Wurzelwerthe.

Dagegen hat man die Auflösung der allgemeinen Gleichung vom m^{ten} Grade,

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

wo die Koeffizienten ganz allgemein gedacht sind, während sie im I. Th. d. W. für $m = 2$, 3 und 4 durchgesetzt zu sehen ist, schon für $m = 5$ bis jetzt nicht nur vergebens gesucht, sondern es haben Abel (in Crelle's Journal der Mathematik)

und Ruffini zuletzt bewiesen, daß eine solche allgemeine Auflösung (durch welche x in die Koeffizienten der Gleichung in geschlossener Form, d. h. ohne unendliche Reihen, ausgedrückt wäre) gar nicht möglich ist; während Andere, darunter namentlich Lagrange (in seiner Résolution des équations numériques) die allgemeine Lösung in der Art versucht haben, daß sie für x unendliche Reihen herzustellen suchten, welche die Koeffizienten der Gleichung in sich aufnehmen.

Beachtet man, daß die Auflösung der allgemeinen Gleichung vom dritten Grade (im I. Th. d. W.) zu der schwerfälligen Cardani'schen Formel geführt, und daß die Auflösung der allgemeinen Gleichung vom vierten Grade (im I. Th. d. W.) ein ungemein weitläufiges Resultat giebt, welches, wirklich hergestellt, vielleicht eine gedruckte Seite einnehmen würde, — daß also das Resultat selbst von durchaus keinem praktischen Werthe ist, — so leistet man gerne auf die Auflösung der allgemeinen Gleichung vom 5^{ten}, 6^{ten}, 7^{ten} und der folgenden Grade gänzlich Verzicht und begnügt sich damit, numerische höhere Gleichungen, d. h. solche, deren Koeffizienten alle in Ziffern (reell oder imaginär) gegeben sind, näherungsweise auflösen zu können, wie solches die folgende Abtheilung dieses Kapitels näher besprechen wird.

Einige Versuche zur Auflösung allgemeiner Gleichungen theilen wir nur deshalb in den folgenden Paragraphen noch mit, um dem Anfänger eine Idee von den Methoden zu geben, welche dazu verwandt worden sind. Zuvor aber müssen wir höhere Gleichungen mit mehreren Unbekannten betrachten.

§. 248. Aufgabe.

Es sind gegeben die beiden höhern Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y:

$$1)\quad A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m = 0$$

und

$$2)\quad B_0 \cdot x^n + B_1 \cdot x^{n-1} + B_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + B_{n-1} \cdot x + B_n = 0,$$

welche kürzer durch:

3) $S[A_\alpha \cdot x^{m-\alpha}] = 0$ oder $\mathfrak{A} = 0$,

und 4) $S[B_\alpha \cdot x^{n-\alpha}] = 0$ oder $\mathfrak{B} = 0$,

vorgestellt sein können oder mögen. — Die erste Gleichung soll von der m^{ten} Ordnung, die zweite von der n^{ten} Ordnung sein, so daß die Koeffizienten A_α und B_α ganze Funktionen von y, höchstens von der α^{ten} Ordnung sein können. — Man soll x aus beiden gegebenen Gleichungen eliminiren, d. h. man soll eine Gleichung in y ohne x finden, welche nicht durch mehr und auch nicht durch weniger Werthe von y identisch wird, als es Paare zusammengehöriger Werthe von x und y gibt, welche die beiden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zugleich identisch machen.

Auflösung. 1) Man denke sich die erste Gleichung $\mathfrak{A} = 0$ nach x allgemein aufgelöst; und die m Wurzelwerthe $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ werden im Allgemeinen Ausdrücke sein, welche y enthalten.

2) Jeden dieser m Werthe denke man sich in die zweite Gleichung $\mathfrak{B} = 0$ statt x gesetzt, so erhält man m neue Gleichungen, alle von der Form:

$$S[B_\alpha \cdot x_\mu^{n-\alpha}] = 0,$$

wo μ nach und nach 0, 1, 2, 3, $\cdots$ m—1 vorstellt.

3) Gibt es nun k Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, welche beiden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zugleich genügen, so werden sich solche in m verschiedene Parthien anordnen lassen, wo in jeder dieser Parthie $\frac{k}{m}$ dieser zusammengehörigen Werthe sind, welche jedesmal einer einzigen der m Gleichungen (in Nr. 2.) genügen, weil jede dieser m Gleichungen im Allgemeinen nur unter der Voraussetzung identisch ist, daß die andern es zu gleicher Zeit nicht sind.

4) Multiplicirt man aber alle diese m Gleichungen (in 2.), mit einander, so erhält man:

$$S\left[B_a \cdot B_b \cdot B_c \cdot B_d \cdots B_m \cdot x_0^{n-a} \cdot x_1^{n-b} \cdot x_2^{n-c} \cdot x_3^{n-d} \cdots x_{m-1}^{n-m}\right]_{a+b+c+d+\cdots+m+p\,=\,nm} = 0,$$

in so ferne der größte Werth von jedem der m Buchstaben a, b, c, d, ⋯ m, jedesmal n, also der größte Werth der Summe derselben, mn ist.

Diese Gleichung wird nun identisch, so oft irgend einer der Faktoren (in 2.), identisch 0 wird, also durch alle k Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, welche den beiden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zugleich genügen, durch nicht mehr und nicht weniger. Wenn man daher aus dieser Gleichung die noch Unbekannten x_0, x_1, x_2, ⋯ x_{m-1} wegbringt, so wird sie die verlangte Eliminationsgleichung sein.

5) Das kombinatorische Aggregat zur Linken der Gleichung (in 4.), ist aber unstreitig eine symmetrische Funktion der Wurzelwerthe x_0, x_1, x_2, ⋯ x_{m-1}, läßt sich daher in die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, ⋯ A_m rational (d. h. ohne Wurzelzeichen) ausdrücken (nach §. 240.). Und dann enthält diese Eliminationsgleichung die unbekannten Wurzelwerthe x_0, x_1, x_2, ⋯ x_{m-1} nicht mehr, sondern dafür blos die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, ⋯ A_m, so wie vorher schon B_0, B_1, B_2, ⋯ B_n, welche gegebene und ganze Funktionen von y sind, die in der Eliminationsgleichung rational, also in Form einer ganzen Funktion von y, mit einander in Verbindung getreten sind.

Beispiel. Es seien gegeben die Gleichungen der zweiten Ordnung:

$$A_0 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_2 = 0,$$

$$B_0 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_2 = 0,$$

wo A_0, B_0 nach x und nach y konstant, A_1 und B_1 die Form $\alpha y + \beta$, endlich A_2 und B_2 die Form $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ haben, so daß die gegebenen Gleichungen selbst, nach x und y von der zweiten Ordnung sind. Denkt man sich nun die erste nach x aufgelöst, und die beiden Auflösungen durch x_0 und x_1 vorgestellt, so daß

$$x_0+x_1=-\frac{A_1}{A_0},\quad x_0\cdot x_1=\frac{A_2}{A_0}$$

ist — diese Werthe x_0 und x_1 statt x in die zweite Gleichung substituirt, und die Resultate multiplicirt, so ist die gesuchte Eliminationsgleichung:

$$[B_0\cdot x_0^2+B_1\cdot x_0+B_2]\cdot[B_0\cdot x_1^2+B_1\cdot x_1+B_2]=0,$$

oder wenn man wirklich multiplicirt:

$$B_0^2\cdot(x_0\cdot x_1)^2+B_0\cdot B_1\cdot(x_0\cdot x_1^2+x_1\cdot x_0^2)+B_1^2\cdot x_0\cdot x_1$$
$$+B_0\cdot B_2\cdot(x_0^2+x_1^2)+B_1\cdot B_2\cdot(x_0+x_1)+B_2^2=0.$$

Nun ist aber:

$$(x_0\cdot x_1)^2=\frac{A_2^2}{A_0^2},\quad x_0\cdot x_1^2+x_1\cdot x_0^2=x_0\cdot x_1\cdot(x_0+x_1)=-\frac{A_1\cdot A_2}{A_0^2},$$

$$x_0^2+x_1^2=(x_0+x_1)^2-2x_0\cdot x_1=\frac{A_1^2}{A_0^2}-2\frac{A_2}{A_0}=\frac{A_1^2-2A_0\cdot A_2}{A_0^2};$$

und daher vorstehende Eliminationsgleichung jetzt:

$$\frac{B_0^2\cdot A_2^2}{A_0^2}-\frac{B_0\cdot B_1\cdot A_1\cdot A_2}{A_0^2}+\frac{B_1^2\cdot A_2}{A_0}+\frac{B_0\cdot B_2\cdot(A_1^2-A_0\cdot A_2)}{A_0^2}$$
$$-\frac{B_1\cdot B_2\cdot A_1}{A_0}+B_2^2=0,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung in y, und nach y im Allgemeinen von der 4ten Ordnung ist. Vergleicht man dieses Beispiel mit derselben Aufgabe, wie solche bereits im I. Th. d. W. behandelt sich findet, indem man x statt y, und $A_0=a$, $B_0=a_1$,

$$A_1=b\,x+d\,,\qquad A_2=c\,x^2+e\,x+f\,,$$
$$B_1=b_1x+d_1,\qquad B_2=c_1x^2+d_1x+f_1,$$

setzt, so wird die Uebereinstimmung der beiden Resultate in die Augen springen.

§. 249.

Diese Eliminationsgleichung in y ist höchstens

vom mn^{ten} Grade. — Denn es ist B_μ offenbar eine ganze Funktion von y, höchstens vom μ^{ten} Grade, also:

$$B_a \cdot B_b \cdot B_c \cdots B_m$$

eine ganze Funktion von y, höchstens vom $(mn-p)^{ten}$ Grade. Ferner folgt aus dem Newton'schen Lehrsatze (§. 239.), daß die aus

$$x_0^{n-a} \cdot x_1^{n-b} \cdot x_2^{n-c} \cdot x_3^{n-d} \cdots x_{m-1}^{n-m}$$

gebildete symmetrische Funktion, nach y höchstens vom Grade p werden kann. Also ist jedes Glied der Eliminations-Gleichung nach y höchstens vom Grade $mn-p+p$, d. h. höchstens vom Grade mn.

§. 250.

Es kann die Eliminationsgleichung identisch $0=0$ werden. — Dann ist einer, oder es sind mehrere der Faktoren

$$S[B_a \cdot x_0^{n-a}],\quad S[B_b \cdot x_1^{n-b}],\quad \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

identisch 0; folglich von den Wurzelwerthen x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{m-1} als Funktionen von y, wenigstens einer, vielleicht aber einige für jeden Werth von y, zugleich Wurzelwerthe der zweiten Gleichung $\mathfrak{B}=0$; und es haben also dann die beiden Gleichungen $\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{B}=0$, den gemeinschaftlichen Faktor $x-x_0$, oder $(x-x_0)(x-x_1)$, oder u. s. w. für jeden Werth von y.

Würde man aber für die Eliminations-Gleichung erhalten $A=0$, und A nach y konstant; so wäre dies ein Beweis, daß die gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ sich widersprechen, und daß es also nicht ein einziges Paar zusammengehöriger Werthe für x und y gibt, welches beiden Gleichungen zugleich ein Genüge leistete.

§. 251.

Hat die Gleichung $\mathfrak{B}=0$, den Faktor φ_y ohne x, so kann man $\frac{\mathfrak{B}}{\varphi_y}$ durch $\mathfrak{B}_1$ bezeichnen, und dann y aus $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}_1=0$ auf die (§. 248.) angegebene Art eliminiren,

die erhaltene Eliminationsgleichung aber mit φ_y^m noch multipliciren, um die Eliminationsgleichung nach y zwischen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ zu haben, wie solches unmittelbar aus der Auflösung (§. 248.) hervorgeht, in so ferne $\mathfrak{B}=\varphi_y \cdot \mathfrak{B}_1$ ist.

Hätten $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$, dieselbe ganze Funktion von y, nämlich φ_y, zum größten gemeinschaftlichen Theiler, so könnte man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erst durch ihn dividiren, und dann die Eliminationsgleichung zwischen $\mathfrak{A}_1=0$ und $\mathfrak{B}_1=0$ aufsuchen.

§. 252.

So viele Paare von Werthen von x und y es gibt, welche den beiden Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ ein Genüge leisten, so viele Wurzelwerthe muß auch die Eliminationsgleichung in y haben; und umgekehrt. — Die zu jedem Werth a von y, zugehörigen Werthe von x, findet man aber, wenn man in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$, a statt y setzt, und dann zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den größten gemeinschaftlichen Theiler ψ_x nach x, sucht, diesen $=0$ setzt, und nun die Wurzelwerthe dieser Gleichung $\psi_x=0$ auffindet.

Jeder Werth von x aus $\psi_x=0$, mit dem Werth $y=a$ in Verbindung, leistet dann den Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ ein Genüge. — Daraus folgt aber noch:

1) Hat die Eliminationsgleichung in y den kfachen Wurzelwerth a, so hat die Gleichung $\psi_x=0$ im Allgemeinen k Wurzelwerthe für x; sie ist also dann im Allgemeinen vom Grade k nach x.

2) Umgekehrt, wenn für $y=a$, ein solcher, den beiden ganzen Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemeinschaftlicher größter Theiler vom Grade k existirt, so muß die gesuchte Eliminationsgleichung in y, nothwendig eine Anzahl k, dem a gleicher Wurzelwerthe haben.

§. 253.

Weil für jeden Wurzelwerth der Eliminationsgleichung in y, wenn solcher statt y in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$ gesetzt gedacht wird,

diese ganzen Funktionen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nothwendig einen gemeinschaftlichen Theiler in x haben müssen, so folgt, daß wenn man nach §. 82. verfährt (zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, während y noch ein allgemeiner Ausdruck ist, den größten gemeinschaftlichen Theiler aufsucht, und den letzten Rest, der im Allgemeinen eine Funktion von y ist und durch f_y bezeichnet werden kann, der Null gleich setzt), jeder Wurzelwerth von $f_y = 0$, der nicht zugleich den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in irgend einem der Divisoren, der Null gleich macht, nothwendig ein Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung sein müsse.

Es kann daher diese so gefundene Endgleichung $f_y = 0$ alle Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung enthalten. Sie kann aber auch nicht alle Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung, dagegen in jedem Falle auch mehrere, der Eliminationsgleichung ganz fremde Wurzelwerthe, in sich aufgenommen haben. — Und deshalb ist dieses Verfahren an sich nicht geeignet, um in jedem Falle mit Nothwendigkeit die gesuchte Eliminationsgleichung zu liefern.

Ferner fällt in die Augen, daß wenn in irgend einem der Reste, welche im Allgemeinen ganze Funktionen von x sein müssen, deren Koeffizienten wiederum Funktionen von y sind, diese letztern Koeffizienten alle für einen Werth a von y, der Null gleich werden, dieser Rest selbst der Null gleich werden muß. Wenn daher derselbe Werth a von y nicht zugleich auch den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in irgend einem der vorhergehenden Divisoren, der Null gleich macht, so ist auch solcher Werth a nothwendig ein Wurzelwerth der Eliminationsgleichung. Und ist der letzte Divisor nach x vom Grade r, so ist dieser Werth a ein rfacher Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung (nach §. 252. Nr. 2.).

§. 254.

Setzen wir die beiden Gleichungen des §. 248., nämlich

𝔄 = 0 und 𝔅 = 0, und $m \overline{\overline{>}} n$ voraus, auch daß 𝔄 und 𝔅 keinen gemeinschaftlichen Theiler nach x allein, oder nach x und y haben, unabhängig von einem bestimmten Werth von x oder y; so kann man auf obige Betrachtungen (§. 253.) und auf §. 251. folgendes Verfahren gründen, welches alle Wurzelwerthe der gesuchten Eliminationsgleichung liefert, nicht mehr und nicht weniger.

Man verfahre nämlich wieder so, als wenn (nach §. 82.) der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen 𝔄 und 𝔅 nach x gefunden werden sollte, aber mit den Einschränkungen:

1) auf dem Wege des §. 82. Nr. 6.) alle gebrochenen Funktionen von y, als Koeffizienten von x, zu vermeiden;

2) sowohl die Funktionen 𝔄 und 𝔅, als auch jeden, der während der Operation entstehenden Reste 𝔛, $𝔛_1$, $𝔛_2$, ꝛc. ꝛc., (in so ferne sie Funktionen von x sind, deren Koeffizienten im Allgemeinen wiederum ganze Funktionen von y sein werden), von dem, allen diesen Koeffizienten gemeinschaftlichen größten Faktor in y zu befreien, und nicht diese Funktionen 𝔄, 𝔅, 𝔛, $𝔛_1$, $𝔛_2$, ꝛc. ꝛc. selbst, sondern erst die von diesem, bezüglich größten gemeinschaftlichen Theiler befreiten Funktionen (𝔄), (𝔅), (𝔛), ($𝔛_1$), ($𝔛_2$), ꝛc. ꝛc. im Verlaufe der Operationen anzuwenden.

I. Hat nun 𝔄 den größten Theiler φ_y, so nehme man jeden Wurzelwerth von $\varphi_y = 0$, als so vielfachen Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung, als für ihn, wenn man solchen statt x in 𝔅 setzt, der Grad von 𝔅 wird.

II. Hat aber 𝔅 den größten Theiler $'\varphi_y$, so nehme man jeden Wurzelwerth von $'\varphi_y = 0$, der nicht zugleich ein Wurzelwerth von $\varphi_y = 0$ ist, als so vielfachen Wurzelwerth, als für ihn der Grad von (𝔄) wird.

III. Bezeichnen nun A, 'A, ''A, '''A, ꝛc. ꝛc. die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in den zur Operation benutzten Divisoren (𝔅), (𝔛), ($𝔛_1$), ($𝔛_2$) ꝛc., und hat dann der erste

Rest $\mathfrak{R}$ den größten Theiler ${}^2\varphi_y$, so nehme man jeden Wurzelwerth von ${}^2\varphi_y = 0$, der nicht zugleich ein Wurzelwerth von $\varphi_y = 0$, ${}^1\varphi_y = 0$ und auch nicht von $A = 0$ ist, als so vielfachen Wurzelwerth der Eliminationsgleichung als der Grad von ($\mathfrak{B}$) ist.

IV. Hat ferner der zweite Theil $\mathfrak{R}_1$ den größten Theiler ${}^3\varphi_y$, so nehme man jeden Wurzelwerth von ${}^3\varphi_y = 0$, der nicht zugleich Wurzelwerth ist, weder von $\varphi_y = 0$, ${}^1\varphi_y = 0$, ${}^2\varphi_y = 0$, noch von $A = 0$, $'A = 0$, — als so vielfachen Wurzelwerth der Eliminationsgleichung, als der Grad von ($\mathfrak{R}$) anzeigt.

V. Es ist leicht, dieses Verfahren zu übersehen, bis zu dem letzten Rest $\mathfrak{R}_\nu$; jeder Wurzelwerth von $\mathfrak{R}_\nu = 0$, der nicht zugleich Wurzelwerth irgend einer der vorhergehenden Gleichungen $\varphi_y = 0$, ${}^1\varphi_y = 0$, ${}^2\varphi_y = 0$, ꝛc. ist, und auch nicht von irgend einer der Gleichungen $A = 0$, $'A = 0$, $''A = 0$, $'''A = 0$, ꝛc. ꝛc. ist noch als ein so vielfacher Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung zu nehmen, als der Grad des letzten Divisors verlangt.

VI. Um endlich keinen der Wurzelwerthe der gesuchten Eliminationsgleichung zu übergehen, nehme man noch alle die verschiedenen Wurzelwerthe der Gleichungen $A = 0$, $'A = 0$, $''A = 0$, ꝛc. ꝛc., welche zugleich Wurzelwerthe von $\varphi_y = 0$, ${}^1\varphi_y = 0$, oder ${}^2\varphi_y = 0$, oder ${}^3\varphi_y = 0$, ꝛc. ꝛc. ꝛc., oder endlich von $\mathfrak{R}_\nu = 0$ waren, — setze solche, statt y, in die ganzen Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und sehe zu, ob diese Funktionen einen gemeinschaftlichen Theiler in x haben. Jeden dieser Wurzelwerthe, für welchen sich noch ein solcher gemeinschaftlicher Theiler in x, von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ findet, muß man dann noch als einen so vielfachen Wurzelwerth der Eliminationsgleichung nehmen, als der Grad dieses gemeinschaftlichen Theilers in x anzeigt.

VII. Alle diese Wurzelwerthe zusammen, bilden dann genau die gesuchte Eliminationsgleichung.

Anmerkung 1. Will man aber von $^1\varphi_y = 0$, die mit $\varphi_y = 0$ gemeinschaftlichen Wurzelwerthe absondern, so darf man nur zwischen den Funktionen φ_y und $^1\varphi_y$ den größten gemeinschaftlichen Theiler in y suchen, und $^1\varphi_y$ durch ihn dividiren. Der Quotient $= 0$ gesetzt, giebt dann diejenigen Wurzelwerthe von $^1\varphi_y = 0$, welche nicht zugleich Wurzelwerthe von $\varphi_y = 0$ sind. — Auf ähnliche Weise werden aber auch von den übrigen Gleichungen, die gemeinschaftlichen Wurzelwerthe mit den vorhergehenden Gleichungen, abgesondert.

Anmerkg. 2. Es versteht sich dabei von selbst, daß wenn irgend einer der Reste oder eine der Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ selbst, keinen Theiler in y haben, sogleich zu dem folgenden Rest oder zu der folgenden Funktion von x fortgeschritten wird.

Anmerkg. 3. Hätten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ noch einen gemeinschaftlichen Theiler $\mathfrak{T}$ nach x vom Grade r, in x allein oder in x und y, unabhängig aber von y, und hätte man auf sie dennoch dasselbe Verfahren (des §. 254.) angewandt, so wäre man zuletzt auf einen Rest $\mathfrak{R}_1$ gekommen, der identisch $= 0$ ist. Jeder Werth a von y aus $\varphi_y = 0$, oder $^1\varphi_y = 0$, oder $^2\varphi_y = 0$, rc., oder aus $A = 0$, $'A = 0$, rc., für welchen ein den Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemeinschaftlicher Theiler T vom Grade t existirt, gibt aber dann doch den gemeinschaftlichen Theiler $\frac{T}{\mathfrak{T}}$ nach x, der beiden Funktionen $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{T}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{T}}$, für diesen Werth a von y; so daß dieser Werth a ein (t—r)facher Wurzelwerth der aus den beiden Gleichungen $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{T}} = 0$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{T}} = 0$ hervorgehenden Eliminationsgleichung ist. — Das (im §.) gezeigte Verfahren liefert also, auch im Falle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ noch einen, von y unabhängigen Theiler $\mathfrak{T}$ in x hätten, die Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung, welche in diesem Falle möglich ist, ohne daß es nöthig wäre, die Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ vor der Operation von diesem gemeinschaftlichen Theiler zu befreien.

Anmerkg. 4. Weil z. B. $(\mathfrak{R}_1) = (\mathfrak{R}_2)\cdot Q + \mathfrak{R}_3$ ist, so folgt, daß wenn man für x oder für y einen Werth setzt, der $(\mathfrak{R}_2) = 0$ macht, dann sogleich $\mathfrak{R}_3 = (\mathfrak{R}_1)$ sein müsse, für denselben Werth von x oder von y.

Erstes Beispiel. Es seien die beiden gegebenen Gleichungen

$$\mathfrak{A})\quad x^3 + (y^2+y-1)x^2 + (y^2-2y)x + (-y^3-3y^2+3y) = 0,$$

$$\mathfrak{B})\quad x^3 + \qquad y\cdot x^2 + (y^2-2y)x + (-\qquad 3y^2+2y) = 0;$$

und x zu eliminiren.

Die Theiler φ_y, ${}^1\varphi_y$ existiren nicht; $A = 1$ und $\mathfrak{R} = (y^2-1)x^2 + (-y^3+y)$; daher ${}^2\varphi_y = y^2-1$ und $(\mathfrak{R}) = x^2-y$ und $'A = 1$. — Dann ist weiter $\mathfrak{R}_1 = (y^2-y)x + (-2y^2+2y)$; folglich ${}^3\varphi_y = y^2-y$ und $(\mathfrak{R}_1) = x-2$; daher $''A = 1$. — Endlich wird $\mathfrak{R}_2 = 4-y$. — Mithin ist die gesuchte Eliminationsgleichung

$$(y^2-1)^3\cdot y^2\cdot (y-4) = 0$$

oder

$$y^9 - 4y^8 - 3y^7 + 12y^6 + 3y^5 - 12y^4 - y^3 + 4y^2 = 0.$$

Die zu jedem dieser Werthe von y zugehörigen Werthe von x, welche in Verbindung den gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ ein Genüge leisten, findet man auf folgende Art. — Die zu jedem, aus ${}^2\varphi_y = 0$, d. h. aus $y^2-1 = 0$ hervorgehenden Werth von y, gehörigen Werthe von x liefert die Gleichung $\mathfrak{B} = 0$; also für $y = 1$ die Gleichung $x^3+x^2-x-1 = 0$ oder $(x+1)^2\cdot(x-1) = 0$; und für $y = -1$, die Gleichung $x^3-x^2+3x-5 = 0$. — Ferner liefert die zu jedem aus ${}^3\varphi_y = 0$ hervorgehenden Werth von y, nämlich zu $y = 0$, gehörigen Werthe von x, die Gleichung $(\mathfrak{R}) = 0$, d. h. $x^2 = 0$. — Endlich erhält man die zu $\mathfrak{R}_2 = 0$ oder $y = 4$ gehörigen Werthe von x aus $\mathfrak{R}_1 = 0$, oder $x-2 = 0$.

Den beiden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ genügen also die 9 Paare von Werthen, nämlich

x	1, −1, −1, 0, 0, 2,
y	1, 1, 1, 0, 0, 4,

und noch die 3 Werthe aus $x^3-x^2+3x-5=0$, mit $y=-1$ in Verbindung.

Zweites Beispiel. Es sei x zu eliminiren aus den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\quad x^2-(2y+5)x+(y^2+5y+6)=0,$$
$$\mathfrak{B})\quad x^2-\quad 4yx+(4y^2-1)\quad =0.$$

Hier ist $A=1$; φ_y und ${}^1\varphi_y$ existiren nicht; ferner ist $\mathfrak{R}=(\mathfrak{R})$ $=(2y-5)x+(-3y^2+5y+7)$, ${}^2\varphi_y$ existirt nicht, und $'A=2y-5$. — Folglich wenn $\mathfrak{B}$ mit $'A^2$ (nach §. 82. Nr. 6.) multiplicirt und die Operation weiter fortgesetzt wird,
$\mathfrak{R}_1=y^4-10y^3+35y^2-50y+24$; und $\mathfrak{R}_1=0$ oder $(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)$ die gesuchte Eliminationsgleichung. — Die zugehörigen Werthe von x gibt die Gleichung $(\mathfrak{R})=0$ oder

$$x=\frac{3y^2-5y-7}{2y-5};$$

und den beiden Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ genügen die Paare

x	1, 2, 3, 4,
y	3, 5, 5, 7.

Drittes Beispiel. Aus denselben beiden Gleichungen des vorigen Beispiels, y zu eliminiren. — Nach y geordnet geben sie:

$$\mathfrak{A})\quad y^2+(-2x+5)y+(x^2-5x+6)=0,$$
$$\mathfrak{B})\quad 4y^2-\quad 4xy+(x^2-1)\quad =0.$$

Es ist hier φ_x, ${}^1\varphi_x$ konstant, $'A=4$, und

$$\mathfrak{R}=(-4x+20)y+(3x^2-20x+25)=0,$$

daher $${}^2\varphi_x=x-5$$

und $\mathfrak{R}=-4y+(3x-5)$, so wie $'A=-4$. —

Multiplicirt man hier $\mathfrak{B}$ statt mit 4^2 blos mit 4, so erhält man weiter den letzten Rest:

$$\mathfrak{R}_1 = x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7). \text{ —}$$

Daher ist die gesuchte Eliminationsgleichung:

$(x-5)^2(x-3)(x-7) = 0$ oder $x^4 - 20x^3 + 146x^2 - 460x + 525 = 0.$

Viertes Beispiel. Den Unbekannten x zu eliminiren aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\ x^3 - (3y+5)x^2 + (3y^2+10y+6)x - (y^3+5y^2+6y) = 0$$
$$\mathfrak{B})\ x^3 - \quad 5y\cdot x^2 + \quad (8y^2-1)x - (4y^3-y) \quad = 0.$$

Hier ist $A = 1$, und φ_y und ${}^1\varphi_y$ sind konstant; und dabei

$$\mathfrak{R} = (2y-5)x^2 + (-5y^2+10y+7)x + (3y^3-5y^2-7y);$$

daher ${}^2\varphi_y$ konstant, und $'A = 2y-5$; folglich wenn $\mathfrak{B}$ mit $(2y-5)^2$ multiplicirt wird:

$\mathfrak{R}_1 = (y^4-10y^3+35y^2-50y+24)x + (-y^5+10y^4-35y^3+50y^2-24)$ und ${}^3\varphi_y = y^4-10y^3+35y^2-50y+24$, so wie $(\mathfrak{R}_1) = x-y$ und $''A = 1$. — Der letzte Rest $\mathfrak{R}_3$ wird nun identisch $= 0$, und der letzte Quotient

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_1} = (2y-5)x + (-3y^2+5y+7).$$

Die beiden Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, haben also nach (Anmerkung 3.) den gemeinschaftlichen Theiler $(\mathfrak{R}_1)$ oder $x-y$ unabhängig von jedem Werth von y. Dividirt man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch ihn, so erhält man:

$$x^2 - (2y+5)x + (y^2+5y+6) = 0$$

und

$$x^2 - \quad 4yx + (4y^2-1) \quad = 0,$$

zwischen denen erst die Elimination von x möglich ist. Die Gleichung ${}^3\varphi_y = 0$ oder $y^4-10y^3+35y^2-50y+24 = 0$ ist aber die gesuchte Eliminationsgleichung aus diesen letztern, und die zugehörigen Werthe von x gibt der letzte Quotient $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_1} = 0$, oder die Gleichung: $(2y-5)x + (-3y^2+5y+7) = 0$, oder $x = \frac{3y^2-5y-7}{2y-5}$.

(Man vergleiche damit das zweite Beispiel.)

Fünftes Beispiel. Man soll x eliminiren aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\quad yx^3-(y^3-3y-1)x+y=0,$$
$$\mathfrak{B})\quad x^2+\ (-y^2+3)\quad =0.$$

Hier sind φ_y, $'\varphi_y$ konstant; $A=1$, $\mathfrak{R}=x+y$, $^2\varphi_y$ konstant, $'A=1$, $\mathfrak{R}_1=3$. — Folglich hat die gesuchte Eliminationsgleichung gar keinen Wurzelwerth, d. h. es findet keine Eliminationsgleichung statt.

Die beiden gegebenen Gleichungen finden also für dieselben Werthe von x und y nie zugleich statt.

Noch mehr Beispiele zur Uebung.

$$1)\quad \begin{cases} x^3-(3y-1)x^2+(y^2-2y)x+(y^2+y)=0, \\ x^3-\ (y-1)x^2-\ \ (y-1)x+\ 1\quad =0. \end{cases}$$

Man findet den gemeinschaftlichen Theiler $x+1$ unabhängig von y. Für die neuen Gleichungen

$$x^2-3yx+(y^2+y)=0 \quad \text{und} \quad x^2-yx+1=0$$

findet sich dann als Eliminationsgleichung:

$$y^4-7y^2+1=0.$$

$$2)\quad \begin{cases} 2yx^3+(2y^2-4y-2)x^2+(2y^4-6y^3-2y^2+6y+1)x-2=0, \\ yx^2+\ (y^2-2y-1)x\ +\ (y^4-3y^3-\ y^2+3y)\quad =0. \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+(-y^3+3y^2+y-3)=0, \\ x^2+(2y+4)x+\ (y^2+4y+3)\quad =0. \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} x^3-(3y+9)x^2+(3y^2+18y+23)x-(y^3+9y^2+23y+15)=0, \\ x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)\,x+(y^3-3y^2-\ y+3)=0. \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} 3x^3-2y\,x^2-3y^2x+2y^3=0, \\ (y^3-\ y)x\ -(6y^2-6)\quad =0. \end{cases}$$

Hier ist $^1\varphi_y=y^2-1$, und $(\mathfrak{B})=yx-6$; $A=y$.

$$6)\quad \begin{cases} (y^2-y)x^2+(y^3-y^2)x+(y^4-y^3-y+1)=0, \\ (y^2-3y+2)x^2+\ (y^2-y)x+(-y^3+2y^2-y)=0. \end{cases}$$

Hier ist $\varphi_y=y-1$ und $^1\varphi_y=y-1$; daher haben φ_y und

$^1\varphi_y$ und also auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den gemeinschaftlichen Theiler $y-1$ unabhängig von x, von dem sie erst befreit werden müssen, ehe man das Eliminiren versuchen kann.

$$7)\ \begin{cases} x^3+(3y-1)x^2+(3y^2-2y-9)x+y^3-y^2-9y+9 = 0, \\ x^2-2yx+y^2+4x-4y+3 = 0. \end{cases}$$

Endgleichung in y ... $y(y-2)^2(y-1)^2(y-3) = 0$,

Endgleichung in x ... $x^2(x-1)(x+1)(x+3)(x-4) = 0$.

$$8)\ \begin{cases} y^3+(2x+2)y-x^2y+7xy-5y-2x^3+yx^2-7x-6 = 0, \\ y^2+3x^2+4xy+y+5x-2 = 0. \end{cases}$$

Endgleichung in y ... $(y+2)(y+3)(2y+5)(2y-5)(y+5) = 0$,

Endgleichung in x ... $(x-1)^2(2x-1)(2x+1)(x-2) = 0$.

$$9)\ \begin{cases} x^2-2xy+y^2-4x+4y+3 = 0, \\ x^2-2xy+y^2-6x+6y-7 = 0 \end{cases}$$

haben keine Eliminationsgleichung.

$$10)\ \begin{cases} x^2+2xy+y^2-10x-10y+21 = 0, \\ x^2-2xy+y^2+6x-6y+5 = 0. \end{cases}$$

Endgleichung in y ... $(y-4)^2(y-6)(y-2) = 0$,

Endgleichung in x ... $(x-3)(x-1)^3 = 0$.

§. 255.

Kann eine der beiden Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ oder $\mathfrak{B}=0$ in Faktoren zerlegt werden; ist z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{E}$, und sind dabei $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, Funktionen von x und y, oder von x allein, so ist klar, daß jeder Werth von y, welcher verursacht, daß $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$, einen gemeinschaftlichen Faktor in x haben, nothwendig ein Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung in y sein müsse, und daß auch umgekehrt jeder Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung in y, zwischen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$, zugleich unter den Wurzelwerthen der Eliminationsgleichungen in y, zwischen $\mathfrak{C}=0$ und $\mathfrak{B}=0$, zwischen $\mathfrak{D}=0$ und $\mathfrak{B}=0$, und zwischen $\mathfrak{E}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ enthalten sein müsse.

Wäre endlich auch 𝔅 noch in ein Produkt 𝔉·𝔊·ℌ mehrerer andern ganzen Funktionen von x und y, oder von x allein, zerlegbar, so dürfte man nur die Eliminationsgleichungen suchen, zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$, zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$, zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$, dann zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$, zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$, zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$; endlich zwischen $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$, $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$, und zwischen $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$; und aus diesen Eliminationsgleichungen die gesuchte Eliminationsgleichung in y zwischen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ durch Multiplikation zusammensetzen.

Beispiel. Ist aus den gegebenen Gleichungen

$$\mathfrak{A})\quad (yx-6)(x-1)(x+1) = 0,$$
$$\mathfrak{B})\quad (2x-3y)(x-y)(x+y) = 0,$$

x zu eliminiren, so erhält man als Eliminationsgleichung in y zwischen

$$yx-6 = 0 \quad \text{und} \quad 2x-3y = 0,$$

die Gleichung $y^2-4 = 2$ oder $(y-2)(y+2) = 0$;

dann als Eliminationsgleichung zwischen

$$x-1 = 0 \quad \text{und} \quad 2x-3y = 0,$$

die Gleichung $3y-2 = 0$;

und als Eliminationsgleichung zwischen

$$x+1 = 0 \quad \text{und} \quad 2x-3y = 0,$$

die Gleichung $3y+2 = 0$.

Eben so sind die Eliminationsgleichungen zwischen

$$\left.\begin{array}{l} yx-6 = 0 \quad \text{und} \quad x-y = 0 \\ x-1 = 0 \quad \text{und} \quad x-y = 0 \\ x+1 = 0 \quad \text{und} \quad x-y = 0 \end{array}\right\} \text{bezüglich} \left\{\begin{array}{l} y^2-6 = 0, \\ y-1 = 0, \\ y+1 = 0. \end{array}\right.$$

Endlich sind die Eliminationsgleichungen zwischen

$$\left.\begin{array}{l} yx-6 = 0 \quad \text{und} \quad x+y = 0 \\ x-1 = 0 \quad \text{und} \quad x+y = 0 \\ x+1 = 0 \quad \text{und} \quad x+y = 0 \end{array}\right\} \text{bezüglich} \left\{\begin{array}{l} y^2+6 = 0, \\ y+1 = 0, \\ y-1 = 0. \end{array}\right.$$

Daher die gesuchte Eliminationsgleichung zwischen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$

$$(y^2-4)(3y-2)(3y+2)(y^2-6)(y^2+6)(y-1)^2(y+1)^2 = 0.$$

Eben so leicht läßt sich die Eliminationsgleichung in x finden.

§. 256.

Man kann auch zur Eliminationsgleichung zwischen den Gleichungen:

$$\text{I.} \quad x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S = 0,$$
$$\text{II.} \quad x^2+px+q = 0,$$

auf folgende Weise gelangen:

Man findet aus II.):

$$1) \quad x^2 = -px-q;$$

daraus $\quad x^3 = (-px-q)x = -px^2-qx,$

und indem man statt x^2 sogleich wieder den Werth $-px-q$ setzt:

$$2) \quad x^3 = (p^2-q)x+pq;$$

daraus wieder, auf dieselbe Weise verfahrend; d. h. mit x multiplicirend, und statt x^2 rechts den Werth setzend:

$$x^4 = (p^2-q)x^2+pqx$$
$$= (p^2-q)(-px-q)+pqx,$$

oder $\quad 3) \quad x^4 = (-p^3+2pq)x-q(p^2-q).$

Diese Werthe für x^2, x^3 und x^4, substituirt man nun in die Gleichung I.), und erhält eine Gleichung III.), die im Allgemeinen um einen Grad niedriger sein wird, als die II.), die also hier vom ersten Grade sein muß. — Man hat dann:

$$\text{II.} \quad x^2+px+q = 0,$$
$$\text{III.} \quad x+r = 0.$$

Mit diesen Gleichungen (II. und III.) verfahre man nun gerade so, wie mit den Gleichungen I.) und II.). Dann erhält man (z. B. aus III.):

$$1) \quad x = -r,$$

hieraus wieder $x^2 = -rx = (-r)(-r)$,

oder 2) $x^2 = r^2$.

Diese Werthe für x und x^2 in II.) substituirt, geben dann wiederum eine Gleichung IV.), welche im Allgemeinen um einen Grad niedriger sein muß, als die III.), die folglich hier vom nullten Grade, oder in x konstant wird.

Denkt man sich nun, daß in den beiden gegebenen Gleichungen, das y, wo es vorkommt, jedesmal einen seiner Werthe aus der Eliminationsgleichung repräsentirt, so ist klar, daß für diesen Werth von y, die Endgleichung IV.) nothwendig identisch sein muß. Es wird daher die Endgleichung alle Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung enthalten. — Weil aber die Endgleichung auch noch, der Eliminationsgleichung fremde Wurzelwerthe enthalten kann, so darf solche nicht unbedingt als Eliminationsgleichung angenommen werden.

Anmerkung. Diese Methode selbst ist hier nur beispielsweise angedeutet, weil das Verfahren so sehr einfach ist, daß ein Beispiel hinreicht, um es erkennen zu lassen.

Die ganze Methode dreht sich um den Satz, daß wenn man die Gleichung:

$$1)\quad x^m = Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \cdots$$

hat, man jede höhere als die m^{te} Potenz, durch eine Funktion vom $m-1^{ten}$ Grade nach x ausdrücken könne, dadurch daß man die gegebene Gleichung 1.) mit x multiplicirt, und rechts statt x^m sogleich wieder (aus 1.) ihren Werth setzt.

So erhält man:

$$2)\quad x^{m+1} = Px^m + Qx^{m-1} + Rx^{m-2} + \cdots$$
$$= (P^2+Q)x^{m-1} + (PQ+R)x^{m-2} + \cdots$$

und

$$3)\quad x^{m+2} = (P^2+Q)x^m + (PQ+R)x^{m-1} + \cdots$$
$$= [(P^2+Q)P + (PQ+R)]x^{m-1} + \cdots$$

u. s. w. f.

§. 257.

Um an einem Beispiel auch noch ein viertes Eliminations-Verfahren anzudeuten, mag x aus den Gleichungen

$$Nx^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$nx^3+px^2+qx+r=0$$

eliminirt werden.

Zu dem Ende multiplicire man beide Gleichungen dergestalt, daß bald die ersten, bald die letzten Koeffizienten in beiden einander gleich werden, und addire oder subtrahire die neuen Gleichungen, um Resultate mit weniger Gliedern zu bekommen, die sich dann auch auf einen niedrigern Grad bringen lassen. So z. B. erhält man:

$$\begin{array}{l} Nnx^3+Pnx^2+Qnx+Rn=0 \\ Nnx^3+pNx^2+qNx+rN=0 \\ \hline \text{I.}\quad (Pn-pN)x^2+(Qn-qN)x+(Rn-rN)=0. \end{array}$$

Dann aber auch

$$\begin{array}{l} Nrx^3+Prx^2+Qrx+Rr=0 \\ nRx^3+pRx^2+qRx+Rr=0 \\ \hline (Nr-nR)x^3+(Pr-pR)x^2+(Qr-qR)x=0; \end{array}$$

oder, wenn durch x dividirt wird,

$$\text{II.}\quad (Nr-nR)x^2+(Pr-pR)x+(Qr-qR)=0;$$

und da man nun zwei neue Gleichungen (I. und II.) hat, von niedrigerem Grade, so behandle man diese gerade so wie die gegebenen; setze zur Abkürzung

$$'N,\quad 'P,\quad 'Q,\quad 'n,\quad 'p,\quad 'q,$$

bezüglich statt:

$$Pn-pN,\quad Qn-qN,\quad Rn-rN,\quad Nr-nR,\quad Pr-pR,\quad Qr-qR,$$

wo $'Q=-'n$, und hat dann:

$$\text{I.}\quad 'Nx^2+'Px+'Q=0,$$
$$\text{II.}\quad 'nx^2+'px+'q=0.$$

Hieraus:

$$\text{III.}\quad ('P'n-'p'N)x+('Q'n-'q'N)=0$$

und $$\text{IV.}\quad ('N'q-'n'Q)x+('P'q-'p'Q)=0,$$

oder

$$\text{III.}\quad ''Nx+''P=0$$

$$\text{IV.}\quad ''nx+''p=0,$$

woraus zuletzt

$$''N''p-''n''P=0$$

als Endgleichung ohne x hervorgeht.

Aber auch hier muß diese Endgleichung zwar die Eliminationsgleichung enthalten, dagegen kann und wird sie auch noch der Eliminationsgleichung fremde Faktoren in sich aufnehmen. (Vergl. das Eliminiren im I. Th. d. W.).

§. 258.

Ein fünftes Verfahren, um aus den beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\quad x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\cdots A_{m-1}x+A_m=0,$$

$$\mathfrak{B})\quad x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+B_3x^{n-3}+\cdots\cdots+B_n=0,$$

den Unbekannten x zu eliminiren, ist Folgendes:

Man nimmt zwei ganze Funktionen von x an:

$$\mathfrak{C})\quad x^{m-1}+\alpha_1x^{m-2}+\alpha_2x^{m-3}+\cdots+\alpha_{m-1},$$

$$\mathfrak{D})\quad x^{n-1}+\beta_1x^{n-2}+\beta_2x^{n-3}+\cdots+\beta_{n-1},$$

und sucht zu bewirken, daß $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$ wird, welches nach §. 77. geschieht, und $m+n-1$ Gleichungen giebt zwischen ihren Koeffizienten. Diese $m+n-1$ Gleichungen sind, in Bezug auf jeden der $(m-1)+(n-1)$ Unbestimmten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_{m-1}, \beta, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-1}$, einfache Gleichungen, und es können daher diese $m+n-2$ Unbestimmten aus ihnen leicht eliminirt werden, so daß zuletzt eine Gleichung zwischen den Koeffizienten $A_1, A_2, \cdots A_m, B_1, B_2, \cdots B_n$ übrig bleibt. — Ist nämlich $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D}=\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$, so ist auch $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, und es haben also dann

A und B einen gemeinschaftlichen Theiler vom ersten Grade, weil C und D um einen Grad niedriger sind als A und B.

Allein auch diese Methode gibt nicht nothwendig die Eliminationsgleichung genau, und es müßten daher, sollte sie zweckdienlich sein, auch für sie noch die Modifikationen angegeben werden, die zu beobachten sind, um gewiß sein zu können, jedesmal auch wirklich die gesuchte Eliminationsgleichung genau zu haben; d. h. eine Gleichung, welche genau alle und nicht mehr Werthe von y enthält, als es Paare von Werthen gibt, die den beiden gegebenen Gleichungen zugleich genügen.

§. 259. Aufgabe.

Es sind gegeben drei höhere Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

zwischen drei Unbekannten x, y, z, so daß die erste von der m^{ten}, die zweite von der n^{ten} und die dritte von der p^{ten} Ordnung ist, man soll zwei der Unbekannten x und y eliminiren.

Auflösung I. 1) Man eliminire x aus $A = 0$ und $B = 0$; dann auch aus $A = 0$ und $C = 0$.

2) Aus den beiden Eliminationsgleichungen eliminire man dann noch y; so bekommt man die gesuchte Eliminationsgleichung, wenn man die Endgleichung zuvor von ihren fremden, zur Eliminationsgleichung nicht gehörigen Faktoren befreit.

Auflösung II. 1) Man denke sich die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ nach x und y aufgelöset, und die mn Paare von Werthen für x und y, durch die Buchstaben

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \cdots \ \mu, \ \nu \quad \text{für x}$$

und $$\alpha_1, \ \beta_1, \ \gamma_1, \ \cdots \ \mu_1, \ \nu_1 \quad \text{für y}$$ bezeichnet.

2) Man setze jedes dieser mn Paare von Werthen für x und y in die dritte Gleichung $C = 0$, statt x und statt y, so entstehen mn neue Gleichungen, deren Produkt die gesuchte Eliminationsgleichung sein muß. — Diese Eliminationsgleichung bekommt dann die Form

$$S[P_{a,b} \cdot P_{c,b} \cdot P_{e,f} \cdots P_{m,n} \cdot \alpha^a \cdot \alpha_1^b \cdot \beta^c \cdot \beta_1^b \cdot \gamma^e \cdot \gamma_1^f \cdots \nu^m \cdot \nu_1^n] = 0,$$

wo $P_{a,b}$, $P_{c,b}$, $P_{e,f}$, ꝛc. ganze Funktionen von z sind.

3) Dieses Produkt ist aber offenbar eine symmetrische Funktion der Wurzelwerthe α, β, γ, ⋯ μ, ν, und α_1, β_1, γ_1, ⋯ μ_1, ν_1, und es können daher die vorkommenden Koeffizienten von z, durch die Koeffizienten der aus $A = 0$ und $B = 0$, durch Elimination erstlich von y, dann von x, gezogenen Eliminationsgleichungen, rational ausgedrückt werden, so daß die Eliminationsgleichung in z die unbekannten Wurzelwerthe α, β, γ, ⋯ μ, ν und α_1, β_1, γ_1, ⋯ μ_1, ν_1, nicht mehr enthält.

Die Eliminationsgleichung in z kann dabei nicht den Grad mnp übersteigen. — Es gibt daher nie mehr als mnp zusammengehörige Werthe von x, y und z, welche allen drei gegebenen Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0 \quad \text{und} \quad C = 0,$$

zugleich genügen.

Anmerkung. Was über die Elimination zwischen mehr als drei höhern Gleichungen gesagt werden kann, ist leicht zu übersehen.

Wir wollen daher nur noch die nachstehende Anwendung machen.

§. 260. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Bestimmungsgleichung $P_x = 0$, in welcher eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ vorkommt, wo a einen beliebigen von den Unbekannten abhängigen oder unabhängigen Ausdruck bedeuten mag. Man soll aus dieser Gleichung $P_x = 0$ diese Wurzel $\sqrt[m]{a}$ eliminiren, d. h. eine Gleichung ableiten, welcher noch durch dieselben Werthe der Unbekannten genügt wird, durch welche der gegebenen genügt wurde, in der aber diese Wurzel $\sqrt[m]{a}$ nicht mehr vorkommt.

Auflösung. Man nehme einen in der gegebenen Gleichung $P = 0$ nicht vorkommenden Buchstaben t, setze t statt $\sqrt[m]{a}$ in die gegebene Gleichung $P_x = 0$, und eliminire dann dieses t aus den beiden Gleichungen:

$$P_x = 0 \quad \text{und} \quad t^m - a = 0,$$

so ist die Eliminationsgleichung die gesuchte.

Ist die gegebene Gleichung $P_x = 0$ eine höhere Gleichung vom n^{ten} Grade mit einem Unbekannten x, so kann die durch Wegschaffung von $\sqrt[m]{a}$ entstehende Gleichung höchstens vom Grade mn sein.

Anmerkung 1. Bedenkt man, daß $\sqrt[m]{a}$ in der gegebenen Gleichung $P_x = 0$, jeden ihrer m Werthe vorstellen kann, so folgt, daß die Eliminationsgleichung dieselbe wird für m verschiedene Gleichungen $P_x = 0$. Hat daher in jeder dieser Gleichungen $P_x = 0$, der Unbekannte x, n Werthe, so hat x in allen m Gleichungen $P_x = 0$, nothwendig im Allgemeinen mn Werthe; welche der Unbekannte x in der Eliminationsgleichung haben muß.

Anmerkung 2. Träfe es sich, daß die $\sqrt[m]{a}$ in der Gleichung $P_x = 0$, z. B. zweimal vorkäme, und jedesmal einen andern der Werthe repräsentiren könnte, so müßte man den einen Werth durch t, den andern durch u bezeichnen, wo t und u, der Gleichung $P = 0$ fremde Buchstaben sein müssen, und dann t und u aus den 3 Gleichungen

$$P = 0, \quad t^m - a = 0, \quad u^m - a = 0,$$

eliminiren, um die für diesen Fall gesuchte Gleichung zu haben, welche die $\sqrt[m]{a}$ nicht mehr enthält.

§. 261.

Aber gerade so, wie eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ aus einer gegebenen Gleichung eliminirt wird, kann man auch beliebig viele solcher

Wurzeln, sowohl mit einerlei als auch mit verschiedenen Wurzel-Exponenten eliminiren, und dann auch jedesmal den Grad der Eliminationsgleichung bestimmen, über den die entstehende Gleichung nicht hinausgehen kann, wenn die gegebene Gleichung $P=0$ eine höhere Gleichung ist.

Anmerkung. Man kann eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ auch dadurch eliminiren, daß man die Gleichung nach dieser Wurzel auflöset, und nachher auf beiden Seiten mit m potenzirt. — Die Gleichung selbst braucht aber zu diesem Behufe nicht einmal aufgelöset zu sein, wenn sie nur auf die Form

$$\frac{A\cdot\sqrt[m]{a}}{B}=C$$

gebracht worden ist.

Wir wollen aber nun zu den Versuchen übergehen, welche man für die Auflösung einer allgemeinen höheren Gleichung gemacht hat, so wie nachgehends zu den Auflösungen noch einiger besonderen Gleichungen mit allgemeinen Koeffizienten.

§. 262.

Tschirnhausen'sche Auflösungsmethode.

Die Methode, welche Tschirnhausen gebraucht, ist, auf die Gleichungen vom dritten und vierten Grade angewandt, folgende:

I. Wenn die aufzulösende Gleichung vom dritten Grade ist:

$$z^3+pz^2+qz+r=0 \quad \cdots(1).$$

Man setzt $z^2+bz+(x+a)=0 \quad \cdots(2)$,

und eliminirt z (aus 1. und 2.), um eine Gleichung in x zu erhalten, welche nothwendig vom dritten Grade werden, und die Form

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0 \quad \cdots(3)$$

bekommen muß.

Nun setzt man $A=0$ und $B=0$, und bestimmt daraus

die Werthe von a und b, so wie aus $x^3+C=0$, die drei Werthe von x, alles durch die Koeffizienten p, q und r ausgedrückt. Hierauf substituirt man zusammengehörige Werthe von a, b und x in die Gleichung 2.), und sucht nachher zwischen 1.) und 2.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in z. — Dieser, der Null gleich gesetzt, gibt dann einen Werth von z, welcher ein Wurzelwerth der gegebenen Gleichung 1.) sein muß.

Der Erfolg dieser Methode hängt davon ab, ob sich die beiden Gleichungen $A=0$ und $B=0$, nach a und b auflösen lassen; welches hier der Fall ist.

Man konnte auch statt der Gleichung 2.) die noch allgemeinere $cz^2+bz+(x+a)=0$ nehmen, und nachher in Bezug auf die Willkührlichkeit eines dieser Koeffizienten, eine für die Rechnung bequeme willkührliche Annahme [etwa (= 1), wie Bezout gethan] machen, wie von Euler geschehen ist.

II. Wenn aufzulösen ist, die Gleichung vom vierten Grade:

$$z^4+pz^3+qz^2+rz+s=0 \quad \cdots (1).$$

Man setzt $z^3+cz^2+bz+(x+a)=0 \quad \cdots (2)$, und eliminirt z aus 1.) und 2.). Dadurch erhält man nothwendig eine Gleichung in x vom vierten Grade von der Form:

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \quad \cdots (3).$$

In dieser Gleichung setzt man nun:

$$A=0, \quad B=0 \quad \text{und} \quad C=0,$$

und bestimmt daraus a, b und c, so wie dann aus

$$x^4+D=0,$$

noch x, durch p, q, r und s ausgedrückt; setzt zusammengehörige Werthe von a, b, c und x in die Gleichung 2.), und sucht dann zwischen 1.) und 2.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in z. — Dieser der Null gleich gesetzt, gibt dann einen Werth von z, welcher der gegebenen Gleichung 1.) genügt.

Weil es aber hier schon schwerer sein dürfte, aus $A=0$, $B=0$, $C=0$, die Unbestimmten a, b, c zu bestimmen; da

ferner x aus 3.) schon gefunden werden kann, wenn nur $A = 0$ und $C = 0$ ist, so konnte man statt der Gleichung 2.) auch diese nehmen:

$$z^2 + bz + (x + a) = 0 \quad \cdots (4),$$

dann durch Elimination von z zwischen 1.) und 4.) die Gleichung

$$x^4 + A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1 = 0 \quad \cdots (5),$$

ableiten, nachgehends $A_1 = 0$ und $C_1 = 0$ setzen, daraus a und b, und zuletzt aus

$$x^4 + B_1 x^2 + D_1 = 0,$$

auch x finden, — ein System der Werthe von a, b und x in 4.) substituiren, und endlich zwischen 1.) und 4.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in z suchen, und diesen $= 0$ setzen, um wenigstens einen Wurzelwerth der gegebenen Gleichung 1.) zu erhalten.

Man kann aber in beiden Fällen in den Gleichungen 2.) und 4.), der höchsten Potenz von z ebenfalls einen unbestimmten Koeffizienten d geben, um nachgehends noch eine beliebige Annahme machen, und dadurch die Rechnungen vereinfachen oder leichter übersehen zu können.

Anmerkung. Daß und wie man diese Methode auf Gleichungen von jedem Grade anwenden könne, fällt in die Augen. Daß sie aber nicht einmal auf eine Gleichung vom 5ten Grade mit Erfolg angewandt werden kann, liegt darin, weil die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ rc. rc. zur Bestimmung der eingeführten Unbestimmten a, b, c, d, rc. selbst auf einen höhern Grad steigen, der ihre allgemeine Auflösung nicht mehr verstattet.

§. 263. Zweite Methode.

Die im I. Th. d. W. angewandte Methode, die Auflösung der kubischen Gleichungen zu erhalten, hat La Grange auch auf die Gleichungen vom 4ten Grade ausgedehnt. Um also die Gleichung

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

aufzulösen, setze man

$$z = x + y + u,$$

und zerlege die entstehende Gleichung [durch Nullsetzung der Glieder, welche $(x+y+u)$ und $(xy+xu+yu)$ zum Faktor haben] in drei andere, aus denen nachgehends x, y und u, folglich dann auch z gefunden wird.

§. 264. Methode des La Grange.

I. Wenn aufzulösen ist die Gleichung vom dritten Grade:

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Man bezeichne die drei Wurzelwerthe derselben durch a, b, c, und bilde sich mittelst unbestimmter Koeffizienten l, m, n, eine Funktion $la+mb+nc$, so wie alle durch Vertauschung der Elemente a, b, c, aus dieser hervorgehenden Funktionen:

1) $la+mb+nc$,	4) $lb+ma+nc$,
2) $lc+ma+nb$,	5) $lc+mb+na$,
3) $lb+mc+na$,	6) $la+mc+nb$,

Ferner bilde man (nach §. 245.) eine Gleichung in x, welche diese sechs Funktionen von a, b und c, zu Wurzelwerthen hat, welche also vom 6ten Grade sein wird; bestimme aber die Unbestimmten l, m und n so, daß diese Gleichung vom 6ten Grade in x, die Form

$$x^6 + Ax^3 + B = 0 \qquad \cdots (2)$$

bekommt, folglich als eine quadratische Gleichung nach x^3 aufgelöset werden kann, so daß man für x^3 zwei Werthe x_1 und x_2 erhält. Sind nun α, α^2 und α^3 (oder 1) die drei Werthe von der $\sqrt[3]{1}$, so können diese 6 Werthe von x dargestellt werden, durch x_1, $\alpha \cdot x_1$, $\alpha^2 \cdot x_1$, und x_2, $\alpha \cdot x_2$, $\alpha^2 \cdot x_2$. — Dann hat man die drei Gleichungen

$$la+mb+nc = x_1; \quad lb+ma+nc = x_2 \quad \text{und} \quad a+b+c = -p,$$

aus denen, in so ferne l, m, n bestimmt, und die Gleichungen

selbst in Bezug auf a, b, c einfache sind, diese Unbekannten a, b, c ohne weiteres gefunden werden können.

Zur Bestimmung von l, m und n hat man aber die Gleichungen:

$$\alpha^2(la+mb+nc) = \alpha(lc+ma+nb) = lb+mc+na,$$

und $$\alpha^2(lb+ma+nc) = \alpha(lc+mb+na) = la+mc+nb,$$

welchen Gleichungen Genüge zu leisten getrachtet werden muß. Dies geschieht aber, indem man einzeln die Koeffizienten von a, b und c einander gleich setzt, wodurch man erhält:

$$\alpha^2 l = \alpha m = n; \quad \alpha^2 m = \alpha n = l; \quad \alpha^2 n = \alpha l = m,$$

weshalb einer der Unbestimmten noch beliebig genommen werden kann. Setzt man daher $n = 1$, so erhält man:

$$l = \alpha, \quad m = \alpha^2, \quad n = 1.$$

II. Wenn die Gleichung vom 4ten Grade

$$z^4+pz^2+qz+r = 0$$

aufgelöset werden soll.

Man bezeichne die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung durch a, b, c, d, und bilde eine neue Gleichung in x, welche zu Wurzelwerthen hat, die Funktion $ka+lb+mc+nd$, und alle durch beliebige Versetzung der Wurzelwerthe a, b, c, d, aus ihr hervorgehenden Funktionen; weshalb solche Gleichung in x vom 24sten Grade sein wird. Man muß nun die Unbestimmten k, l, m, n, so annehmen, daß diese Gleichung in x sich auf einen niedrigern Grad reducirt.

Dies geschieht aber, wenn $k = l = 1$ und $m = n = -1$ genommen wird, weil aus a, b, c, d, nur 6 verschiedene Funktionen von der Form $(a+b)-(c+d)$ gebildet werden können, von denen je zwei einander gleich, aber mit dem entgegengesetzten (+)- oder (−)-Zeichen versehen sind, so daß die Gleichung in x, welche diese 6 Wurzelwerthe hat, in Bezug auf x^2 nur vom 3ten Grade sein, ihre Auflösung daher vorausgesetzt werden

kann. — Setzt man $x^2 = y$, so wird die Gleichung in y die Form haben:

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0;$$

und dabei wird sein:

$A = -[(a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2];$

$B = (a+b-c-d)^2 \cdot (a+c-b-d)^2 + (a+b-c-d)^2 \cdot (a+d-b-c)^2 + (a+c-b-d)^2 \cdot (a+d-b-c)^2;$

$C = -(a+b-c-d)^2 \cdot (a+c-b-d)^2 \cdot (a+d-b-c)^2.$

Es ist aber bequemer, die Rechnungen auf folgende Art auszuführen. — Es ist nämlich: $a+b+c+d = 0$, und

1) $(a+b-c-d)^2$
$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd-2ac-2ad-2bc-2bd$
$= (a+b+c+d)^2-4ac-4ad-4bc-4bd$
$= -4(ac+ad+bc+bd) = -4p+4ab+4cd.$

Eben so:

2) $(a+c-b-d)^2 = -4p+4ac+4bd$ und

3) $(a+d-b-c)^2 = -4p+4ad+4bc.$

Folglich ist die Gleichung in y:

$$(y+4p-4ab-4cd)(y+4p-4ac-4bd)(y+4p-4ad-4bc)$$

oder $[u-(ab+cd)] \cdot [u-(ac+bd)] \cdot [u-(ad+bc)] = 0,$

wenn man $y+4p = 4u$ setzt. Setzt man diese Gleichung in u, so wie folgt, nämlich

$$u^3 + A_1 \cdot u^2 + B_1 \cdot u + C_1 = 0,$$

so hat man:

$A_1 = -(ab+cd+ac+bd+ad+bc) = -p;$

$B_1 = (ab+cd)(ac+bd)+(ab+cd)(ad+bc)+(ac+bd)(ad+bc);$

und dies gibt $B_1 = -4r$, — Endlich ist

$-C_1 = -(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$
$= (a^3bcd+ab^3cd+abc^3d+abcd^3)$
$+(a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2).$

Der erste Summand ist $=-2pr$; der zweite dagegen $=-2pr+q^2$; folglich $C_1=4pr-q^2$, und die Gleichung in u ist $u^3-pu^2-4ru+(4pr-q^2)=0$.

Bezeichnet man die drei Wurzelwerthe derselben durch u_1, u_2, und u_3, so hat man (aus Nr. 1., Nr. 2. und Nr. 3.):

$$\left.\begin{aligned}(a+b-c-d)^2&=4(u_1-p)\\(a+c-b-d)^2&=4(u_2-p)\\(a+d-b-c)^2&=4(u_3-p)\end{aligned}\right\}\text{folglich}\left\{\begin{aligned}a+b-c-d&=2\sqrt{u_1-p}\\a+c-b-d&=2\sqrt{u_2-p}\\a+d-b-c&=2\sqrt{u_3-p}\,,\end{aligned}\right.\quad(\odot)$$

welche drei Gleichungen, in Verbindung mit $a+b+c+d=0$, die vier Wurzelwerthe a, b, c, d, bestimmen. Sie geben:

$$\left.\begin{aligned}a&=\tfrac{1}{2}(+\sqrt{u_1-p}+\sqrt{u_2-p}+\sqrt{u_3-p})\\b&=\tfrac{1}{2}(+\sqrt{u_1-p}-\sqrt{u_2-p}-\sqrt{u_3-p})\\c&=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{u_1-p}+\sqrt{u_2-p}-\sqrt{u_3-p})\\d&=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{u_1-p}-\sqrt{u_2-p}+\sqrt{u_3-p})\,,\end{aligned}\right\}\quad(☾)$$

wo die Quadratwurzeln jedesmal einen und denselben ihrer beiden Werthe vorstellen, während aber noch unbestimmt geblieben ist, welcher jedesmal der zu nehmende sei. Um dies zu bestimmen, muß man den Werth von a, nämlich

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{u_1-p}+\sqrt{u_2-p}+\sqrt{u_3-p})$$

nehmen, und ihn statt z in die gegebene Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

setzen, und nun die Bedingungen bemerken, unter denen diese Gleichung identisch wird. Damit man aber ganz sicher sein kann, alle Bedingungen hinsichtlich der jedesmal zu nehmenden Werthe der Wurzeln zu haben, muß man entweder nachsehen, ob nicht, wenn man b, c und auch d statt z setzt, dadurch noch neue Bedingungen entstehen, oder man muß auf einem andern Wege nachweisen, daß diese letztern Substitutionen keine von der erst erhaltenen verschiedene Bedingung liefern können.

Man kann aber diese Bedingungen auf folgendem einfachen Wege zu finden versuchen. — Es seien nämlich α, β und γ

gerade die für $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$ und $\sqrt{u_3-p}$ zu nehmenden Werthe, so sind die 4 Wurzelwerthe der Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

folgende:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma),\quad \tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma),\quad \tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma).$$

Sind aber α, β und γ, Werthe der oben bemerkten Quadratwurzeln, so sind $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$, die zweiten Werthe derselben Wurzeln, und man kann nun leicht folgende Bemerkung machen:

1) Setzt man in den vier Ausdrücken (☾) statt zwei der Werthe α, β und γ, die andern $-\alpha$, $-\beta$ oder $-\gamma$, so ergeben sich dieselben Ausdrücke (☾) wieder, nur in anderer Ordnung.

2) Setzt man aber in (☾) statt eines oder statt aller drei der Werthe α, β, γ, die andern $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$, so erhält man zwar wiederum dieselben Ausdrücke (☾), aber jeder ist dann mit dem (−)-Zeichen versehen, so daß wenn die Ausdrücke in (☾) bezeichnet sind durch

$$\varphi,\quad \varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,$$

die jetzigen sein werden:

$$-\varphi,\quad -\varphi_1,\quad -\varphi_2,\quad -\varphi_3.$$

Da nun, nach der Annahme, φ statt z gesetzt, der Gleichung $z^4+pz^2+qz+r=0$ genügt, so wird $-\varphi$ statt z gesetzt, nothwendig der andern Gleichung $z^4+pz^2-qz+r=0$ genügen. Daraus folgt aber:

3) Welche der beiden Werthe man in den Ausdrücken für a, b, c und d statt $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$ und $\sqrt{u_3-p}$ setzen mag, so hat man doch immer entweder die Wurzelwerthe der Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0,$$

oder doch die Wurzelwerthe dieser andern Gleichung

$$z^4+pz^2-qz+r=0;$$

und es bleibt daher nur noch übrig, die Bedingung aufzusuchen, durch welche man in den Stand gesetzt ist, diese beiden Fälle jedesmal von einander unterscheiden zu können.

Nun findet sich aber, wenn man die drei Gleichungen (⊙) mit einander multiplicirt,

$$\sqrt{u_1-p}\cdot\sqrt{u_2-p}\cdot\sqrt{u_3-p}=-q. \qquad (♂)$$

Im Falle die Wurzelwerthe der andern Gleichung z^4+pz^2-qz+r gefunden werden sollten, müßte man daher die Werthe der Wurzeln $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$, $\sqrt{u_3-p}$ so nehmen, daß ihr Produkt

$$\sqrt{u_1-p}\cdot\sqrt{u_2-p}\cdot\sqrt{u_3-p}=+q \quad \text{wird.}$$

Und weil keine weitere Bedingung statt finden kann, so ist die Bedingung (♂) die einzige, welche hinsichtlich der Werthe der Wurzeln $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$, $\sqrt{u_3-p}$ in besondern Fällen zu beobachten ist, wenn man in den obigen Ausdrücken für a, b, c und d die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung vom 4ten Grade mit Nothwendigkeit erhalten will.

Anmerkung 1. Es scheint nicht unnöthig zu sein, hier ausdrücklich noch darauf aufmerksam zu machen, daß bei dieser allgemeinen Auflösung der Gleichungen, die Koeffizienten p, q, r ganz allgemeine Ausdrücke sind, die eben so gut reell als auch imaginär, und im letztern Fall von der bis jetzt bekannten Form $\psi+\psi_1\cdot i$, oder von einer ganz unbekannten Form sein können. Bei allen solchen allgemeinen Arbeiten kann daher nie die Rede sein von positiven oder negativen Werthen, ja auch nie von imaginären; weil, um das eine oder das andere zu erkennen, immer schon bestimmte Ziffernwerthe, also nicht mehr allgemeine Ausdrücke vorausgesetzt sein müssen.

Anmerkung 2. Das in diesem Paragraphen angedeutete Verfahren des La Grange läuft darauf hinaus, nicht die Wurzelwerthe der aufzulösenden Gleichung selbst, sondern gewisse Funktionen von ihnen zu finden, z. B. la+mb+nc, oder

a+b−c−d, u. s. w. f.; und dann aus den gefundenen Werthen dieser Funktionen, die Wurzelwerthe selbst abzuleiten. — Deshalb können diese Funktionen beliebig angenommen werden, nur so, daß die Gleichung, welche sie bestimmt, auf einen niedrigern Grad gebracht werden kann, als die aufzulösende; und daß dann die Wurzelwerthe a, b, c, d selbst in diesen Funktionen dergestalt vorkommen, daß nachgehends solche aus den Werthen dieser Funktionen entwickelt werden können.

§. 265. Euler's Methode.

Euler nahm an, daß die Wurzelwerthe der Gleichungen vom 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. Grade immer bezüglich die Form haben müßten:

$$A\cdot\sqrt[3]{x}+B\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

$$A\cdot\sqrt[4]{x}+B\cdot\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+C\cdot\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$$

$$A\cdot\sqrt[5]{x}+B\cdot\left(\sqrt[5]{x}\right)^2+C\cdot\left(\sqrt[5]{x}\right)^3+D\cdot\left(\sqrt[5]{x}\right)^4$$

u. s. w. Konnte er nun mittelst dieser Annahme die Wurzelwerthe einer jeden höhern Gleichung wirklich entwickeln, so war die Annahme selbst gerechtfertigt. — Die Methode ist im Wesentlichen folgende:

I. Wenn aufzulösen ist die Gleichung vom dritten Grade:

$$z^3+pz+q=0. \qquad \cdots(1)$$

Man setze $$z=A\sqrt[3]{x}+B\left(\sqrt[3]{x}\right)^2,$$

bezeichne die 3 Werthe von $\sqrt[3]{1}$ durch α, α^2 und α^3 (oder 1), und erhält dann für die 3 Werthe von z (nach der Annahme):

$$A\sqrt[3]{x}+B\left(\sqrt[3]{x}\right)^2;\quad A\left(\alpha\sqrt[3]{x}\right)+B\left(\alpha\sqrt[3]{x}\right)^2;\quad A\left(\alpha^2\sqrt[3]{x}\right)+B\left(\alpha^2\sqrt[3]{x}\right)^2.$$

Nun bildet man eine Gleichung in z, welche diese drei Wurzelwerthe hat, und findet, wegen $\alpha+\alpha^2+1=0$, folgende:

$$z^3-3ABx\cdot z-(A^3x+B^3x^2)=0, \qquad \cdots(2)$$

und es kommt nun alles darauf an, A, B und x so zu bestimmen, daß die Gleichung 2.) mit der 1.) zusammenfällt; welches der Fall sein muß, sobald

$3ABx = -p$ und $A^3x + B^3x^2 = -q$ ist.

Man kann daher einen der Unbestimmten nach Belieben annehmen. — Euler setzt $A = 1$, findet $B = \frac{-\frac{1}{3}p}{x}$, und die Gleichung zur Bestimmung von x:

$$x - \frac{\frac{1}{27}p^3}{x} = -q,$$

woraus sich x und nachher auch B ergibt.

Und weil die Annahme des Wurzelwerthes für z, auf keinen Widerspruch führt, so ist auf diese Weise die gegebene Gleichung wirklich aufgelöset, in so ferne man Resultate erhält, welche genügen und mit keinem andern in Widerspruch stehen.

II. Wenn die Gleichung vom vierten Grade:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \quad \cdots (1)$$

gelöset werden soll.

Man bezeichnet die 4 Wurzelwerthe von $\sqrt[4]{1}$ durch α, α^2, α^3 und α^4 (oder 1), und nimmt für die 4 Wurzelwerthe der Gleichung 1.) die Ausdrücke:

$$A\sqrt[4]{x} + B\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\sqrt[4]{x}\right)^3;$$

$$A\left(\alpha\sqrt[4]{x}\right) + B\left(\alpha\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\alpha\sqrt[4]{x}\right)^3;$$

$$A\left(\alpha^2\sqrt[4]{x}\right) + B\left(\alpha^2\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\alpha^2\sqrt[4]{x}\right)^3;$$

$$A\left(\alpha^3\sqrt[4]{x}\right) + B\left(\alpha^3\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\alpha^3\sqrt[4]{x}\right)^3;$$

bildet nun aus diesen Wurzelwerthen die Gleichung in z, und verfährt wie oben. — Man muß aber dieselbe Gleichung erhalten, wenn man aus der Gleichung

$$z = A\sqrt[4]{x} + B\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$$

die $\sqrt[4]{x}$ blos eliminirt. Dann erhält man, wenn man bemerkt, daß $\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = \sqrt{x}$ und $\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}$ ist, sogleich

$$z^4 - 2(B^2+2AC)x \cdot z^2 - 4(A^2+C^2x)Bx \cdot z - A^4x$$
$$+B^4x^2 - C^4x^3 - 4AB^2Cx^2 + 2A^2C^2x^2 = 0;$$

folglich hat man A, B, C und x so anzunehmen, daß wird

$$2(B^2+2AC)x = -p;$$
$$4(A^2+C^2x)Bx = -q;$$
$$A^4x - B^4x^2 + C^4x^3 + 4AB^2Cx^2 + 2A^2C^2x^2 = -r.$$

Euler setzt nun $B = 1$, und bestimmt dann A und C und x; und hat dann:

$$z = A\sqrt[4]{x} + B\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\sqrt[4]{x}\right)^3,$$

welcher Ausdruck sogleich alle vier Wurzelwerthe gibt, wenn man statt $\sqrt[4]{x}$ nach und nach ihre vier Werthe substituirt.

Anmerkung. Dies mag hinreichen, den Geist der verschiedenen Methoden zu erfassen, und die Schwierigkeiten sehen zu lassen, welche sich ihrer Anwendung auf Gleichungen eines höhern Grades, als der vierte, entgegenstellen.

Wir wollen jetzt noch die Auflösung einiger besonderen höheren Gleichungen mit allgemeinen Koeffizienten, betrachten.

§. 266. Erklärung.

Eine höhere Gleichung heißt reziprok, wenn sie keinen Wurzelwerth α hat, ohne daß auch $\frac{1}{\alpha}$ ein Wurzelwerth (ein anderer, oder derselbe) der gedachten Gleichung wäre, der entweder derselbe sein kann, wenn nämlich $\alpha = 1$, oder $= -1$ ist, der aber im Allgemeinen ein neuer Wurzelwerth sein wird.

So ist z. B. die Gleichung, deren vier Wurzelwerthe

$$-2, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \tfrac{1}{3}$$ sind,

und welche

$$(x+2)(x+\tfrac{1}{2})(x-3)(x-\tfrac{1}{3}) = 0$$

d. h. $$x^4 - \tfrac{5}{6}x^3 - \tfrac{38}{6}x^2 - \tfrac{5}{6}x + 1 = 0$$ sein muß,

eine reziproke.

Desgleichen gehören zu den reziproken Gleichungen die folgenden:

$$x^5 - \tfrac{11}{6}x^4 - \tfrac{11}{2}x^3 + \tfrac{11}{2}x^2 + \tfrac{11}{6}x - 1 = 0,$$

mit den 5 Wurzelwerthen $-2,\ -\tfrac{1}{2},\ 3,\ \tfrac{1}{3}$ und 1;

und $$x^5 + \tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{43}{6}x^3 - \tfrac{43}{6}x^2 + \tfrac{1}{6}x + 1 = 0,$$

mit den 5 Wurzelwerthen $-2,\ -\tfrac{1}{2},\ 3,\ \tfrac{1}{3}$ und -1;

und $$x^6 - \tfrac{17}{6}x^5 - \tfrac{11}{3}x^4 + 11x^3 - \tfrac{11}{3}x^2 - \tfrac{17}{6}x + 1 = 0,$$

mit den 6 Wurzelwerthen $-2,\ -\tfrac{1}{2},\ 3,\ \tfrac{1}{3},\ 1$ und 1;

endlich auch $$x^6 - \tfrac{5}{6}x^5 - \tfrac{22}{3}x^4 + \tfrac{22}{3}x^2 + \tfrac{5}{6}x - 1 = 0,$$

mit den 6 Wurzelwerthen $-2,\ -\tfrac{1}{2},\ 3,\ \tfrac{1}{3},\ 1$ und -1.

§. 267.

1) Eine reziproke Gleichung kann nur dann von einem ungeraden Grade sein, wenn sie den Wurzelwerth 1 oder -1 hat.

2) Hat aber eine reziproke Gleichung den Wurzelwerth 1 oder -1, so kann sie deshalb doch noch vom geraden Grade sein.

Denn sie kann den Wurzelwerth 1 oder -1 doppelt, 4fach u. s. w., ja sie kann die Wurzelwerthe 1 und -1 zugleich, sie kann endlich den Wurzelwerth 1, pmal, und zugleich den Wurzelwerth -1, $2n-p$mal haben, wo $2n$ jede beliebige gerade Zahl vorstellt.

3) Hat eine reziproke Gleichung außer dem Wurzelwerth α, auch jedesmal noch dazu den Wurzelwerth $\frac{1}{\alpha}$, auch wenn $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$ ist, so daß sie im letztern Falle, den Wurzelwerth 1 oder -1 doppelt hat: so ist sie immer vom geraden Grade, und ihre Koeffizienten sind dann immer vom Anfang nach der Mitte hin, bezüglich genau dieselben, wie vom Ende nach der Mitte hin gesehen, so daß die Gleichung allemal die Form hat:

$$\begin{aligned} y^{2m} &+ A_1 \cdot y^{2m-1} + A_2 \cdot y^{2m-2} + A_3 \cdot y^{2m-3} + \cdots + A_{m-2} \cdot y^{m+2} \\ &+ A_{m-1} \cdot y^{m+1} + A_m \cdot y^m + A_{m-1} \cdot y^{m-1} + A_{m-2} \cdot y^{m-2} \\ &+ A_{m-3} \cdot y^{m-3} + \cdots + A_3 \cdot y^3 + A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Denn da die Wurzelwerthe dieser Gleichung paarweise in der Form:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ \beta,\ \frac{1}{\beta},\ \gamma,\ \frac{1}{\gamma},\ \delta,\ \frac{1}{\delta},\ \text{rc. rc.},$$

vorkommen, und da $(x-\alpha)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)=x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x+1$ ist, so hat die höhere Gleichung selbst die Form:

$$\left[x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x+1\right]\left[x^2-\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)x+1\right]\left[x^2-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x+1\right] \text{ ꝛc.} = 0,$$

in welcher, wenn man multiplicirt, augenfällig die erwähnte Eigenschaft hervortreten muß, weil jeder der einzelnen Faktoren bereits diese Eigenschaft hat.

4) Hat die höhere Gleichung noch außerdem den Wurzelwerth -1, so daß sie noch den Faktor $x+1$ bekommt, einmal oder mehremal, so befolgen die Koeffizienten der Gleichung offenbar noch immer dasselbe Gesetz, welches in der vorigen Nummer ausgesprochen worden.

5) Hat aber die höhere Gleichung auch noch den Wurzelwerth 1, also den Faktor $x-1$, so werden sich zwar die Koeffizienten nicht ändern, aber die Zeichen derselben; welches so oft der Fall sein muß, so oft dieser Wurzelwerth 1 hier in ungerader Anzahl vorkommt.

6) Umgekehrt, sind die Koeffizienten einer gegebenen höhern Gleichung in den gleichvielten Gliedern vom Anfange und vom Ende ab gerechnet, bezüglich alle einander gleich, entweder vollkommen gleich, oder mit gerade entgegengesetzten Zeichen versehen, übrigens gleich: so ist diese Gleichung eine reziproke, d. h. wenn α einer ihrer Wurzelwerthe ist, so ist auch $\frac{1}{\alpha}$ ein Werth ihres Unbekannten, der ihr genügt. — Und ist sie dabei vom ungeraden Grade, so hat sie den Wurzelwerth 1 oder -1, je nachdem die gleichen Koeffizienten jedesmal einerlei, oder gerade entgegengesetzte $(+)$-oder $(-)$-Zeichen haben.

Denn setzt man zuerst α statt des Unbekannten z, so erhält man eine ganze Funktion von α, welche identisch Null ist, nach der Voraussetzung. Setzt man aber nun $\frac{1}{\alpha}$ statt z, und multiplicirt dann mit α^m weg, wenn m der Grad der gegebenen Gleichung ist, so erhält man entweder genau dieselbe ganze Funktion von α, oder alle ihre Glieder mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, welche letztere also wieder identisch Null sein muß.

§. 268. Aufgabe.

Es ist gegeben eine reziproke Gleichung von einem geraden Grade, z. B.:

$$y^8+A_1 \cdot y^7+A_2 \cdot y^6+A_3 \cdot y^5+A_4 \cdot y^4+A_3 \cdot y^3+A_2 \cdot y^2+A_1 y+1 = 0,$$

deren Wurzelwerthe α, β, γ, δ, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ sein mögen. Man soll eine neue Gleichung in z finden, welche die Summen

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}, \quad \beta+\frac{1}{\beta}, \quad \gamma+\frac{1}{\gamma}, \quad \delta+\frac{1}{\delta},$$

zu Wurzelwerthen hat.

Auflösung. Diese Aufgabe ist wiederum ein besonderer Fall des §. 245.) aufgestellten, die sich aber direkt leichter auf folgende Art lösen läßt.

Man setzt nämlich $y+\frac{1}{y}=z$, und findet:

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 = y^2+\frac{1}{y^2}+2 = z^2,$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^3 = y^3+\frac{1}{y^3}+3\left(y+\frac{1}{y}\right) = z^3,$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^4 = y^4+\frac{1}{y^4}+4\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+6 = z^4.$$

Daraus aber wieder:

$$y^2+\frac{1}{y^2} = z^2-2,$$

$$y^3+\frac{1}{y^3} = z^3-3z,$$

$$y^4+\frac{1}{y^4} = z^4-4z^2+2;$$

folglich, wenn man die gegebene Gleichung in y durch y^4 dividirt, und das Resultat so schreibt:

$$y^4+\frac{1}{y^4}+A_1\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+A_2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+A_3\left(y+\frac{1}{y}\right)+A_4=0,$$

nachher aber obige Werthe substituirt:

$$z^4+A_1z^3+(A_2-4)z^2+(A_3-3A_1)z+(A_4+2-2A_2)=0,$$

welches die verlangte Gleichung in z ist.

Man sieht aber leicht ein, wie das hier für Gleichungen vom 8ten Grade Gesagte, auf Gleichungen von jedem geraden Grade angewandt werden kann.

§. 269.

Kann daher eine allgemeine Gleichung vom Grade m allgemein aufgelöset werden, so kann auch die reziproke Gleichung vom Grade 2m und 2m+1 in y allgemein aufgelöset werden; indem man $y+\frac{1}{y}=z$ (woraus $y^2-zy+1=0$ folgt) zur Bestimmung von y hat, sobald z aus der Gleichung vom Grade m gefunden ist.

§. 270.

Die Gleichung $y^{2m}-1=0$ ist eine reziproke Gleichung, und hat, wie der Augenschein lehrt, die beiden Wurzelwerthe +1 und −1. Dividirt man daher $y^{2m}-1$ durch $(y-1)(y+1)$ d. h. durch y^2-1, so erhält man für die übrigen Wurzelwerthe eine reziproke Gleichung vom Grade 2m−2, deren allgemeine Auflösung abhängig ist von einer Gleichung vom Grade m−1.

Daher kann man, in so ferne die Gleichungen bis zum vierten Grade aufgelöset werden können, auch die Gleichungen $y^3-1=0$, $y^4-1=0$, $y^5-1=0$, $y^6-1=0$, $y^7-1=0$, $y^8-1=0$, $y^9-1=0$ und noch $y^{10}-1=0$ allgemein auflösen.

Man kann also allgemeine algebraische Ausdrücke finden für die Werthe der Wurzeln $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[7]{1}$, $\sqrt[8]{1}$, $\sqrt[9]{1}$, und zuletzt noch für die Werthe von $\sqrt[10]{1}$, die alle von der Form

$p+qi$ sind, und die mit den früher gefundenen Werthen derselben Wurzeln übereinstimmen müssen.

§. 271. Aufgabe.

Eine höhere Gleichung vom Grade m, z. B. für $m=6$,

$$x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0,$$

aufzulösen, wenn zwischen einigen ihrer Wurzelwerthe z. B. zwischen a und b, eine algebraische Gleichung $\varphi(a,b)=0$ gegeben ist.

Auflösung. Man hat für die Wurzelwerthe a und b die 3 Gleichungen:

1) $a^6+Aa^5+Ba^4+Ca^3+Da^2+Ea+F=0;$

2) $b^6+Ab^5+Bb^4+Cb^3+Db^2+Eb+F=0;$

3) $\varphi(a,b)=0.$

Eliminirt man nun aus 2.) und 3.) den Ausdruck b, so erhält man eine höhere Gleichung 4.) in a, zum Resultat, welche mit der Gleichung 1.) zugleich existirt. Sucht man daher zwischen 1.) und 4.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in a, und setzt solchen $=0$, so erhält man den Wurzelwerth a selbst; so wie dann, entweder aus $\varphi(a,b)=0$, oder direkt auf dieselbe Art, auch b gefunden werden kann. — Dividirt man nachgehends die gegebene Gleichung durch $(x-a)(x-b)$, so erhält man eine neue Gleichung für die übrigen Wurzelwerthe.

§. 272.

Dasselbe Verfahren, welches hier für den Fall gezeigt wurde, wenn zwischen zweien der Wurzelwerthe a und b eine gegebene Relation $\varphi(a,b)=0$ existirt, läßt sich aber auch auf den Fall ausdehnen, wo die gegebene Relation 3, 4 und beliebig viel der Wurzelwerthe enthält.

Man findet auch immer so viele Wurzelwerthe, als in der Relation $\varphi=0$ deren vorkommen.

Anmerkung. Das Verfahren findet jedoch dann nicht mehr

Anwendung, wenn der gemeinschaftliche Faktor in a von einem höhern Grade, als der 4te wird, oder allgemein, wenn die aus ihm hervorgehende Gleichung zur Bestimmung von a, nicht mehr allgemein aufgelöset werden kann. — Dies ist aber im Allgemeinen schon der Fall, wenn φ in der gegebenen Relation $\varphi = 0$, eine symmetrische Funktion ist von 5 der Wurzelwerthe a, b, c, d und e. Denn alsdann kann dieser gemeinschaftliche Theiler in a, der gleich Null gesetzt, den Wurzelwerth a geben soll, von denen auf dieselbe Weise in b, c, d und e erhaltenen in gar nichts verschieden sein; sondern es muß jeder derselben in jeden andern übergehen, so oft statt des Buchstaben a, b, c, d, oder e, irgend ein anderer derselben Buchstaben gesetzt wird. Und deshalb muß dieser Theiler in a alle 5 Wurzelwerthe a, b, c, d, e enthalten, also wenigstens vom 5ten Grade sein.

§. 273.

Weil zwischen den Wurzelwerthen a und b einer reziproken Gleichung die Relation $ab = 1$ herrscht, so kann diese Methode auch unmittelbar zur Auflösung der reziproken Gleichungen angewandt werden. In so ferne aber hier mehrere solche Relationen zugleich herrschen, und zwar halb so viele, als der Grad der reziproken Gleichung (vom geraden Grade) anzeigt, die durch

$$ab = 1, \quad cd = 1, \quad ef = 1, \quad gh = 1 \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

ausgedrückt sein können; so wird der gemeinschaftliche Theiler in a, der $= 0$ gesetzt, den Wurzelwerth a geben soll, eben so gut auch die Wurzelwerthe c, e, g, ꝛc. geben müssen; er muß also in a vom m^{ten} Grade sein, wenn die gegebene reziproke Gleichung vom $2m^{ten}$ Grade ist.

Anmerkung. Man kann aber mittelst dieser Methode auch die Relation finden, welche zwischen den Koeffizienten einer höheren Gleichung stattfinden muß, wenn zwischen einigen ihrer Wurzelwerthe eine bestimmte und gegebene Relation $\varphi = 0$, soll stattfinden können.

Vierte Abtheilung.

Von der (näherungsweisen) Auflösung gegebener numerischen höheren Gleichungen.

§. 274.

Sind die Koeffizienten einer höheren Gleichung vom m^{ten} Grade

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Sx^2 + Tx + U = 0,$$

alle Null oder positive oder negative ganze Zahlen, so gibt es weder eine positive, noch eine negative rationale gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$, welche ein Wurzelwerth dieser Gleichung sein könnte.

Beweis. Denn wäre wirklich $\pm\frac{a}{b}$ ein Wurzelwerth der gegebenen Gleichung, und dabei $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, so hätte man:

$$\pm\frac{a^m}{b^m} \pm A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} \pm B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \pm \dots \pm S\frac{a^2}{b^2} \pm T\frac{a}{b} \pm U = 0,$$

oder

$$\frac{\pm a^m \pm Aa^{m-1}b \pm Ba^{m-2}b^2 \pm \dots \pm Sa^2b^{m-2} \pm Tab^{m-1}}{b^m} \pm U = 0,$$

folglich müßte die algebraische Summe:

$$\pm a^m \pm Aa^{m-1}b \pm Ba^{m-2}b^2 \pm \dots \pm Sa^2b^{m-2} \pm Tab^{m-1}$$

durch b^m, also auch durch b, theilbar sein. Dann müßte aber auch das Glied a^m durch b theilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist, daß nämlich $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt sein soll.

Hat daher eine solche Gleichung, deren Koeffizienten alle Null oder positive oder negative ganze Zahlen sind, reelle Wur-

zelwerthe, so sind solche entweder ganze Zahlen oder irrationale Zahlen *).

§. 275.

Die Newton'sche Näherungs-Methode.

Aus §. 95. folgt:

Ist $F_x = 0$ eine gegebene höhere Gleichung mit reellen Koeffizienten, und findet man (für $x = \alpha$) den Werth F_α positiv, (für $x = \beta$) dagegen den Werth F_β negativ, so liegt wenn α und β reell sind, allemal ein reeller Werth von x zwischen α und β, welcher $F_x, = 0$ macht, welcher also ein Wurzelwerth der gegebenen Gleichung ist.

I. Will man daher einen reellen Wurzelwerth einer gegebenen höheren Gleichung

$$1) \quad F_x = 0$$

mit reellen Koeffizienten finden, so sucht man zuerst versuchsweise zwei Werthe α und β, für welche F_α und F_β verschiedene Vor-

---

*) Nimmt man (nach §. 233.) die neue Gleichung in z, deren Wurzelwerthe die b fachen der Wurzelwerthe der Gleichung in x, sind, — also die Gleichung

$$z^m + Abz^{m-1} + Bb^2z^{m-2} + \dots + Sb^{m-2}z^2 + Tb^{m-1}z + Ub^m = 0,$$

so kann man b immer so nehmen, daß alle Koeffizienten dieser neuen Gleichung, wenn die der alten gebrochene Zahlen enthalten, nun ganze Zahlen werden.

Dann sind die Wurzelwerthe der neuen Gleichung (in z) entweder irrationale oder ganze Zahlen, und in so ferne alle Wurzelwerthe ganze Zahlen sein sollten, so müßten sie unter den Faktoren des letzten Gliedes Ub^m zu finden sein. Wenn man daher die einfachen und zusammengesetzten Faktoren des letzten Gliedes Ub^m, einmal mit dem +, dann auch mit dem − Zeichen, statt z in die gefundene Gleichung (in z) substituirt, und wenn einer derselben der Gleichung genügt, so hat man auch einen Werth von $x\left(=\frac{z}{b}\right)$.

zeichen bekommen*). — Hierauf nimmt man zwischen α und β einen beliebigen Werth γ, und haben dann F_α und F_γ einerlei Vorzeichen, so liegt der gesuchte Wurzelwerth zwischen β und γ; haben aber F_α und F_γ verschiedene Vorzeichen, so liegt der gesuchte Wurzelwerth zwischen α und γ. — Jedenfalls hat man nun engere Grenzen, zwischen denen der gesuchte Wurzelwerth liegt.

Wiederholt man nun dieses Verfahren, oft genug, so kann man bald zwei Grenzen μ und ν finden, die nur um 0,1, oder gar nur um 0,01 von einander verschieden sind und zwischen denen der gesuchte Wurzelwerth liegt. Der Werth

$$x = \mu, \quad \text{oder der andere} \quad x = \nu$$

ist dann die erste Annäherung.

II. Hierauf bezeichnet man durch h das, was dem einen Näherungs-Werth μ noch fehlt, oder den (negativen) Werth, der zu dem (größern) Näherungs-Werth ν noch addirt werden muß, um den wahren Werth von x zu haben, so daß, wenn α den einen oder den andern dieser beiden Grenzwerthe vorstellt, dann $\alpha + h$ der wahre Wurzelwerth ist; man setzt also in $F_x = 0$, $\alpha + h$ statt x, so daß die Gleichung selbst in $F_{\alpha+h} = 0$ übergeht, und denkt sich unter h den jetzt noch zu suchenden Unbekannten, der im erstern Fall positiv, im andern negativ, aber an sich $<0,1$ oder $<0,01$ ist. Nach §. 84. wird aber die neue Gleichung sich so schreiben lassen, nämlich

$$2) \quad F_\alpha + F_\alpha^{I} \cdot h + \frac{1}{2} F_\alpha^{II} \cdot h^2 + \frac{1}{6} F_\alpha^{III} \cdot h^3 + \cdots + \frac{1}{m!} F_\alpha^{(m)} \cdot h^m = 0,$$

---

*) Man substituirt z. B. in F_x, statt x nach und nach die Werthe 0, +1, −1, +10, −10, +100, −100, ꝛc. ꝛc. und berechnet die Werthe von F_x. — Sind diese immerfort positiv oder immerfort negativ, so muß man auch Zwischenwerthe von x substituiren; sollte man auch jetzt noch nicht zwei Werthe von F_x erhalten, welche verschiedene Vorzeichen haben, so muß man den später hier noch zu findenden Lehrsatz des Sturm anwenden.

wo F_x^I, F_x^{II}, F_x^{III}, rc. rc. die im §. 83. definirten Ableitungen oder Derivationen sind, während F_α, F_α^I, F_α^{II}, rc. rc. das vorstelle, was aus F_x und diesen abgeleiteten Funktionen wird, wenn man α statt x setzt. Ist nun $h<0{,}1$, so sind $h^2<0{,}01$; $h^3<0{,}001$; $h^4<0{,}0001$; u. s. w. f.; ist aber $h<0{,}01$, so sind

$$h^2<0{,}0001;\quad h^3<0{,}000001;\quad h^4<0{,}00000001;$$

u. s. w. f.; und der Unbekannte h ist noch immer aus einer höheren Gleichung vom m^{ten} Grade, nämlich aus der Gleichung 2.) zu finden *).

Läßt man aber nun (aus der Gleichung 2.) alle Glieder weg, welche h^2 und höhere Potenzen von h enthalten und welche im Allgemeinen gegen die beiden ersten Glieder bedeutend klein sein werden, so wird die Gleichung für h, jetzt eine Gleichung vom ersten Grade, nämlich

$$3)\quad F_\alpha + F_\alpha^I h = 0 \quad \text{und giebt} \quad h = -\frac{F_\alpha}{F_\alpha^I}$$

d. h. wie man will

$$\text{entweder}\quad h = -\frac{F_\mu}{F_\mu^I},\quad \text{oder}\quad h = -\frac{F_\nu}{F_\nu^I}.$$

Berechnet man hieraus, wenn $h<0{,}1$ ist, dieses h bis auf zwei Decimalstellen, wo die erste eine Null sein wird, oder berechnet man hieraus, wenn $h<0{,}01$ sein muß, dieses h bis auf vier Decimalstellen (deren beiden erstern Null sein werden), so hat man

$$x = \mu + h \quad \text{oder} \quad x = \nu + h \quad (\text{wo h negativ})$$

als zweite Annäherung (bis auf zwei oder vier Decimalstellen).

III. Hierauf setzt man diesen neuen Werth von x statt α in die Gleichung 3.) und berechnet den neuen Werth von h dazu,

---

*) Diese Gleichung 2.) in h, liefert m Wurzelwerthe, welche um α kleiner sind, als bezüglich die m Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung. (S. §. 233.).

bezüglich bis auf vier oder acht Decimalstellen (von denen die zwei, oder die vier erstern Nullen sein werden). — Dann hat man $\alpha+h$ als dritte Annäherung des gesuchten Wurzelwerthes, welcher bis auf vier, oder acht Decimalstellen geht.

Fährt man so fort, jedesmal den neuen Näherungswerth statt α, in die Gleichung 3.) zu setzen und den zugehörigen Werth von h zu berechnen, so erhält man die folgenden Annäherungen, immer bis auf die doppelte Anzahl von Decimalstellen *).

Dies ist die Newton'sche Näherungs-Methode.

§. 276.

Fourier (in seiner Analyse des équations determinées à Paris 1831.) hat diese Newton'sche Methode wesentlich verbessert. Da nämlich aus der Gleichung 2.) sich ergiebt

$$h = -\frac{F_\alpha}{F^I_\alpha} - \frac{F^{II}_\alpha}{2F^I_\alpha}\cdot h^2 - \frac{F^{III}_\alpha}{6F^I_\alpha}\cdot h^3 - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

und wir dafür bloß

$$h = -\frac{F_\alpha}{F^I_\alpha}$$

genommen haben, so hängt die weitere Annäherung von den Werthen der folgenden Koeffizienten von h^2, h^3, ꝛc. ꝛc. ab, welche, je kleiner F^I_α wird (für den ersten Näherungswerth, der unter α verstanden ist) desto größer werden können, so daß es als möglich erscheint, daß der sogenannte weitere Näherungswerth $\alpha+h$, sich von dem wahren Wurzelwerth mehr noch entfernen könnte, als der erste Näherungswerth α, sich von dem wahren Werth entfernt gehalten hat. Es wird aber F^I_α desto kleiner sein, je näher zwei reelle Wurzelwerthe der gegebenen

*) Hat man einmal 2 genaue Decimalstellen, so kann man in der Regel h schon bis auf 4 Decimalstellen nehmen, das nächste Mal schon bis zu 8, das nächste Mal dann bis zu 16 Decimalstellen u. s. f.

höheren Gleichung an einander liegen, da, wenn letztere beiden einander genau gleich wären, dann F_x und F^I_x für den wahren Werth von x, beide der Null gleich würden (nach §. 85.), also für einen, diesem genäherten Werth von x, beide sehr klein werden müßten. Wenn wir daher oben (§. 275.) bestimmt ausgesprochen haben, wieviel etwa Decimalstellen bei jeder neuen Annäherung genommen werden sollen, so ist dies nur geschehen, um das Verfahren mehr zu veranschaulichen und so zu geben, wie es sich in den günstigeren Fällen gestaltet.

Fourier stellt nun folgende Betrachtungen an:

1) Denkt man sich x und $F_x, = y$ als Koordinatenwerthe, welche sich (Fig. 10. oder Fig. 15.—18.) auf rechtwinklige Koordinaten-Axen OX und OY beziehen, so liefert jeder reelle Werth von x, einen Punkt M (für welchen $OP = x$ und $\pm MP = F_x = y$ ist), und alle reellen Werthe von x, liefern eine Kurve WAMV, deren Ordinatenwerthe die, zu jedem reellen Werth von x, gehörigen Werthe von F_x sind.

2) Nimmt man $\alpha = OP$ und $\alpha + k = OQ$, so ist $F_\alpha = PM$ und $F_{\alpha+k} = QN$, und, wenn MR mit OX parallel gezogen wird,

$$NR = F_{\alpha+k} - F_\alpha = F^I_\alpha \cdot k + F^{II}_\alpha \cdot \frac{k^2}{2!} + \text{ꝛc.} \quad \text{(nach §. 84.)},$$

während $k = PQ = MR$ ist; folglich ist

$$\text{a)} \qquad \frac{NR}{MR} = F^I_\alpha + F^{II}_\alpha \cdot \frac{k}{2!} + F^{III}_\alpha \cdot \frac{k^2}{3!} + \text{ꝛc.}$$

Denkt man sich nun k unendlich klein, so daß der Punkt N dicht an dem Punkte M liegt, so ist die Verlängerung der Geraden MN (nach T und nach U) die Tangente der Kurve an dieser Stelle M, und MN ist ein unendlich kleines Elementchen der Kurve. Weil nun aber W·NMR = W·MTX und k unendlich klein d. h. immer noch kleiner gedacht ist, als jede bereits noch so klein gedachte bestimmte Zahl, so daß diesem k nur die Null nächst anliegt, — so folgt jetzt (aus a.)

b) $Tg\,MTX = \frac{NR}{MR} = F^{I}_{\alpha}$.

3) Die im §. 275. Nr. 3. gefundene Ergänzung h, ist also, wenn $OP = \alpha$ einen der dortigen Näherungswerth z. B. ν vorstellt, offenbar $= \pm PT$ (in Fig. 10. $= -PT$); denn es ist $\frac{MP}{PT} = Tg\,MTX = F^{I}_{\alpha}$ (nach b.) und $MP = \pm F_{\alpha}$ (in Fig. 10. $= + F_{\alpha}$); folglich $PT = \pm \frac{F_{\alpha}}{F^{I}_{\alpha}} = \mp h$ (in Fig. 10. $= -h$).

Wenn also $OP = \alpha (= \nu)$ ein Näherungswerth gewesen ist, so ist die nach §. 275. gefundene weitere Annäherung $\alpha + h$, $= OP - PT = OT$, während OA der genaue Werth von x ist (welcher F_x, $= 0$ macht). — Durch die nach §. 275. gefundene Ergänzung h, gelangt man also von dem bekannten Werthe OP von x, zu dem Werthe OT von x, welchem (in Fig. 10.) der Werth $-WT$ von F_x zukommt.

Es fragt sich nun ob und wann dieser Werth OT, dem Werthe OA sicher näher kommen werde, als der Werth OP dem OA bereits nahe gewesen ist? —

4) Nun kann der Gang der Kurve einer von den vieren sein, wie solche in den Fig. 15.—18. zu sehen sind; in den Fig. 15. 16. ist der zu $\alpha = OP = \mu$ als zweite Annäherung gefundene Werth, $\alpha + h = \mu + h = OT$, offenbar weniger genau, als der andere Näherungswerth $OP' = \nu$ es schon gewesen ist. In diesen Fällen muß man also von $\alpha = OP' = \nu$ ausgehen und dazu die zweite Annäherung $\alpha + h = \nu + h = OT'$ finden, welche augenfällig stets mehr genähert sein muß, als der Werth $OP' = \nu$ es gewesen ist.

In den Fig. 17. und 18. dagegen ist es gerade, wie die bloße Ansicht der Figuren lehrt, der kleinere Werth $\alpha = \mu = OP$, von welchem man ausgehen muß, wenn die zweite Annäherung $\alpha + h = \mu + h = OT$ nothwendig mehr genähert sein soll, als der erste Werth $\alpha = \mu = OP$ es gewesen ist.

Man muß also bald von dem zu kleinen, bald von dem

zu großen Werth von x ausgehen, wenn man nach §. 275. Nr. 3. die weitere Annäherung $x+h$ finden will und zwar jedesmal von derjenigen der beiden Grenzen μ und ν, für welche die zugehörige Tangente auf beiden Seiten in der nächsten Nähe von M, zwischen die Kurve und die Abscissen-Axe OX fällt, und dies ist allemal und auch nur dann der Fall, wenn F_x und F^{II}_x beide positiv werden, oder beide negativ, für den genäherten Werth μ, oder ν, von x*).

---

*) Ist nämlich (Fig. 10.) $PM = F_x$ für $x = OP$ positiv, und liegt die Tangente MT nicht zwischen der Kurve und der Abscissen-Axe, so ist $SG > SH$; wobei wir OS als einen neuen Werth von x voraussetzen, der von OP wenig nur verschieden gedacht wird, so daß $OS = x+k$ ist, wenn $OP = x$, während $-PS = k$ so klein gedacht wird, als man nur immer will.

Nun ist (nach §. 84.)

$$SH = F_{x+k} = F_x + F^I_x \cdot k + F^{II}_x \cdot \frac{k^2}{2!} + F^{III}_x \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots.$$

Wegen $\frac{SG}{ST} = Tg\,MTX = F^I_x$ und $ST = PT - PS = PT + k$ und weil wir oben $PT = \frac{F_x}{F^I_x}$ gefunden haben, ist aber auch

$$SG = F^I_x \cdot ST = F_x + F^I_x \cdot k;$$

folglich findet sich

$$SG - SH = -F^{II}_x \cdot \frac{k^2}{2!} - F^{III}_x \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots.$$

Bei unserer Voraussetzung der Lage der Tangente MT, ist nun diese Differenz $SG - SH$ positiv, und dies ist, weil k beliebig klein gedacht werden soll, nur dann möglich, wenn F^{II}_x negativ ist, damit $-F^{II}_x$ positiv werde. Es haben also bei dieser Lage der Tangente gegen die Kurve und die Abscissen-Axe OX, die Werthe von F_x und F^{II}_x verschiedene Vorzeichen.

Das Analoge findet sich, wenn man einen Punkt M der Kurve betrachtet, für welchen F_x negativ wird, und wenn man wiederum annimmt, daß die Tangente nicht zwischen die Kurve und die Abscissen-Axe fällt (wie in den Fig. 16. und 17.); es zeigt sich dann F^{II}_x nothwendig positiv, so daß wiederum F_x und F^{II}_x verschiedene Vorzeichen haben.

Es ist nun klar, daß wenn für diesen mehr genäherten Werth von x, auch wiederum F_x und F^{II}_x einerlei Vorzeichen behalten (was in der Regel der Fall sein wird) die Wiederholung des Verfahrens §. 275. III. nothwendig einen neuen noch mehr genäherten Werth von x geben muß.

Durch diese Betrachtung hat Fourier diese Annäherungs-Methode des Newton erst, mit Sicherheit des Erfolges, brauchbar gemacht.

Anmerkung 1. Sind zwei Wurzelwerthe der gegebenen höheren Gleichung $F_x = 0$, einander gleich, oder doch in den erstern Decimalstellen mit einander übereinstimmend, während α ein Näherungswerth von denselben ist, — was man daran erkennt, daß der genommene Näherungswerth α, sowohl F_α als auch noch F^I_α der Null sehr nahe rückt, — so könnte man von der Gleichung 2.) des §. 275. drei Glieder behalten, nämlich

$$F_\alpha + F^I_\alpha \cdot h + \tfrac{1}{2} F^{II}_\alpha \cdot h^2 = 0;$$

man würde dann eine quadratische Gleichung aufzulösen haben, für h zwei reelle Werthe finden (deren (erste oder) ersten Decimalstellen Nullen sein würden, und die man nicht auf sehr viele weitere Decimalstellen bestimmen müßte); und man würde dann, — wenn beide Wurzelwerthe von $F_x = 0$ sehr nahe an einander lägen, — vielleicht schon das erste Mal, vielleicht aber bei einer neuen, auf dieselbe Weise wiederholten Annäherung, diese beiden Wurzelwerthe in ihren weiteren Decimalstellen sich von einander trennen sehen. — Dabei wird man auch jetzt den Näherungswerth α immer nach der so eben mitgetheilten Regel des Fourier wählen.

Hätte freilich die Gleichung $F_x = 0$ drei oder mehr gleiche, oder nahe hin gleiche Wurzelwerthe, von denen α ein genäherter Werth ist, — was man daraus schließen würde, daß auch noch F^{II}_α, ja selbst noch F^{III}_α mit F_α und F^I_α zugleich der Null sehr nahe lägen, — so würde freilich auch dies Verfahren nicht mehr aus-

reichen und man müßte von der Gleichung 2.) des §. 275. in h, noch mehr Glieder nehmen, was zu neuen Verwickelungen und Weitläufigkeiten führen würde, aber doch in einzelnen Fällen anwendbar sein kann.

Anmerkg. 2. Die ganz gleichen Wurzelwerthe kann man übrigens allemal nach dem im §. 88. Nr. 3. beschriebenen Verfahren dergestalt aus der Gleichung $F_x = 0$ absondern, daß man einzelne Gleichungen $\varphi_{\mu,x} = 0$, $\varphi_{\nu,x} = 0$, 2c. 2c. und $G_x = 0$ erhält, welche lauter ungleiche Wurzelwerthe enthalten und so sind, daß die Wurzelwerthe der einen ($\varphi_{\mu,x} = 0$) diejenigen alle sind, welche in $F_x = 0$, μ mal vorkommen, — daß die Wurzelwerthe der andern ($\varphi_{\nu,x} = 0$) alle diejenigen sind, welche in $F_x = 0$, ν mal vorkommen; u. s. w., während alle Wurzelwerthe der letzten Gleichung $G_x = 0$, alle diejenigen sind, welche in $F_x = 0$, nur einmal vorkommen. — Diese einzelnen Gleichungen sind noch überdies von niedrigerem, oft nur vom ersten Grade, so daß ihre Auflösung viel bequemer wird, oft ohne Weiteres sich ergiebt. — Die Rechnungen aber, durch welche die ganze Funktion F_x in das Produkt $[\varphi_{\mu,x}]^{\mu} \cdot [\varphi_{\nu,x}]^{\nu} \cdots \times G_x$ zerlegt wird (nach §. 88. Nr. 3.) sind so verdrießlicher Art, daß man in der Regel darauf verzichtet, wenn nicht die größeste Noth dazu zwingt.

Anmerkg. 3. Man kann aber auch (nach demselben §. 88.) bloß zwischen F_x und ihrer Derivation F^{I}_x den größten gemeinschaftlichen Theiler T suchen und damit in F_x dividiren. Ist dann f_x die ganze Funktion von x, welche als Resultat der Division sich ergiebt (welche also $= \frac{F_x}{T}$ ist), so enthält die Gleichung $f_x = 0$ noch alle Wurzelwerthe der Gleichung $F_x = 0$, aber jeden nur ein einziges mal. — Dadurch sind dann alle Schwierigkeiten beseitigt, welche von dem Vorhandensein gleicher Wurzelwerthe herrühren können.

Die beinahe gleichen, d. h. die nur um äußerst wenig

von einander verschiedenen (reellen) Wurzelwerthe machen dann die Hauptschwierigkeit.

Anmerkg. 4. Lagrange (in seinem Traité de la résolution des équations numériques. Nouvelle édition. 1808.) hatte schon lange vorher die Methode des Newton kritisch untersucht und vorzugsweise hervorgehoben, daß sie über den Grad der Annäherung nichts bestimmtes erkennen lasse (welcher Mangel später, wie wir im vorhergehenden Paragraphen gezeigt haben, eben durch Fourier beseitigt worden ist). Die angeführte Schrift des Lagrange ist in jeder Beziehung höchst lesenswerth; wir aber wollen hier nur kurz aus ihr angeben, welches Verfahren Lagrange an die Stelle des Newton'schen gesetzt hat, ein Verfahren, das allerdings mit jedem neuen Schritte auch sicher dem Ziele näher führt, welches aber in der Ausführung ungemein beschwerlich wird und daher für die Praxis im Allgemeinen nicht empfohlen werden kann.

Nachdem nämlich Lagrange für die aufzulösende Gleichung $F_x = 0$ vom m^{ten} Grade, einen Näherungswerth a in ganzen Zahlen versuchsweise gefunden hat, so daß der gesuchte Wurzelwerth zwischen a und a+1 liegt, — setzt er $x = a + \frac{1}{y}$ und findet die Gleichung

$$F_{a+\frac{1}{y}} = 0 \quad \text{d. h.} \quad F_a + F_a^{\text{I}} \cdot \frac{1}{y} + \cdots + F_a^{(m)} \frac{1}{m!\, y^m}$$

oder

$$F_a \cdot y^m + F_a^{\text{I}} \cdot y^{m-1} + \frac{1}{2!} F_a^{\text{II}} \cdot y^{m-2} + \cdots + \frac{1}{m!} F_a^{(m)} = 0,$$

welche wir durch $\varphi_y = 0$ bezeichnen wollen.

Nun sucht er eine ganze Zahl b als den nächsten Wurzelwerth von $\varphi_y = 0$ wiederum versuchsweise, so daß der wahre Wurzelwerth y zwischen b und b+1 liegt, — setzt dann $y = b + \frac{1}{z}$, bestimmt die neue Gleichung in z, nämlich $\varphi_{b+\frac{1}{z}} = 0$,

oder $\varphi_b \cdot z^m + \varphi_b^{I} \cdot z^{m-1} + \frac{1}{2!}\varphi_b^{II} \cdot z^{m-2} + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi_b^{(m)} = 0,$

welche wir durch $\psi_z = 0$ bezeichnen wollen, und findet versuchsweise einen nächsten Wurzelwerth c von z, in ganzen Zahlen.

Dieses Verfahren wird nun beliebig oft wiederholt, also $z = c + \frac{1}{t}$ gesetzt, eine neue Gleichung $\chi_t = 0$ gefunden und aus ihr $t = d$ in ganzen Zahlen näherungs- und versuchsweise gefunden; u. s. w. f.

Man hat zuletzt

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cdots}}}}$$

d. h. man hat zuletzt x durch einen sogenannten Kettenbruch ausgedrückt, der nun noch in einen gewöhnlichen Bruch und in einen Decimalbruch umgeformt werden muß. — Nimmt man nur die 4 Glieder a, b, c und d, so wird dazu folgende Rechnung angestellt

$$\frac{0}{1},\quad \frac{1}{0},\quad \overset{a}{\frac{a}{1}},\quad \overset{b}{\frac{ab+1}{b}},\quad \overset{c}{\frac{abc+c+a}{bc+1}},\quad \overset{d}{\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}};$$

indem man die 4 Glieder a, b, c, d neben einander hinschreibt, dann die beiden Quotienten $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ vorangehen läßt; — hierauf aber jeden neuen Zähler (und Nenner) dadurch findet, daß man den nächst vorhergehenden Zähler (Nenner) mit dem, über den zu bildenden Bruch stehenden Gliede a, oder b, oder c, oder d, — multiplicirt und den zweit vorhergehenden Zähler (Nenner) dazu addirt. Die einzelnen Brüche $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$, $\frac{abc+c+a}{bc+1}$, 2c. 2c. sind Näherungswerthe von x, der erste zu klein, der nächste zu groß, der dritte zu klein, der vierte wieder

zu groß, und so abwechselnd; jeder folgende ist aber mehr genähert als der vorhergehende.

Dies letztere ist aus der Theorie der Kettenbrüche bekannt, die in jedem Elementar-Lehrbuch der Buchstaben-Rechenkunst in ihren Elementen in der Regel zu finden ist *).

§. 277.

Die Annäherungs-Methode des Prof. Gräffe **) (welche Encke, in dem Berliner astronomischen Jahrbuche, auch auf die Auffindung der imaginären Wurzelwerthe ausgedehnt hat ***)) geht von folgenden Betrachtungen aus:

I. Findet man aus der gegebenen höheren Gleichung

1) $$F_x = 0$$

eine neue Gleichung in z, deren Wurzelwerthe bezüglich x_1^n, x_2^n, x_3^n, ⋯ x_m^n sind, wenn x_1, x_2, x_3, ⋯ x_m die der gegebenen Gleichung $F_x = 0$ vorstellen, während der Exponent n eine sehr große Zahl ist, — und hat die neue Gleichung in z die Form

2) $$z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + B_3 z^{m-3} + \cdots + B_m = 0,$$

so ist (nach §. 231.)

3) $$B_1 = -(x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_m^n).$$

II. Nehmen wir nun an, daß alle Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3, ⋯ x_m reell sind, und daß einer der Wurzelwerthe z. B. x_1 größer ist als jeder der übrigen (abgesehen vom Vorzeichen), so kann man n immer so groß nehmen, daß die Summe

---

*) S. Ohm's Elementar-Mathematik I. Th. 3te Auflage.

**) „Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen, als Beantwortung einer von der K. Akad. d. Wiss. zu Berlin aufgestellten Preisfrage, Zürich 1837."

***) Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen von J. F. Encke, Direktor der Sternwarte zu Berlin. 1839.

$x_2^n + x_3^n + \cdots + x_m^n$ gegen x_1^n verhältnißmäßig sehr klein ist, d. h. daß der Quotient

$$\frac{x_2^n + x_3^n + \cdots + x_m^n}{x_1^n} < k$$

wird, wie klein man auch k (aber bestimmt) angenommen haben mag *). Folglich ist dann (aus 3.)

$$\frac{-B_1}{x_1^n} < 1 + k, \text{ und } > 1;$$

also ist ganz nahe, und desto näher, je größer n genommen wird,

$$4) \quad -\frac{B_1}{x_1^n} = 1, \text{ d. h. } x_1^n = -B_1, \text{ folglich } x_1 = \sqrt[n]{(-B_1)}.$$

III. Ferner ist unter denselben Voraussetzungen, B_2 die Summe der Produkte je zweier der Wurzelwerthe x_1^n, x_2^n, x_3^n, ⋯ x_m^n, während diese Summe Σ, wenn x_2 der nächst große Wurzelwerth ist, abermals die Eigenschaft hat, daß

$$\frac{\Sigma}{x_1^n x_2^n} \text{ nicht viel größer als 1 wird}$$

und der Einheit desto näher rückt, je größer man n nimmt; man hat also, sehr genähert

$$5) \quad \frac{B_2}{x_1^n x_2^n} = 1, \text{ d. h. (aus 4.) } x_2^n = -\frac{B_2}{B_1}, \text{ d. h. } x_2 = \sqrt[n]{-\frac{B_2}{B_1}}.$$

IV. Eben so ist $-B_3$ die Summe der Produkte je dreier der m Wurzelwerthe der neuen Gleichung, während diese Summe Σ, wenn x_3 der nächstgroße Wurzelwerth ist, abermals (für einen hinreichend großen Werth von n die Eigenschaft erlangt, daß

---

*) Es handelt sich hier nur um die absoluten Werthe dieses Quotienten, also abgesehen vom Vorzeichen. Denkt man sich n gerade, so sind ohnedieß alle Wurzelwerthe der neuen Gleichung (in z) positiv.

$$\frac{\Sigma}{x_1^n \cdot x_2^n \cdot x_3^n}$$ nicht viel größer als 1 wird

und der Einheit so nahe kommt als man will; folglich ist sehr genähert

$$6) \quad \frac{-B_3}{x_1^n x_2^n x_3^n} = 1, \text{ d. h. (aus 5.) } x_3^n = -\frac{B_3}{B_2} \text{ oder } x_3 = \sqrt[n]{-\frac{B_3}{B_2}}.$$

V. Diese Betrachtungen weiter verfolgend findet man gerade so einfach, daß, wenn die Wurzelwerthe x_1, x_2, x_3, ... x_m, abgesehen vom Vorzeichen, ihrer Größe nach geordnet sind, so daß x_m den absolut kleinsten vorstellt, dann

$$7) \quad x_4 = \sqrt[n]{-\frac{B_4}{B_3}}, \quad x_5 = \sqrt[n]{-\frac{B_5}{B_4}}, \text{ u. s. w.,}$$

$$x_{m-1} = \sqrt[n]{-\frac{B_{m-1}}{B_{m-2}}} \text{ und } x_m = \sqrt[n]{-\frac{B_m}{B_{m-1}}}$$

sehr genäherte Gleichungen sein werden und desto mehr genäherte, je größer die (hier als gerade gedachte) Zahl n genommen wird.

Nur muß man vorher wissen, a) daß alle Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$, reell sind, und b) daß die Gleichung nicht zwei (oder mehr) gleiche Wurzelwerthe habe, auch nicht solche Wurzelwerthe, welche zwar verschiedene Vorzeichen haben, aber abgesehen vom Vorzeichen, einander gleich sind.

§. 278.

Die Rechnungen müssen mit Logarithmen ausgeführt werden und um sicher zu sein, daß die gefundenen Decimalstellen alle genau sind, muß man die Rechnung für ein (etwa) doppelt so großes n wiederholen und zusehen, ob die in beiden Rechnungen gefundenen 5 Decimalstellen des Logarithmen von x*), übereinstimmen, wenn man nicht vorzieht, der völligen Sicherheit wegen,

*) Es wird hier vorausgesetzt, daß die Rechnung mit 5 stelligen Logarithmen ausgeführt wird.

dieselbe Rechnung zum dritten Male für ein etwa noch einmal doppelt so großes n zu machen).

Da wir uns n gerade gedacht haben, so hat die n^{te} Wurzel zwei reelle und (an sich) gleiche Werthe, von denen der eine positiv, der andere negativ ist. Welcher von beiden der gesuchte genäherte Wurzelwerth sei, muß entweder durch direkte Substitution beider statt x in die Gleichung $F_x = 0$ entschieden werden, oder aus den vielleicht bekannten Grenzen, zwischen denen die Wurzelwerthe liegen müssen.

Sind zwei oder mehr dieser gesuchten Wurzelwerthe sehr wenig von einander verschieden, so wird man n sehr groß nehmen müssen, bis eine gewünschte erste Näherung erhalten wird. — Encke weist jedoch nach, daß, wenn zwei Wurzelwerthe z. B. x_3 und x_4, so nahe an einander lägen, daß $\frac{x_3}{x_4} = 1{,}1$ oder $\frac{x_3}{x_4} = 1{,}01$ oder $\frac{x_3}{x_4} = 1{,}001$ wäre, dann bezüglich $n = 2^7$, $n = 2^{11}$ und $n = 2^{14}$ ausreichen würde, und zwar so, daß, wenn man mit 5 stelligen Logarithmen rechnet, diese 5 Stellen als genau anzusehen sind.

Daß man auf diesem Wege wirklich einen reellen Wurzelwerth gefunden habe, z. B. x_4 erkennt man daran, daß der entsprechende Quotient $\left(\text{hier } \frac{B_4}{B_3}\right)$, für, viel größer (doppelt so groß) genommene Werthe von n, in seinen ersten 5 Decimalen, denselben Werth behält.

Endlich wird man, wenn auf diesem Wege des Gräffe eine erste Annäherung gefunden ist, — dann immer noch die zweite und die folgenden Annäherungen auf dem im §. 275. beschriebenen und im §. 276. nach Fourier verbesserten Wege, noch hinzutreten lassen müssen, wenn man (bei einer zweiten Annäherung) eine Genauigkeit der Wurzelwerthe bis auf 10 und (bei einem wiederholten Verfahren) eine Genauigkeit bis zu 20 Decimalstellen haben will.

Dabei ist aber, wenn man mit Logarithmen rechnet, noch Folgendes zu beachten. Rechnet man nämlich mit Brigg'schen Logarithmen, so wissen wir (aus §§. 212. 213.), daß

$$L^{10}\left(1+\frac{h}{x}\right)=M\left(\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\text{ in inf.}\right)=M\cdot\frac{h}{x}$$

ist, wenn wir, in so ferne $\frac{h}{x}$ sehr klein sein sollte, die höheren Potenzen von $\frac{h}{x}$ außer Acht lassen, während $M=\frac{1}{L10}$ den Modul der Brigg'schen Logarithmen vorstellt und $L10$ den Neper'schen Logarithmen der Zahl 10 bezeichnet *).

Ist nun α die erste Annäherung irgend eines der Wurzelwerthe, und $\alpha+h$ der genaue Werth, so hat man

$$\alpha+h=\alpha\left(1+\frac{h}{\alpha}\right),$$

also

$$L^{10}(\alpha+h)=L^{10}\alpha+L^{10}\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)$$

$$=L^{10}\alpha+M\cdot\frac{h}{\alpha},$$

wenn man die höheren Potenzen von h außer Acht läßt, während gleichzeitig (nach §. 275.) unter derselben Voraussetzung

---

*) Es ist aber der (um 10 vergrößerte) Brigg'sche Logarithme des Models M, nämlich

$$L^{10}M,=9{,}6377843\ldots$$

Es kann uns nicht einfallen die Bezeichnung $L^{10}a$ für den Brigg'schen Logarithmen von a, dann noch beibehalten zu wollen, wenn der praktische Rechner Ziffern-Rechnungen macht und sich dazu einer Tabelle der Brigg-schen Logarithmen bedient. Das im Schreiben bequemste Logarithmen-Zeichen ist dann das beste. — Ganz anders ist es aber, wenn der Anfänger die ganze Lehre der Logarithmen studiren und leicht verstehen soll; so lange, als dieser Zweck vor Augen liegt, müssen die einzelnen, sich nach und nach absondernden Begriffe auch durch entsprechende Zeichen von einander abgesondert werden und die verwandten durch verwandte Zeichen.

$$F_{\alpha+h} = F_\alpha + F^I_\alpha \cdot h = 0, \quad \text{also} \quad h = -\frac{F_\alpha}{F^I_\alpha}$$

ist. Also findet sich

$$L^{10}(\alpha+h) = L^{10}\alpha - M \cdot \frac{F_\alpha}{\alpha \cdot F^I_\alpha},$$

wodurch der mehr genäherte $L^{10}(\alpha+h)$ in den zuerst gefundenen, weniger genäherten $L^{10}\alpha$, ausgedrückt sich sieht. Dabei findet sich $x \cdot F^I_x$ aus F_x, wenn man in letzterer Funktion jedes Glied mit seinem Exponenten von x, multiplicirt, so daß das letzte Glied mit 0 (Null) multiplicirt werden muß.

§. 279.

Um aber aus $F_x = 0$ die neue Gleichung in z zu finden, setze man zuerst $\sqrt{z}$ statt x, ordne die Gleichung so, daß sie die Form

$$\varphi_z + \psi_z \cdot \sqrt{z} = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = -\psi_z \cdot \sqrt{z}$$

annimmt, wo φ_z und ψ_z ganze Funktionen von z sind, — quadrire auf beiden Seiten und bilde sich dadurch die neue Gleichung

$$(\varphi_z)^2 - z \cdot (\psi_z)^2 = 0.$$

Diese Gleichung in z, hat zu Wurzelwerthen die Quadrate der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$. — Setzt man in ihr wiederum $\sqrt{z}$ statt z und verfährt man genau so noch einmal, so bekommt man eine Gleichung in z, deren Wurzelwerthe die 4^{ten} Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$ sind. — Wiederholt man das gleiche Verfahren, bis es im Ganzen p mal durchgeführt ist, so hat man eine Gleichung in z, deren Wurzelwerthe die $(2^p)^{ten}$ Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$ sind. Und da jede neue Gleichung immer wieder vom m^{ten} Grade ist, so macht man die Rechnung des Ueberganges von $\varphi_z + \psi_z \cdot \sqrt{z} = 0$ zu $(\varphi_z)^2 - z(\psi_z)^2 = 0$ mit einer Gleichung vom m^{ten} Grade, aber mit unbestimmten Koeffizienten, nur ein einzigesmal, und substituirt statt derselben nur immer die Koeffizienten der zu-

letzt erhaltenen Gleichung in z, um die Koeffizienten der nächsten neuen Gleichung in z, zu erhalten.

Anmerkung. Man begreift übrigens, daß man auch zuerst $\sqrt[3]{z}$ statt x in $F_x = 0$ setzen, die Gleichung selbst dann auf die Form

$$\varphi_z + \psi_z \cdot \sqrt[3]{z} + \chi_z \cdot (\sqrt[3]{z})^2 = 0$$

bringen und mittelst des Satzes, nach welchem

$$(p+q+r)^3 = p^3+q^3+r^3+3(p+q+r)(pq+pr+qr)-3pqr$$

ist, — in diese andere Form

$$(\varphi_z)^3 + (\psi_z)^3 + (\chi_z)^3 - 3z \cdot \varphi_z \cdot \psi_z \cdot \chi_z = 0$$

umformen könnte, um eine Gleichung in z zu haben, wiederum vom m^{ten} Grade, deren Wurzelwerthe die 3^{ten} Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$ sind. Indem man hier wiederum $\sqrt[3]{z}$ statt z setzt und dasselbe Verfahren wiederholt, bekommt man eine Gleichung in z, deren Wurzelwerthe die 9^{ten} Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$, sind. Die dritte Arbeit giebt eine Gleichung in z, deren Wurzelwerthe die 27^{ten} Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung sind; und fährt man so fort, so bekommt man nach und nach neue Gleichungen in z, deren Wurzelwerthe bezüglich die 81^{ten}, 243^{ten}, ... $(3^{\mu})^{ten}$ Potenzen der Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$, sind.

Endlich könnte man ganz allgemein $\sqrt[n]{z} = x$, also $z = x^n$ setzen und aus dieser Gleichung und der gegebenen Gleichung $F_x = 0$, mittelst irgend einer der früher gelehrten Eliminationsmethoden, x eliminiren, um die verlangte Gleichung in z, zu haben.

Das zuerst (im §.) beschriebene Verfahren ist jedoch das bequemste.

§. 280.

Hat die Gleichung $F_x = 0$ vom m^{ten} Grade, lauter imaginäre Wurzelwerthe, so ist, da letztere immer paarweise vorkommen (unter der Voraussetzung nämlich, daß die Koeffizienten der Gleichung alle reell sind, die wir hier immer machen) der Grad m eine gerade Zahl und die Wurzelwerthe können dann durch $r_{\mathfrak{a}} \cdot e^{\pm \varphi_{\mathfrak{a}} \cdot i}$ bezeichnet werden, indem wir dem Zeiger $\mathfrak{a}$ nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, $\cdots \frac{1}{2}m-1$ geben und dabei die Model r_0, r_1, r_2, $\cdots r_{\frac{1}{2}m-1}$ so geordnet uns denken, daß jeder folgende kleiner ist, als der vorhergehende, während sie alle ihrer Natur nach positiv sein müssen.

Dann sind die Wurzelwerthe der neuen Gleichung in z alle ausgedrückt durch $r_{\mathfrak{a}}^n \cdot e^{\pm n \varphi_{\mathfrak{a}} \cdot i}$; und die (geraden) Koeffizienten B_2, B_4, B_6, 2c. 2c. B_m dieser neuen Gleichung sind daher:

$$B_2 = S[r_{\mathfrak{a}}^{2n}] + S\left[\underset{\mathfrak{a}<\mathfrak{b}}{r_{\mathfrak{a}}^n \cdot r_{\mathfrak{b}}^n \cdot e^{\pm n[\varphi_{\mathfrak{a}} \pm \varphi_{\mathfrak{b}}] \cdot i}}\right]$$

$$B_4 = S\left[\underset{\mathfrak{a}<\mathfrak{b}}{r_{\mathfrak{a}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{b}}^{2n}}\right] + S\left[\underset{\mathfrak{b}<\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}\text{ u. }\mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{a}}{r_{\mathfrak{a}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{b}}^n \cdot r_{\mathfrak{c}}^n \cdot e^{\pm n(\varphi_{\mathfrak{b}} \pm \varphi_{\mathfrak{c}}) \cdot i}}\right]$$
$$+ S\left[\underset{\mathfrak{a}<\mathfrak{b}<\mathfrak{c}<\mathfrak{d}}{r_{\mathfrak{a}}^n \cdot r_{\mathfrak{b}}^n \cdot r_{\mathfrak{c}}^n \cdot r_{\mathfrak{d}}^n \cdot e^{\pm n(\varphi_{\mathfrak{a}} \pm \varphi_{\mathfrak{b}} \pm \varphi_{\mathfrak{c}} \pm \varphi_{\mathfrak{d}}) \cdot i}}\right]$$

$$B_6 = S\left[\underset{\mathfrak{a}<\mathfrak{b}<\mathfrak{c}}{r_{\mathfrak{a}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{b}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{c}}^{2n}}\right] + S\left[\underset{\mathfrak{a}<\mathfrak{b} \quad \mathfrak{c}<\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{c}\text{ u. }\mathfrak{d} \gtrless \mathfrak{a}\text{ u. } \gtrless \mathfrak{b}}{r_{\mathfrak{a}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{b}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{c}}^n \cdot r_{\mathfrak{d}}^n \cdot e^{\pm n(\varphi_{\mathfrak{c}} \pm \varphi_{\mathfrak{d}}) \cdot i}}\right]$$
$$+ S\left[\underset{\mathfrak{b}<\mathfrak{c}<\mathfrak{d}<\mathfrak{e}, \quad \mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e} \gtrless \mathfrak{a}}{r_{\mathfrak{a}}^{2n} \cdot r_{\mathfrak{b}}^n \cdot r_{\mathfrak{c}}^n \cdot r_{\mathfrak{d}}^n \cdot e_{\mathfrak{e}}^n \cdot e^{\pm n(\varphi_{\mathfrak{b}} \pm \varphi_{\mathfrak{c}} \pm \varphi_{\mathfrak{d}} \pm \varphi_{\mathfrak{e}}) \cdot i}}\right]$$
$$+ S\left[\underset{\mathfrak{a}<\mathfrak{b}<\mathfrak{c}<\mathfrak{d}<\mathfrak{e}<\mathfrak{f}}{r_{\mathfrak{a}}^n \cdot r_{\mathfrak{b}}^n \cdot r_{\mathfrak{c}}^n \cdot r_{\mathfrak{d}}^n \cdot r_{\mathfrak{e}}^n \cdot r_{\mathfrak{f}}^n \cdot e^{\pm n(\varphi_{\mathfrak{a}} \pm \varphi_{\mathfrak{b}} \pm \varphi_{\mathfrak{c}} \pm \varphi_{\mathfrak{d}} \pm \varphi_{\mathfrak{e}} \pm \varphi_{\mathfrak{f}}) \cdot i}}\right]$$

u. s. w. f., wo sich zur Rechten die imaginären (mit *Sinus* multiplicirten) Glieder von selber wegheben, so daß man statt der Potenzen $e^{\pm n\psi \cdot i}$ von e, bezüglich $2 Cos\, n\psi$ schreiben kann.

Je größer nun n genommen wird, desto mehr nähern sich

B_2 dem Werthe r_0^{2n},

B_4 dem Werthe $r_0^{2n} \cdot r_1^{2n}$,

B_6 dem Werthe $r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdot r_2^{2n}$,

u. s. w. f.; und man findet daraus, je größer n genommen wird, desto genäherter,

$$r_0 = \sqrt[2n]{B_2}, \quad r_1 = \sqrt[2n]{\frac{B_4}{B_2}}, \quad r_2 = \sqrt[2n]{\frac{B_6}{B_4}}, \quad r_3 = \sqrt[2n]{\frac{B_8}{B_6}},$$

u. s. w. f., zuletzt $r_{\frac{1}{2}m-1} = \sqrt[2n]{\frac{B_m}{B_{m-2}}}$, wo alle r positiv genommen werden müssen.

So sehen sich also die Model der imaginären Wurzelwerthe, wenn die Gleichung selbst lauter solche Wurzelwerthe hat (nach Gräffe) auf einem ganz analogen Wege gefunden, wie die reellen Wurzelwerthe gefunden werden, wenn die Gleichung lauter reelle Wurzelwerthe hat; und alles, was für die Ausführung der Rechnung im Vorhergehenden gesagt wurde, bleibt für die Auffindung dieser Model gültig; auch daß die Gleichung nicht gleiche Wurzelwerthe haben darf, auch nicht mehr als zwei Wurzelwerthe, welche gleichen Model haben.

§. 281.

Wenn aber die Produkte (r^2) der ($\frac{1}{2}m$) Paare von Wurzelwerthen gefunden sind, so bleibt jetzt noch die weitere Frage übrig, wie nun die einzelnen Wurzelwerthe selbst, vollends gefunden werden.

Stellt aber a und b ein Paar reeller oder imaginärer Wurzelwerthe vor, so ist

$$(x-a)(x-b) \quad \text{d. h.} \quad x^2-(a+b)\cdot x+ab$$

ein Doppel-Faktor von F_x, wenn $F_x = 0$ die gegebene Gleichung ist, deren Grad wir von jetzt ab durch 2m bezeichnen wollen, so daß die Funktion

$$F_{x}, = S\left[\begin{matrix} K_a \cdot x^{2m-a} \\ a+b = 2m \end{matrix}\right],$$

wobei wir $K_0 = 1$ annehmen, — eine Anzahl m solcher Doppel-Faktoren hat, während das Produkt ab der beiden Wurzelwerthe a und b, in jedem derselben gefunden oder doch bekannt

sein soll. Es bleibt daher nur übrig, in jedem dieser Doppel-Faktoren auch die Summe a+b, oder den Koeffizienten —(a+b) von x, noch dazu zu finden, weil aus den beiden Gleichungen

$$ab = r^2 \quad \text{und} \quad -(a+b) = f,$$

die Wurzelwerthe a und b selbst sogleich gefunden sind.

Es erleidet übrigens keinen Zweifel, daß auch dann, wenn die beiden Wurzelwerthe a und b reell wären, solche doch in derselben Form $r \cdot e^{\pm \varphi \cdot i}$ beibehalten werden können, in welcher im §. 280. alle Wurzelwerthe angenommen worden sind, — weil aus den Gleichungen

$$r \cdot e^{\varphi \cdot i} = a \quad \text{und} \quad r \cdot e^{-\varphi \cdot i} = b$$

durch Multiplikation und Division derselben sogleich

$$r^2 = a \cdot b \quad \text{und} \quad e^{2\varphi \cdot i} = \frac{a}{b}$$

also

$$\varphi = \frac{1}{2i} \cdot L \frac{a}{b}$$

sich ergeben würde, wo $L \frac{a}{b}$ den Neper'schen Logarithmen vorstellt, wenn a und b einerlei Vorzeichen haben, — dagegen den „einfachsten Werth" (§. 178.) des natürlichen Logarithmen $\left(\text{d. h. } L\left(-\frac{a}{b}\right) + \pi \cdot i\right)$, wenn a und b verschiedene Vorzeichen hätten. Es würde also dann φ imaginär gedacht werden müssen, und möglicher Weise (wenn $a \cdot b$ negativ wäre) auch r imaginär sein, nie aber der kurz vorher für ab gefundene Werth r^2, der höchstens negativ werden kann.

Sind also a und b reell oder imaginär, so kann man diese Wurzelwerthe doch immer durch die Form

$$r \cdot e^{\varphi \cdot i} \quad \text{d. h.} \quad r \cdot (Cos\,\varphi + i \cdot Sin\,\varphi)$$

und

$$r \cdot e^{-\varphi \cdot i} \quad \text{d. h.} \quad r \cdot (Cos\,\varphi - i \cdot Sin\,\varphi)$$

ausdrücken; und der gesuchte Werth f d. h. —(a+b), ist daher immer durch $-2r \cdot Cos\,\varphi$ ausgedrückt, es mögen die einzelnen Wurzelwerthe reell oder imaginär sein.

Substituirt man nun statt x in die Gleichung

$F_x = 0$, d. h. in $S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot x^{2m-a}}\right] = 0$, wo $K_0 = 1$,

die Werthe $r \cdot e^{\varphi \cdot i}$ und $r \cdot e^{-\varphi \cdot i}$, so erhält man

$S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot r^{2m-a} \cdot e^{(2m-a)\varphi \cdot i}}\right] = 0$ und $S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot r^{2m-a} \cdot e^{-(2m-a)\varphi \cdot i}}\right] = 0.$

Diese geben, wenn man sie addirt und subtrahirt (zu und von einander) und dann bezüglich durch 2 und 2i dividirt,

$$S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot r^{2m-a} \cdot Cos(2m-a)\varphi}\right] = 0$$

und $$S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot r^{2m-a} \cdot Sin(2m-a)\varphi}\right] = 0.$$

Multiplicirt man nun die erstere dieser Gleichungen mit $Cos\, m\varphi$, die andere mit $Sin\, m\varphi$ und addirt man dann die Resultate, — multiplicirt man ferner die zweite mit $Cos\, m\varphi$, die erstere aber mit $Sin\, m\varphi$ und subtrahirt man das letztere Produkt von dem ersteren, — so erhält man die nachstehenden beiden Gleichungen

$S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot r^{2m-a} \cdot Cos(m-a)\varphi}\right] = 0$ und $S\left[\underset{a+b=2m}{K_a \cdot r^{2m-a} \cdot Sin(m-a)\varphi}\right] = 0.$

Weil aber hier a nach und nach alle Werthe bekommt, welche 0 oder positiv ganz sind bis 2m hin, so entstehen eben so viele Glieder mit *Cos* und *Sin* negativer Bogen, wie mit *Cos* und *Sin* positiver, während $Cos(m-a)\varphi$ denselben Werth behält für $a = m + \mu$, wie für $a = m - \mu$, dagegen $Sin(m-a)\varphi$ für diese beiden Werthe von a, zwar der Größe nach sich nicht ändert, aber dem Vorzeichen nach sich ändert. Faßt man daher je zwei Glieder dieser Reihen, die vom Anfange und vom Ende gleich weit abliegen, in eines zusammen, so erhält man, wenn die Gleichungen noch durch r^{2m} dividirt werden,

$$S\left[\underset{a+b=m}{(K_a + K_{2m-a} \cdot r^{-(2m-2a)}) \cdot r^{-a} \cdot Cos(m-a)\varphi}\right] = 0$$

und

$$S\left[\underset{a+b=m-1}{(K_a - K_{2m-a} \cdot r^{-(2m-2a)}) \cdot r^{-a} \cdot Sin(m-a)\varphi}\right] = 0,$$

wo wir in der letztern statt $a+b=m$, geschrieben haben

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = m-1$, weil der Werth $\mathfrak{a} = m$ den $Sin(m-\mathfrak{a})\varphi$ in $Sin\,0$, d. h. in 0 umwandelt, dieses letzte Glied also ausfällt.

Verwandeln wir jetzt $Cos(m-\mathfrak{a})\varphi$ und $Sin(m-\mathfrak{a})\varphi$ (nach §. 149. Anmerkg.) in (endliche) Reihen, welche nach Potenzen von $Cos\,\varphi$ fortlaufen, und substituiren wir diese Reihen statt der Cos und Sin der vielfachen Bogen, und setzen wir (aus $-2r\cdot Cos\,\varphi = f$) überall $-\frac{f}{r}$ statt $2Cos\,\varphi$, so erhalten wir wenn die zweite Gleichung noch durch $Sin\,\varphi$ dividirt, die erstere aber mit 2 multiplicirt wird, die folgenden beiden Resultate, nämlich:

I.

$$S\left[(K_{\mathfrak{a}}+K_{2m-\mathfrak{a}}\cdot r^{-(2m-2\mathfrak{a})})\cdot(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}\cdot r^{2\mathfrak{c}}\cdot(m-\mathfrak{a})\cdot\frac{(m-\mathfrak{a}-1-\mathfrak{c})^{\mathfrak{c}-1|-1}}{\mathfrak{c}!}\cdot f^{m-\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}=\mathfrak{g},\;\mathfrak{g}+\mathfrak{b}=m.}=0$$

und

II.

$$S\left[(K_{\mathfrak{a}}-K_{2m-\mathfrak{a}}\cdot r^{-(2m-2\mathfrak{a})})\cdot(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}\cdot r^{2\mathfrak{c}}\cdot\frac{(m-\mathfrak{a}-1-\mathfrak{c})^{\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{c}!}\cdot f^{m-1-\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}=\mathfrak{g},\;\mathfrak{g}+\mathfrak{b}=m-1.}=0.$$

Diese Gleichungen sind es nun, welche zu jedem der gefundenen Werthe von r^2 oder ab, den zugehörigen Werth von f geben, indem man

1) für alle Werthe 0, 1, 2, 3 rc. bis m, oder bis m−1 von $\mathfrak{a}$, die Werthe von

$$K_{\mathfrak{a}}+K_{2m-\mathfrak{a}}\cdot r^{-(2m-2\mathfrak{a})},\;=\beta_{\mathfrak{a}}$$

und $$K_{\mathfrak{a}}-K_{2m-\mathfrak{a}}\cdot r^{-(2m-2\mathfrak{a})},\;=\gamma_{\mathfrak{a}}$$

berechnet, dann

2) statt $\mathfrak{g}$ nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, rc. bis m, oder bis m−1, substituirt, um aus den Gleichungen I. und II. die nachstehenden Formen derselben zu erhalten, nämlich: *)

---

*) Die Gleichung $\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}=0$ giebt $\mathfrak{a}=0$ und $\mathfrak{c}=0$; die Gleichung $\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}=1$ giebt $\mathfrak{a}=1$, $\mathfrak{c}=0$; die Gleichung $\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}=2$ giebt $\mathfrak{c}=0$,

$$\text{III.}\quad \beta_0 \cdot f^m - \beta_1 \cdot f^{m-1} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ -m\beta_0 \cdot r^2 \end{bmatrix} \cdot f^{m-2} - \begin{bmatrix} \beta_3 \\ -(m-1)\beta_1 \cdot r^2 \end{bmatrix} \cdot f^{m-3}$$

$$+ \begin{bmatrix} \beta_4 \\ -(m-2)\beta_2 r^2 \\ +\frac{m(m-3)}{1\cdot 2}\beta_0 r^4 \end{bmatrix} \cdot f^{m-4} + \cdots = 0$$

$$\text{IV.}\quad \gamma_0 \cdot f^{m-1} - \gamma_1 \cdot f^{m-2} + \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ -(m-2)\gamma_0 r^2 \end{bmatrix} \cdot f^{m-3} - \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ -(m-3)\gamma_1 r^2 \end{bmatrix} \cdot f^{m-4}$$

$$+ \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ -(m-4)\gamma_2 r^2 \\ +\frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}\gamma_0 r^4 \end{bmatrix} \cdot f^{m-5} + \cdots = 0,$$

hierauf aber zwischen diesen beiden ganzen Funktionen von f, den größten gemeinschaftlichen Theiler sucht und letzteren $= 0$ setzt.

Ist diese so zuletzt erhaltene Gleichung vom 1ten, 2ten, 3ten, μten Grade, so gehören zu einem und demselben Werthe von r^2, nur ein Werth, oder 2, 3, μ Werthe von f, so daß im letzten Falle μ Paare von Wurzelwerthen existiren, in welchem das Produkt eines jeden Paares einen und denselben Werth hat, welcher Fall zu denjenigen Ausnahmsfällen gehört, die noch nicht betrachtet sind.

Anmerkung. Ist die gegebene Gleichung $F_x = 0$, wie wir angenommen haben, diese, nämlich:

$a = 2$ und noch $c = 1$, $a = 0$; die Gleichung $a + 2c = 3$ giebt $c = 0$, $a = 3$ und noch $c = 1$, $a = 1$; die Gleichung $a + 2c = 4$ giebt $c = 0$, $a = 4$, dann $c = 1$, $a = 2$ und noch $c = 2$, $a = 0$; eben so haben die Gleichungen $a + 2c = 5$, $a + 2c = 6$, $a + 2c = 7$, $a + 2c = 8$, 2c. 2c. die Werthe

c, a	c, a	c, a	c, a
0, 5	0, 6	0, 7	0, 8
1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4
	3, 0	3, 1	3, 2
			4, 0.

$$x^{2m}+K_1x^{2m-1}+K_2x^{2m-2}+\cdots+K_{2m-1}x+K_{2m}=0,$$

und sind $f_0, f_1, f_2, \cdots f_{m-1}$ die m Werthe, welche f überhaupt hat, so daß

$$\alpha)\quad F_x=(x^2+f_0x+r_0^2)(x^2+f_1x+r_1^2)\cdots(x^2+f_{m-1}x+r_{m-1}^2)$$

sein muß, so hat man

$$1)\quad f_0+f_1+f_2+\cdots+f_m=K_1;$$

ferner ist

$$\beta)\quad K_{2m}=r_0^2\cdot r_1^2\cdot r_2^2\cdots r_{m-1}^2;$$

dividirt man daher die Gleichung α) durch die Gleichung β), so erhält man

$$1+\frac{K_{2m-1}}{K_{2m}}\cdot x+\cdots+\frac{1}{K_{2m}}x^{2m}$$
$$=\left(1+\frac{f_0}{r_0^2}x+\frac{1}{r_0^2}x^2\right)\left(1+\frac{f_1}{r_1^2}x+\frac{1}{r_1^2}x^2\right)\cdots\left(1+\frac{f_{m-1}}{r_{m-1}^2}x+\frac{1}{r_{m-1}^2}\cdot x^2\right).$$

Aus der Multiplikation zur Rechten und Vergleichung der Koeffizienten von x^1 zur Linken und zur Rechten, folgt nun noch

$$2)\quad \frac{f_0}{r_0^2}+\frac{f_1}{r_1^2}+\frac{f_2}{r_2^2}+\cdots+\frac{f_{m-1}}{r_{m-1}^2}=\frac{K_{2m-1}}{K_{2m}};$$

und mittelst dieser Gleichungen 1.) und 2.) lassen sich immer zwei der Werthe $f_0, f_1, f_2, \cdots f_{m-1}$ leicht finden, sobald die $m-2$ übrigen bereits gefunden sind. — Diese Betrachtung gewährt eine große Beihülfe.

Löst man überhaupt das Produkt zur Rechten in α.) auf, so gehen aus der Vergleichung der einzelnen Koeffizienten zur Linken und zur Rechten von α.), außer den beiden Gleichungen 1. und 2.), noch $2m-2$ Gleichungen zwischen den m verschiedenen Werthen von f und den m verschiedenen Werthen von r^2, hervor, so daß man im Ganzen 2m solcher Gleichungen hat, welche alle zur Bestimmung der m Werthe von f verwandt werden können, sobald die Werthe von r^2 alle schon gefunden sind. — Diese letzteren $2m-2$ Gleichungen werden aber zur Bestim-

mung der Werthe von f, in der Regel keinen praktischen Vortheil gewähren.

§. 282.

Hat man aber von zwei Wurzelwerthen a und b gefunden:

$$a+b=-f \quad \text{und} \quad ab=r^2,$$

so findet sich sogleich

$$a=-\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2-4r^2} \quad \text{und} \quad b=-\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}\sqrt{f^2-4r^2};$$

und für die verschiedenen Fälle macht sich die praktische Rechnung so:

I. Ist r^2 positiv und $f<2r$, so berechnet man φ aus $Cos\,\varphi=\frac{-f}{2r}$ und hat dann

$$a=r\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi); \quad b=r\cdot(Cos\,\varphi-i\cdot Sin\,\varphi).$$

II. Ist r^2 positiv, aber $f \overline{>} 2r$, so berechnet man ψ aus der Gleichung $-\frac{2r}{f}=Sin\,\psi$, und hat dann

$$a=r\cdot Cotg\,\tfrac{1}{2}\psi \quad \text{und} \quad b=r\cdot Tg\,\tfrac{1}{2}\psi.$$

III. Ist aber r^2 negativ, also $-r^2$ positiv, so berechnet man zuerst φ aus der Gleichung $-\frac{2\sqrt{-r^2}}{f}=Tg\,\varphi$, und hat dann

$$a=\sqrt{-r^2}\cdot Cotg\,\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad b=-\sqrt{-r^2}\cdot Tg\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

In den beiden letztern Fällen sind die Wurzelwerthe a und b reell; dieselben kommen also im §. 280. nicht vor, erscheinen aber in den nächsten Paragraphen.

Und hat man für a und b reelle oder imaginäre Näherungs-Werthe gefunden, so kann man dann immer auch noch eine zweite Annäherung auf dem Wege des §. 275. dazu finden. Ist nämlich a von der Form $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$ gefunden, und ist h das, was $a+h$ zum genommenen Wurzelwerth macht, so ist h von der Form $\varrho\cdot e^{\psi\cdot i}$ und dabei ϱ sehr klein. Die Potenzen von h

z. B h^l, sind dann $=\varrho^l\cdot e^{l\psi\cdot i}=\varrho^l\cdot(Cos\,l\psi+i\cdot Sin\,l\psi)$, werden also in ihren beiden Theilen $\varrho^l\cdot Cos\,l\psi$ und $\varrho^l\cdot Sin\,l\psi$, immer kleiner und kleiner je größer l wird; folglich kann man die höheren Potenzen von h eben so weglassen, wenn man eine zweite Annäherung haben will, wie wenn h reell ist. Es bleibt daher auch jetzt noch

$$h=-\frac{F_x}{F_x^I},\quad \text{für}\quad x=r\cdot e^{\varphi\cdot i},$$

und, analog wie im §. 278.,

$$1)\quad log^{10}(x+h)=log^{10}x+M\cdot\frac{h}{x}=log\,x-M\cdot\frac{F_x}{x\cdot F_x^I},$$

wo $x\cdot F_x^I$ die Funktion ist, welche aus F_x d. h. aus $x^{2m}+K_1x^{2m-1}+\cdots+K_{2m-1}x+K_{2m}$, erhalten wird, wenn man jedes Glied mit seinem Exponenten von x multiplicirt, nachdem man vorher $K_{2m-1}x$ und K_{2m} bezüglich in $K_{2m-1}x^1$ und $K_{2m}x^0$ umgeformt hat. Es ist aber jetzt, wegen $x=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$, wenn man mit Brigg'schen Logarithmen rechnet (weil $log^{10}a=M\cdot log\,a$ ist)

$$2)\quad log^{10}x=L^{10}r+M\cdot\varphi\cdot i;$$

verwandelt man daher F_x und $x\cdot F_x^I$ für $x=r\cdot e^{\varphi\cdot i}$, in die Formen $R\cdot e^{\psi\cdot i}$ und $R'\cdot e^{\psi'\cdot i}$, so daß

$$\frac{F_x}{x\cdot F_x^I}=\frac{R}{R'}\cdot e^{(\psi-\psi')\cdot i}=\frac{R}{R'}\cdot(Cos(\psi-\psi')+i\cdot Sin(\psi-\psi'))$$

wird, so geht die Gleichung 1.) mittelst der 2.) über in

$$3)\quad log^{10}(x+h)=\left[L^{10}r-M\cdot\frac{R}{R'}\cdot Cos(\psi-\psi')\right]$$
$$+M\cdot\left(\varphi-\frac{R}{R'}\cdot Sin(\psi-\psi')\right)\cdot i.$$

Denkt man sich nun den mehr genäherten Wurzelwerth x+h auf die Form $r_1\cdot e^{\varphi_1\cdot i}$ gebracht, so hat man noch

$$4)\quad log^{10}(x+h)=L^{10}r_1+M\cdot\varphi_1\cdot i;$$

folglich findet sich, wenn man 3.) mit 4.) vergleicht,

$$5)\quad L^{10} r_1 = L^{10} r - M \cdot \frac{R}{R'} \cdot Cos(\psi - \psi')$$

und

$$6)\quad \varphi_1 = \varphi - \frac{R}{R'} \cdot Sin(\psi - \psi'),$$

mittelst welcher beiden Gleichungen die neuen, mehr genäherten Werthe r_1 und φ_1, aus den alten Werthen r und φ gefunden werden, während R, ψ, R' und ψ' aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 7) & R \cdot e^{\psi \cdot i} = F_x \\ 8) & R' \cdot e^{\psi' \cdot i} = x \cdot F^I_x \end{array}\right\} \text{für } x = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

berechnet werden müssen.

Setzt man dann statt r und φ diese neuen, mehr genäherten Werthe, wie sie so eben aus den Gleichungen 7.) 8.) 5.) und 6.) berechnet worden sind, in dieselben Gleichungen, so findet sich eine dritte Annäherung; u. s. w. f. —

§. 283.

Wir kommen nun zur Betrachtung des dritten Falles, nämlich zur Auflösung einer höheren Gleichung $F_x = 0$ vom m^{ten} Grade, wenn sie reelle und imaginäre Wurzelwerthe durch einander hat. — Man kann dann doch immer annehmen, daß m eine gerade Zahl ist, weil man die gegebene Gleichung nöthigenfalls noch mit x multipliciren kann, wodurch sie noch den Wurzelwerth 0 (Null) mehr erhält. — Folglich bleibt nun der ganze §. 280., welcher lauter imaginäre Wurzelwerthe voraussetzt, in Bezug auf seinen formellen Theil ganz unverändert, nur daß jedes Paar reeller Wurzelwerthe a und b, ebenfalls in der Form $r \cdot e^{\varphi \cdot i}$ und $r \cdot e^{-\varphi \cdot i}$ ausgedrückt gedacht wird, so daß r^2 wiederum das Produkt ab derselben ausdrückt, wie wir solches zu Anfang des §. 281. nachgewiesen haben. Die reellen Wurzelwerthe sind aber paarweise so geordnet gedacht, daß die Produkte eines jeden Paares reeller und imaginärer Wurzelwerthe der Größe nach geordnet noch durch

$r_0^2 > r_1^2 > r_2^2 > r_3^2 \cdots > r_{m-1}^2$ ausgedrückt sind. Dann aber hat man wieder, wie im §. 280. desto mehr genähert, je größer n ist,

$$\sqrt[n]{B_2} = r_0^2; \quad \sqrt[n]{\frac{B_4}{B_2}} = r_1^2; \quad \sqrt[n]{\frac{B_6}{B_4}} = r_2^2, \text{ etc. etc.}$$

$$\sqrt[n]{\frac{B_{2\mu+2}}{B_{2\mu}}} = r_\mu^2, \cdots \sqrt[n]{\frac{B_m}{B_{m-2}}} = r_{m-1}^2,$$

so lange nur keiner der reellen Wurzelwerthe, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner ist als ein zu einem folgenden Paare reeller Wurzelwerthe gehöriger und auch nicht kleiner als der Model r eines der folgenden imaginären Wurzel-Paares, so lange derselbe endlich auch nicht größer ist, als der Model r eines der vorhergehenden imaginären Wurzel-Paares *).

---

*) Denkt man sich z. B. eine Gleichung vom 6ten Grade mit den vier imaginären Wurzelwerthen $r_0 \cdot e^{\pm \varphi_0 \cdot i}$ und $r_2 \cdot e^{\pm \varphi_2 \cdot i}$ und den beiden reellen Wurzelwerthen a und b, deren Produkt $= r_1^2$ ist, während $r_0^2 > r_1^2 > r_2^2$ sein soll (immer vom Vorzeichen abgesehen, da r_1^2 auch negativ werden kann). Dann findet sich

$$-B_1 = 2r_0^n \cdot Cos\, n\varphi_0 + a^n + b^n + 2r_2^n \cdot Cos\, n\varphi_2;$$

$$B_2 = r_0^{2n} + a^n b^n + r_2^{2n} + 2r_0^n \cdot r_2^n \cdot Cos\, n(\varphi_0 + \varphi_2) + 2r_0^n \cdot r_2^n \cdot Cos\, n(\varphi_0 - \varphi_2)$$
$$+ 2r_0^n \cdot Cos\, n\varphi_0 (a^n + b^n) + 2r_2^n \cdot Cos\, n\varphi_2 \cdot (a^n b^n);$$

u. s. w. f. — Wäre nun neben $r_0^2 > \pm ab > r_2^2$ (was vorausgesetzt ist) auch noch $\pm a > r_0$ $\left(\text{natürlich dann } \pm b < \frac{r_0^2}{\pm a}\right)$, wo $\pm a$, $\pm b$ die absoluten Werthe von a und b vorstellen, und wäre $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ (also die ersten beiden Wurzelwerthe $r_0 \cdot e^{\pm \varphi_0 \cdot i} = \pm i \cdot r_0$), so würde, weil n als gerade Zahl gedacht ist, $Cos\, n\varphi_0 = Cos\, n'\pi = \pm 1$ sein, und dann würde das Glied $2r_0^n \cdot Cos\, n\varphi_0 \times a^n$ in B_2, $= \pm 2r_0^n \cdot a^n$ werden, also abgesehen vom Vorzeichen, größer sein, als das Glied r_0^{2n}. — Es würde also nun $\sqrt[n]{B_2}$ (genähert) $= \pm r_0 \cdot a \cdot \sqrt[n]{2}$ werden, und nicht mehr $= r_0^2$. —

Dagegen würde unter denselben Annahmen werden (genähert) $-B_1 = a^n$

Diese n^{ten} Wurzeln geben demnach immer das Produkt zweier Wurzelwerthe, — entweder zweier zusammengehörigen imaginären $r \cdot e^{\varphi \cdot i}$ und $r \cdot e^{-\varphi \cdot i}$, nämlich das Quadrat (r^2) ihres Models, — oder zweier, der Größe nach am wenigsten von einander verschiedener reellen Wurzelwerthe, nur daß man nicht wissen kann, ob man jetzt das Produkt der erstern Gattung, oder das Produkt der andern Gattung der Wurzelwerthe habe, und da dies letztere auch negativ sein kann, die n^{te} Wurzel aber (in so ferne n als gerade Zahl gedacht worden ist) zwei reelle Werthe hat, einen positiven und einen negativen, so weiß man auch nicht, welcher dieser beiden Werthe zu nehmen ist. Diese Ungewißheit ist aber selten von großem praktischen Nachtheil, da sich nicht schwer Mittel finden lassen, ihn zu beseitigen. Doch müssen wir des beschränkten Raumes wegen, denjenigen Leser, der sich nicht selbst helfen könnte, auf die Schrift von Encke verweisen, in so ferne es darauf ankommt, zu entscheiden, ob r^2 positiv oder negativ zu nehmen ist. Ob aber, wenn ein solcher Quotient z. B. $\frac{B_{2\mu+2}}{B_{2\mu}}$ einen konstanten Werth annimmt, der daraus gefundene Werth r_μ^2 einem reellen oder einem imaginären Wurzel-Paare angehört, erkennt man daran, daß die Quotienten

$$\frac{-B_{2\mu+1}}{B_{2\mu}} \quad \text{und} \quad \frac{-B_{2\mu+2}}{B_{2\mu+1}},$$

für immer größere n, konstante Werthe annehmen oder schwankende. Im erstern Fall ist der erstere dieser Quotienten $= a^n$, der andere aber $= b^n$, wenn a und b die zu diesem r_μ^2 ge-

---

also $\sqrt[n]{(-B_1)} = a$. Daß aber dieses eintritt, würde man daran erkennen, daß $\sqrt[n]{(-B_1)}$, für immer größere n, einen konstanten Werth annimmt.

Man sieht aus diesem Beispiel, wie ein genaues Zergliedern der Ausnahmsfälle, in Verbindung mit einer Untersuchung, welche? n^{ten} Wurzeln konstante Werthe annehmen, wenn auch n immer größer genommen wird, die Ausnahmsfälle besiegen muß.

hörigen reellen Wurzelwerthe sind (d. h. wenn $ab = r_\mu^2$ ist); so daß man nun nur noch das Vorzeichen von a und b (etwa durch direkte Substitution dieser Werthe in F_x) zu bestimmen braucht. Sollte ein solches Schwanken in $B_{2\mu+1}$ eintreten (für immer größere Werthe von n), daß dieser Koeffizient selbst oder gar wiederholt negativ wird, so gehört r_μ^2 entschieden zu imaginären Wurzelwerthen. — Werden endlich diese beiden Quotienten $\frac{B_{2\mu+1}}{B_{2\mu}}$ und $\frac{B_{2\mu+2}}{B_{2\mu+1}}$, für immer größere n, nicht bloß konstant, sondern wird auch der erstere immer gerade 4 mal so groß als der andere, so hat man zwei gleiche reelle Wurzelwerthe, und zwar ist

$$a^n = b^n = \frac{-B_{2\mu+1}}{2B_{2\mu}},$$

weil $B_{2\mu+1}$ die zwei Glieder $r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{2\mu-1}^{2n} \cdot (a^n + b^n)$ hat, von denen, wenn, so oft $a > b$ ist, der Summand b^n weggedacht wird, das bedeutendste Glied übrig bleibt, — welche aber in

$$2r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{2\mu-1}^{2n} \cdot a^n$$

übergehen, wenn $a = \pm b$ ist.

Anmerkung. Die (abgesehen vom Vorzeichen) gleichen reellen Wurzelwerthe, welche im §. 278., wo wir lauter reelle Wurzelwerthe vorausgesetzt haben, nicht gefunden werden konnten, finden sich also bei dem jetzigen Verfahren, welches natürlich auch dann angewandt werden kann, wenn gar keines der Wurzelpaare imaginär sein sollte. Nur müssen wieder die hier nöthig gewordenen Bedingungen erfüllt sein und die Ausnahmen davon müssen also noch besonders untersucht werden.

Man muß zu dem Ende die Ausnahmsfälle durchgehen und sehen, wie sich unter den verschiedenen Annahmen der Wurzelwerthe, die Werthe der Koeffizienten B gestalten müssen, wenn n immer größer gedacht wird.

Denkt man sich z. B., daß $r_\mu^2 = \pm a^2$ und $r_{\mu+1}^2 = \pm ab$ ist, daß also 3 (abgesehen vom Vorzeichen) gleiche Wurzelwerthe a existiren, während (immer abgesehen vom Vorzeichen) $a > b$ ist, so überzeugt man sich bald, daß für n sehr groß, werden wird

$$B_{2\mu} = r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdot r_2^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n}$$

$$-B_{2\mu+1} = 3r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n} \cdot a^n$$

$$B_{2\mu+2} = 3r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n} \cdot a^{2n}$$

$$-B_{2\mu+3} = r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n} \cdot a^{3n}$$

und $$B_{2\mu+4} = r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n} \cdot a^{3n} b^n.$$

Umgekehrt: findet man, daß alle diese Koeffizienten, für immer größere Werthe von n, in einem solchen *) konstanten Verhältniß zu einander stehen, — so ist $r_\mu^2 = a^2$ und $r_{\mu+1}^2 = ab$, und man findet sogleich (genähert)

$$a = \sqrt[n]{-\frac{B_{2\mu+1}}{3B_{2\mu}}} = \sqrt[n]{-\frac{B_{2\mu+2}}{B_{2\mu+1}}} = \sqrt[n]{-\frac{3B_{2\mu+3}}{B_{2\mu+2}}}$$

und $$b = \sqrt[n]{-\frac{B_{2\mu+4}}{B_{2\mu+3}}}.$$

Denkt man sich aber z. B. $r_{\mu+1}^2 = ab$ und $a = r_\mu$ (also $b < a$, immer abgesehen vom Vorzeichen) so würde sich zeigen, in den bedeutendsten Gliedern,

$$B_{2\mu} = r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdot r_2^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n};$$

$B_{2\mu+1}$ und $B_{2\mu+2}$ würden zu $B_{2\mu}$ in einem schwankenden Ver-

---

*) D. h. findet sich

$$\frac{B_{2\mu+1}}{3B_{2\mu}} = \frac{B_{2\mu+2}}{B_{2\mu+1}} = \frac{3B_{2\mu+3}}{B_{2\mu+2}},$$

also auch der Quotient $\frac{B_{2\mu+1}}{B_{2\mu}}$ konstant das 9fache des Quotienten $\frac{B_{2\mu+3}}{B_{2\mu}}$.

hältniß stehen, wenn auch n immer größer gedacht wird, dagegen wäre

$$-B_{2\mu+3} = r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n} \cdot a^{3n}$$

und $$B_{2\mu+4} = r_0^{2n} \cdot r_1^{2n} \cdots r_{\mu-1}^{2n} \cdot a^{3n} \cdot b^n.$$

Umgekehrt also: zeigen sich die 5 auf einander folgenden Koeffizienten so, daß nur der erste mit dem vierten und fünften in einem konstanten Verhältniß steht (für immer größer werdende Werthe von n), so ist der vorausgesetzte Fall vorhanden und man findet dann

$$r_\mu = a = \sqrt[3n]{-\frac{B_{2\mu+3}}{B_{2\mu}}}$$

und $$b = \sqrt[n]{-\frac{B_{2\mu+4}}{B_{2\mu+3}}}.$$

Denkt man sich zwei Model r_μ und $r_{\mu+1}$ von zwei Paaren imaginärer Wurzelwerthen einander gleich, so finden sich $B_{2\mu+1}$, $B_{2\mu+2}$ und $B_{2\mu+3}$ (wenn man n immer größer nimmt) im schwankenden Verhältniß zu $B_{2\mu}$. — Der Model $r_\mu = r_{\mu+1}$ findet sich dann aus $B_{2\mu+4}$ und $B_{2\mu}$.

Wir glauben jedoch aufhören zu dürfen von diesen Ausnahmsfällen zu sprechen und fügen nur noch hinzu, daß in diesen Ausnahmsfällen die Berechnung der zweiten und dritten Annäherung u. s. w. ebenfalls noch einer besonderen Untersuchung unterliegen muß, wenn sie die gewünschte d. h. die möglichste Genauigkeit geben soll, daß wir aber den Leser, der sich dieses nicht selbst zurecht zu legen vermag, — weil uns hier der Raum gebricht, — hinsichtlich dieser Einzelheiten ebenfalls auf die oben angeführte Schrift von Encke verweisen müssen.

Encke, dessen Urtheil in diesen Dingen vollkommen kompetent ist, sagt übrigens von dieser Methode des Gräffe: „Sie „empfiehlt sich durch Allgemeinheit, Strenge und Kürze. Sie „bedarf keiner Versuche. Sie ist auf Gleichungen jedes Grades „anwendbar und verlangt nie unausführbare Rechnungen. Die

„Natur der Wurzelwerthe, die Anzahl der imaginären, legt ihr „kein Hinderniß in den Weg. Für die Kürze derselben spricht „endlich der Umstand, daß die Bestimmung der sämmtlichen Wur„zelwerthe einer Gleichung vom 7ten Grade bei sechs imaginären, „so weit der Wahrheit genähert, als Logarithmen von 7 Deci„malen es erlauben, in etwa zwei bis drei Stunden gänzlich „vollendet sein wird."

§. 284.

Wir erwähnen der Methode des Amerikaners Horner, welche bei Wiener Mathematikern Anklang gefunden hat *) und von Spitzer in Wien auch auf die Auffindung imaginärer Wurzelwerthe ausgedehnt worden ist **), — nur deshalb, um von ihr sagen zu können, daß sie sich von der Newton'schen Methode (§. 275.) nur erst in der dritten Annäherung unterscheidet und dann durchaus nicht im Resultat, sondern nur in der Ansicht und in der praktischen Ausrechnung.

Sie geht eben so von einer ersten Annäherung α aus, welche versuchsweise oder sonst wie, gefunden sein und den Wurzelwerth der gegebenen Gleichung $F_x = 0$, bis auf Zehntheile genau angeben muß. Sie bildet sich dann die Gleichung §. 275. Nr. 2., nur in umgekehrter Ordnung geschrieben, nämlich die Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad z^m + \frac{1}{(m-1)!} F_\alpha^{(m)} \cdot z^{m-1} + \cdots + F_\alpha^{I} \cdot z + F_\alpha = 0,$$

wo wir hier z geschrieben haben, an Stelle des h im §. 275. Nr. 2. Sie berechnet sich aber alle Koeffizienten dieser Gleichung, während die Newton'sche Methode sich mit der Berechnung der zwei letzten F_α^{I} und F_α begnügt. Beide nehmen dann

*) Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen. Wien 1842. In's Deutsche übertragen vom Prof. Schulz von Straßnitzki.

**) Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten von Simon Spitzer. Wien 1851.

$z = -\frac{F_\alpha}{F^I_\alpha}$ als zweite Annäherung; und in so weit ist also zwischen beiden Methoden noch nicht der geringste Unterschied.

Horner betrachtet aber die Gleichung (⊙) als die Gleichung, deren m Wurzelwerthe z, alle um α kleiner sind als die m Wurzelwerthe x, in $F_x = 0$, und von welcher einer derselben $< \frac{1}{10}$ ist. Er denkt sich diese Gleichung, welche wir jetzt durch $\varphi_z = 0$ bezeichnen wollen, als eine neue gegebene Gleichung, von welcher er den ersten Näherungswerth $\beta = -\frac{F_\alpha}{F^I_\alpha} < \frac{1}{10}$ bereits gefunden hat, berechnet wieder alle Koeffizienten der neuen Gleichung (⊙), nämlich der Gleichung

$$(\odot.\,1.)\cdots \qquad z^m + \frac{1}{(m-1)!}\varphi_\beta^{(m-1)}\cdot z^{m-1} + \cdots + \varphi^I_\beta \cdot z + \varphi_\beta = 0$$

und nimmt dann $z = -\frac{\varphi_\beta}{\varphi^I_\beta}$ als dritte Annäherung, während nach der Newton'schen Methode bloß $F_{\alpha+\beta}$ und $F^I_{\alpha+\beta}$ berechnet werden und $z = -\frac{F_{\alpha+\beta}}{F^I_{\alpha+\beta}}$ als dritte Annäherung genommen wird.

Weil aber $\varphi_z = F_{\alpha+z}$ und $\varphi^I_z = F^I_{\alpha+z}$ ist, so ist auch $\varphi_\beta = F_{\alpha+\beta}$ und $\varphi^I_\beta = F^I_{\alpha+\beta}$, so daß die dritte Annäherung bei beiden Methoden, der Quotient von genau denselben beiden Zahlen ist.

Jede der beiden Methoden findet dann die vierte und die folgenden Annäherungen, wie jede die dritte gefunden hat. — In den Resultaten weichen also beide nicht im Geringsten von einander ab.

Es treffen daher die Horner'sche Methode alle die Bemerkungen, welche von Lagrange und Anderen gegen die Newton'sche Methode gemacht worden sind. — Eben so läßt sich aber auch bei der Horner'schen Methode die Verbesserung

des Fourier (§. 276.) anbringen, wie bei der Newton'schen, und wenn Schulz von Straßnitzki und Spitzer dies unerwähnt lassen, so müssen wir eben deshalb hier ausdrücklich noch hinzufügen, daß man außerdem nicht wissen kann, ob ein weiteres Verfahren auch wirklich eine weitere Annäherung bringe oder vielleicht sogar vom wahren Werthe weiter noch abführe.

Daß man nach der Horner'schen Methode von der jedesmaligen Gleichung (⊙) alle Koeffizienten berechnen muß, während die Newton'sche Methode deren nur zwei verlangt, ist im Allgemeinen nicht als Nachtheil der erstern anzusehen, wenigstens nicht, so lange die aufzulösende Gleichung von einem nicht zu hohen Grade ist, weil bei der Berechnung das im §. 81. und im §. 85. III. von uns mitgetheilte praktische Verfahren angewandt wird, welches stets ziemlich schnell zum Ziele führt, und bei jedem neuen Verfahren desto schneller zum Ziele führt, als der Werth α, mit welchem jeder vorhergehende Koeffizient multiplicirt werden muß, um den folgenden zu erhalten, immer kleiner wird, das Multipliciren daher, wenn man eine bestimmte Anzahl Decimalen nicht überschreiten will, bei den folgenden Annäherungen sich noch sehr vereinfacht.

§. 285.

Da die Newton'sche Methode (und daher auch die Horner'sche) einen ersten Näherungswerth, welcher mindestens noch die Zehntheile genau haben muß, sich dadurch verschafft, daß man versuchsweise Zahlen α und β aufsucht, welche F_α positiv, F_β aber negativ machen, um durch Aufgreifung von Werthen, die zwischen α und β liegen, dem Wurzelwerth näher rücken zu können, — und da man lange vergebens nach zwei solchen Zahlen α und β suchen kann, in so ferne vielleicht bei einer langen Reihe von Versuchen die Werthe von F_x entweder immer positiv, oder immer negativ sich ausweisen könnten, — so hat man sich bemüht, sichere Kennzeichen aufzufinden, an denen man abnehmen kann, ob zwischen $x = a$ und $x = b$ mindestens ein Wur-

zelwerth der Gleichung $F_x = 0$ liegen muß, und wie viele Wurzelwerthe überhaupt dazwischen liegen.

I. Descartes schon stellt folgenden Satz auf:
Wenn die gegebene Gleichung $F_x = 0$ die folgende ist:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

und wenn man in der Reihe der Koeffizienten

$$1, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \cdots A_{m-2}, \quad A_{m-1}, \quad A_m$$

unter Folge der Vorzeichen versteht, daß zwei auf einander folgende dieser positiven oder negativen Zahlen einerlei Vorzeichen haben, — dagegen es einen Wechsel der Vorzeichen nennt, wenn dieselben zwei auf einander folgenden Zahlen, verschiedene Vorzeichen haben, — so hat die Gleichung $F_x = 0$ überhaupt nie mehr positive Wurzelwerthe als die gedachte Reihe der Koeffizienten im Ganzen Wechsel der Vorzeichen hat, wobei man die Nullwerthe (wenn Glieder fehlen) ganz unberücksichtigt läßt.

II. Fourier (in seinem oben angeführten Werke) stellt dagegen folgenden Satz auf:

Sind a und b zwei beliebig gegebene reelle Zahlen und ist $a<b$ (d. h. ist $b-a$ positiv), so hat die Gleichung $F_x = 0$, zwischen a und b nie mehr reelle Wurzelwerthe — wenn jeder vielfache nur als ein einziger gezählt wird, — als der Ueberschuß beträgt der Wechsel der Vorzeichen in der Reihe

$$(a)\cdots \quad F_a, \quad F_a^{I}, \quad F_a^{II}, \quad F_a^{III}, \cdots F_a^{(m-1)}, \quad F_a^{(m)},$$

über die Wechsel der Vorzeichen in der Reihe

$$(b)\cdots \quad F_b, \quad F_b^{I}, \quad F_b^{II}, \quad F_b^{III}, \cdots F_b^{(m-1)}, \quad F_b^{(m)},$$

während die Reihen (a) und (b) die Werthe von F_x und ihren Derivationen F_x^{I}, F_x^{II}, F_x^{III}, $\cdots F_x^{(m)} \cdots (x)$ vorstellen, welche letztere bezüglich für $x = a$ und für $x = b$ annehmen, und wenn in der Reihe (a) die Nullwerthe als nicht vorhanden angesehen werden; während in der Reihe (b) statt der vorkommenden Nullen solche Vorzeichen gesetzt werden, daß sie mit dem

nächstfolgenden Gliede der Reihe (b), welches nicht mehr Null ist, lauter Wechsel bilden *).

III. Nachdem Fourier seinen Lehrsatz längere Zeit bereits der Akademie zu Paris mitgetheilt hatte, legte im Mai 1829 Sturm derselben den nachstehenden Satz vor:

Wenn man auf F_x und ihre Derivation F^I_x das Verfahren anwendet (§. 82. Nr. 4.), nach welchem der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen beiden gesucht wird, wenn man aber jedesmal alle Glieder der Reste vorher mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versieht, ehe man auf's Neue dividirt, so daß sich Funktionen $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \cdots \varphi_\nu$ als Divisoren bilden, welche den Gleichungen

$$\varphi_2 = q_1 \cdot F^I_x - F_x; \quad \varphi_3 = q_2 \cdot \varphi_2 - F^I_x; \quad \varphi_4 = q_3 \cdot \varphi_3 - \varphi_2;$$
$$\cdots \varphi_{\mu+1} = q_\mu \cdot \varphi_\mu - \varphi_{\mu-1} \text{ und zuletzt } 0 = q_\nu \cdot \varphi_\nu - \varphi_{\nu-1}$$

entsprechen, wo $q_1, q_2, q_3, \cdots q_{\nu-1}$ die nach und nach als Resultate der Division erhaltenen ganzen Funktionen sind, wo bei der Division mit φ_ν kein Rest mehr geblieben ist und wo φ_ν entweder nach x konstant oder (im Falle wirklich ein gemeinschaftlicher Theiler zwischen F_x und F^I_x existirt) eine Funktion von x und der größeste gemeinschaftliche Theiler zwischen F_x und F^I_x ist; — wenn man dann in der Reihe der Funktionen

---

*) Wenn also z. B. die Reihen (a) und (b) folgende Werthe haben

(a)… +, −, +, 0, 0, −, +, −, 0, +, 0, −
(b)… +, 0, 0, +, +, 0, −, −, 0, 0, 0, +

so beachtet man in der Reihe (a) die Nullen gar nicht, und hat daher 7 Wechsel der Vorzeichen; die Reihe (b) schreibt man aber so

+, +, −, +, +, +, −, −, −, +, −, +,

so nämlich, daß die Vorzeichen, welche man z. B. statt der 3 auf einander folgenden Nullen setzt, mit dem, nach diesen Nullen folgendem Vorzeichen + lauter Wechsel bilden. Dadurch hat die Reihe (b) 6 Wechsel der Vorzeichen. Es liegt daher zwischen a und b höchstens ein einziger reeller Wurzelwerth, vielleicht aber auch gar keiner. Liegt aber ein reeller Wurzelwerth dazwischen, so kann dieser ein einfacher, aber auch ein vielfacher sein.

$$F_x, \quad F^I_x, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \varphi_4, \cdots \varphi_\nu$$

zuerst a statt x setzt und sich dadurch bildet eine Reihe (a),
dann b statt x setzt und sich dadurch bildet eine Reihe (b)
von reellen, also positiven oder negativen oder Nullwerthen, — so hat die Gleichung $F_x = 0$, zwischen a und b genau so viele reelle Wurzelwerthe, als der Ueberschuß beträgt der Wechsel der Vorzeichen in der Reihe (a), über die Wechsel der Vorzeichen in der Reihe (b), indem die Nullwerthe in jeder dieser Reihen (a) und (b), als gar nicht vorhanden angesehen werden, und wenn, im Falle zwischen a und b gleiche Wurzelwerthe liegen, jeder solche vielfache Wurzelwerth nur als ein einziger gezählt wird.

Anmerkung. Man sieht wie durch den Fourier'schen Lehrsatz in der erwähnten Beziehung viel, aber nur erst durch den Sturm'schen Lehrsatz alles erreicht ist. — Dagegen erfordert der letztere unangenehme, verdrießliche Rechnungen, — obgleich man wenigstens die Bruchkoeffizienten (nach §. 82.) dadurch vermeiden kann, daß man vor jeder neuen Division, den Dividenden mit der nöthigen aber positiven ganzen Zahl multiplicirt (damit die Vorzeichen der Werthe φ nicht verändert werden) — während der Lehrsatz des Fourier diese Rechnungen nicht erfordert.

Um aber diese Sätze zu erweisen, wollen wir uns eines Verfahrens des Cauchy bedienen, welches diese Sätze alle zugleich liefert. Der folgende Paragraph mag dies nun näher nachweisen.

§. 286.

1) Unter der Voraussetzung, daß $a<b$ (d. h. $b-a$ positiv) ist, während a und b beliebig positiv, negativ oder Null sind, denken wir uns x von a nach b hin stetig wachsend. — Wir setzen ferner voraus, daß zwei beliebige ganze Funktionen von x, welche durch φ und ψ bezeichnet sein mögen, keinen Faktor $x-\alpha$

mehr als einmal enthalten, während α zwischen a und b liegt und daß auch dieser Faktor $x-\alpha$ den Funktionen φ und ψ nicht gemeinschaftlich ist. Wird nun (während x von a nach b hin stetig wächst) entweder $\varphi=0$ oder $\psi=0$, so wird jedesmal der Quotient $\frac{\psi}{\varphi}$ vom $\begin{Bmatrix}\text{Positiven}\\\text{Negativen}\end{Bmatrix}$ zum $\begin{Bmatrix}\text{Negativen}\\\text{Positiven}\end{Bmatrix}$ übergehen *). Ist nun (von $x=a$ bis zu $x=b$) n die Anzahl der Uebergänge vom Negativen zum Positiven und n' die Anzahl der Uebergänge vom Positiven zum Negativen, so heiße die Differenz $n-n'$ der **totale Ueberschuß** dieser gebrochenen Funktion $\frac{\psi}{\varphi}$, innerhalb der Grenzen a und b von x.

2) Dieser **totale Ueberschuß** $\varepsilon(=n-n')$ von $\frac{\psi}{\varphi}$, ist $=0$, wenn φ und ψ für $x=a$ und für $x=b$, jedesmal eine **Folge**, oder jedesmal einen **Wechsel** der Vorzeichen haben, weil dann $\frac{\psi}{\varphi}$ für $x=a$ und für $x=b$ ein und dasselbe Vorzeichen hat und daher zwischen $x=a$ und $x=b$ **gleich oft** vom Negativen zum Positiven, wie vom Positiven zum Negativen übergehen muß. — Dieser totale Ueberschuß ε ist dagegen

---

*) Wird (für $x=\alpha$) $\varphi=0$, und behielte φ für $x=\alpha-h$ und für $x=\alpha+h$, während h unendlich klein gedacht ist, also unmittelbar vorher und unmittelbar nachher, ein und dasselbe Vorzeichen, so wäre $\varphi=0$ entweder ein **kleinster** oder ein **größter** Werth von φ, und dann wäre (nach §. 97.) auch ihre Ableitung φ', $=0$ (für $x=\alpha$); und dann hätte φ (nach den §§. 86. 87.) den Faktor $(x-\alpha)^2$, was gegen die gemachte Voraussetzung ist, nach welcher φ den Faktor $x-\alpha$ nur einmal enthalten soll, so lange α zwischen a und b liegt. Dasselbe gilt für die Annahme von $\psi=0$. — Ist endlich $\varphi=0$, so haben $\psi_{\alpha-h}$, ψ_α und $\psi_{\alpha+h}$ stets ein und dasselbe Vorzeichen, so lange h unendlich klein gedacht wird, weil sonst $\psi_\alpha=0$ sein, also ψ mit φ den Faktor $x-\alpha$ gemeinschaftlich haben müßte, was wieder gegen die Voraussetzung ist.

$= +1$, wenn φ und ψ für $x = a$ genommen, einen Wechsel der Vorzeichen gewähren, dagegen für $x = b$ genommen, eine Folge. — Dieser totale Ueberschuß ε ist endlich

$= -1$, wenn φ und ψ für $x = a$ genommen, eine Folge der Vorzeichen haben, für $x = b$ genommen, dagegen einen Wechsel.

3) Zählt man die Uebergänge vom $\begin{Bmatrix}\text{Positiven}\\\text{Negativen}\end{Bmatrix}$ zum $\begin{Bmatrix}\text{Negativen}\\\text{Positiven}\end{Bmatrix}$ der gebrochenen Funktion $\frac{\psi}{\varphi}$ nicht, welche bei $\psi = 0$ statt finden, sondern zählt man die allein, welche von dem Durchgange des Nenners φ durch Null herrühren, so heiße dieser Unterschied $n - n' = E$, der partielle Ueberschuß der Funktion $\frac{\psi}{\varphi}$ innerhalb der Grenzen a und b.

4) Die Summe der partiellen Ueberschüsse E und E' der beiden inversen gebrochenen Funktionen $\frac{\psi}{\varphi}$ und $\frac{\varphi}{\psi}$, ist allemal dem totalen Ueberschuß ε von $\frac{\psi}{\varphi}$ gleich; d. h. es ist allemal $E + E' = \varepsilon$. (Augenfällig).

5) Ist $\frac{\psi}{\varphi}$ unächt gebrochen und verwandelt man sie in die Summe $q + \frac{\chi}{\varphi}$, aus einer ganzen Funktion q und der ächt gebrochenen Funktion $\frac{\chi}{\varphi}$, so daß

$$\alpha) \qquad \frac{\psi}{\varphi} = q + \frac{\chi}{\varphi}$$

ist, so sind die partiellen Ueberschüsse von $\frac{\psi}{\varphi}$ und $\frac{\chi}{\varphi}$ einander gleich.

Denn unmittelbar vor und unmittelbar nach dem

Durchgang von φ durch Null, sind die Werthe von $\frac{\psi}{\varphi}$ und $\frac{\chi}{\varphi}$ unendlich groß; die Gleichung α.) könnte daher nicht bestehen, wenn nicht $\frac{\psi}{\varphi}$ und $\frac{\chi}{\varphi}$ einerlei Vorzeichen hätten, sowohl unmittelbar vor dem Durchgange des Nenners φ durch 0, als auch unmittelbar nachher.

6) Giebt man aber der Gleichung α.) diese Form

$$\beta)\qquad \frac{\psi}{\varphi} = q - \frac{-\chi}{\varphi}$$

wo $-\chi$ den Rest der Division von φ in ψ vorstellt, aber jedes Glied mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen (oder mit -1 multiplicirt), so sind die partiellen-Ueberschüsse von $\frac{\psi}{\varphi}$ und $\frac{-\chi}{\varphi}$ zwar einander gleich, aber entgegengesetzt.

7) Sind nun φ_0 und φ_1 Funktionen von x, die genau den Bedingungen genügen, welche wir in Nr. 1. für die dortigen φ und ψ festgesetzt haben, d. h. welche keinen Faktor $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, 2c. 2c. mehr als einmal enthalten und auch keinen gemeinschaftlich haben, während α, oder β, oder γ, 2c. zwischen a und b liegt; — ist ferner $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ eine unächt gebrochene Funktion und verfährt man genau so mit φ_0 und φ_1, wie wir im §. 285. III. mit F und F' verfahren haben, — sucht man also durch das Verfahren, mittelst welches zwischen φ und φ_1 der größte gemeinschaftliche Theiler gefunden wird, die Funktionen $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \cdots \varphi_\nu$ so, daß man hat:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = q_1 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}; \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = q_2 - \frac{\varphi_3}{\varphi_2}; \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = q_3 - \frac{\varphi_4}{\varphi_3}, \text{ 2c. 2c.}$$

$$\frac{\varphi_{\mu-1}}{\varphi_\mu} = q_\mu - \frac{\varphi_{\mu+1}}{\varphi_\mu}, \quad \text{und zuletzt} \quad \frac{\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu} = q_\nu,$$

so ist entweder φ_ν konstant und φ_0 und φ_1 haben keinen gemeinschaftlichen Theiler, oder es ist φ_ν noch eine Funktion von

x und zugleich der größte gemeinschaftliche Theiler von φ_0 und φ_1, und dann hat φ_ν wenigstens keinen Faktor $x-\alpha$, während α zwischen a und b liegt; weil der Voraussetzung zufolge, φ_0 und φ_1 keinen solchen gemeinschaftlichen Faktor haben sollen. Wegen der Gleichungen

$$\gamma) \qquad \varphi_{\mu-1} = q_\mu \cdot \varphi_\mu - \varphi_{\mu+1} \quad (\text{für } \mu = 0, 1, 2, \cdots \nu-1)$$

haben ferner von den Funktionen

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \cdots \varphi_{\mu-1}, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \cdots \varphi_\nu$$

keine zwei auf einander folgenden, einen gemeinschaftlichen Theiler $x-\alpha$, wo α zwischen a und b läge; weil sonst alle und folglich auch φ_0 und φ_1 (der Voraussetzung entgegen) diesen gemeinschaftlichen Theiler hätten. Eben deshalb sind auch nie zwei nächst auf einander folgende dieser Funktionen für irgend einen Werth α von x, der zwischen a und b liegt, — der Null gleich.

Sind nun E_μ und E^{I}_μ die partiellen Ueberschüsse der beiden inversen Funktionen $\frac{\varphi_{\mu+1}}{\varphi_\mu}$ und $\frac{\varphi_\mu}{\varphi_{\mu+1}}$, und ist ε_μ der totale Ueberschuß von $\frac{\varphi_{\mu+1}}{\varphi_\mu}$, während μ nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, $\cdots$ $\nu-1$ vorstellt, so hat man allemal

$$\delta) \qquad E_\mu + E^{\mathrm{I}}_\mu = \varepsilon_\mu \qquad (\text{nach Nr. 4.})$$

$$\varepsilon) \qquad E^{\mathrm{I}}_\mu = -E_{\mu+1} \quad (\text{nach Nr. 6.});$$

also ist auch (aus δ. und ε.)

$$\zeta) \qquad E_\mu = E_{\mu+1} + \varepsilon_\mu.$$

Setzt man nun hier herein statt μ nach und nach 0, 1, 2, 3, $\cdots$ $\nu-1$, — addirt man alle entstehenden Gleichungen und hebt man links und rechts so viel wie möglich weg, — so erhält man

$$\eta) \qquad E_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_{\nu-1},$$

so daß hiernach der partielle Ueberschuß E der ächt gebro-

chenen Funktion $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$, gleich ist der Summe der totalen Ueberschüsse der ächt gebrochenen Funktionen

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \frac{\varphi_4}{\varphi_3}, \ldots \frac{\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}}.$$

Nun ist aber (nach der Nr. 2.) die Summe dieser totalen Ueberschüsse der Differenz $w_f - f_w$ gleich, wenn w_f die Summe der Uebergänge vom Wechsel zur Folge der Vorzeichen, f_w aber die Summe der Uebergänge von einer Folge zu einem Wechsel der Vorzeichen bezeichnet in den Werthen je zweier nächst auf einander folgenden der Funktionen

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \ldots \varphi_{\nu-1}, \quad \varphi_\nu \qquad \ldots(x)$$

wenn man zuerst a, dann b statt x setzt, und darauf von der Reihe (a) der zuerst erhaltenen Werthe, zu der Reihe (b) der zuletzt erhaltenen, übergeht.

Ist aber W_a die Anzahl aller Wechsel der Vorzeichen in der Reihe (a), und W_b die Anzahl aller in der Reihe (b) vorhandenen Wechsel, so ist offenbar die letztere Anzahl W_b gleich der erstern Anzahl W_a, vermindert um die Anzahl w_f und vermehrt um die Anzahl f_w der Uebergänge vom Wechsel zur Folge und von der Folge zum Wechsel der Vorzeichen; d. h. es ist

$$W_b = W_a - w_f + f_w,$$

woraus hervorgeht:

$$w_f - f_w = W_a - W_b.$$

Die Gleichung η.) geht daher nun über in

$$\vartheta) \qquad E_0 = W_a - W_b;$$

d. h. „der partielle Ueberschuß E_0 der ächt gebrochenen Funk-„tion $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ innerhalb der Grenzwerthe a und b von x, ist allemal „genau gleich dem Ueberschuß $W_a - W_b$ aller Wechsel W_a in „der Reihe (a) über alle Wechsel W_b in der Reihe (b)."

8) Dieser Satz gilt auch noch, wenn in der Reihe (a), oder in der Reihe (b), mehrere Glieder vorkommen, welche Null sind, wenn man nur diese Glieder als gar nicht vorhanden ansieht und nur die Wechsel der wirklich positiven oder negativen Zahlen beachtet, oder auch wenn man statt der Nullen beliebig $(+)$ oder $(-)$ schreibt; ausgenommen jedoch, wenn φ_0 selbst in der Reihe (a) oder in der Reihe (b) der Null gleich wird. — Denn wegen $\varphi_{\mu-1} = q_{\mu-1} \cdot \varphi_\mu - \varphi_{\mu+1}$, welche für $\mu = 0, 1, 2, \ldots \nu-1$ gilt, können nie zwei auf einander folgende der Funktionen φ, der Null gleich werden, weil sonst alle der Null gleich wären, was nicht vorausgesetzt wird. Ist aber $\varphi_\mu = 0$, so bieten $\varphi_{\mu-1}$ und $\varphi_{\mu+1}$ stets einen Wechsel der Vorzeichen dar (wie dieselbe Gleichung erkennen läßt, weil sie dann in $\varphi_{\mu-1} = -\varphi_{\mu+1}$ übergeht). Denkt man sich aber, wenn z. B. $\varphi_\mu = 0$ wird (für $x = a$), diese Grenze a um eine unendlich kleine Zahl vermehrt (oder vermindert), so wird φ_μ positiv oder negativ, und es haben dann $\varphi_{\mu-1}$, φ_μ, $\varphi_{\mu+1}$ die Vorzeichen $-++$; oder $++-$; oder $--+$; oder $+--$; also jedesmal auch einen Wechsel und nur einen einzigen, wie wenn $\varphi_\mu = 0$ gar nicht gezählt worden, sondern nur der Wechsel $-+$, oder $+-$, von $\varphi_{\mu-1}$ und $\varphi_{\mu+1}$ in Rechnung gebracht wäre. — Durch die unendlich kleine Aenderung der Grenzen wird aber der partielle Ueberschuß E_0 nicht verändert.

9) Aus der Gleichung ζ. der Nr. 7. kann man aber auch ableiten

$$\varkappa)\qquad E_\mu = \varepsilon_\mu + \varepsilon_{\mu+1} + \cdots + \varepsilon_{\nu-1}.$$

Ist man daher überzeugt, daß eine der Funktionen φ, z. B. φ_μ, zwischen $x = a$ und $x = b$ gar nicht mehr der Null gleich wird, daß also $E_\mu = 0$ ist (weil die ächt gebrochene Funktion $\frac{\varphi_{\mu+1}}{\varphi_\mu}$ nun im Nenner gar nicht mehr durch Null hindurchgeht), so ist statt η.) zu setzen

$$\lambda)\qquad E_0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1}$$

d. h. in der Gleichung ϑ.) sind dann bei dem Zählen der Wechsel W_a und W_b, die nach φ_μ folgenden Funktionen φ, gar nicht mehr zu berücksichtigen, weshalb sie auch gar nicht hergestellt zu werden brauchen.

10) Wählt man zu der gegebenen Funktion φ_0, die Funktion φ_1 (vom niedrigern Grade) so, daß $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ bei jedem reellen Wurzelwerth α, von $\varphi_0 = 0$, der zwischen a und b liegt, stets vom Negativen zum Positiven und nie vom Positiven zum Negativen übergeht, — so ist der partielle Ueberschuß E_0, allemal der Anzahl der, zwischen a und b liegenden reellen Wurzelwerthe von $\varphi_0 = 0$, genau gleich, und dann ist die Anzahl dieser Wurzelwerthe (nach Nr. 7. ϑ.) auch genau gleich dem Ueberschuß $W_a - W_b$ der Anzahl der Wechsel in der Reihe (a), über die Anzahl der Wechsel in der Reihe (b), wenn nur $\varphi_0 = 0$ zwischen a und b lauter ungleiche reelle Wurzelwerthe hat.

Diese Bedingung (daß $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ innerhalb der Grenzen a und b, wenn $\varphi_0 = 0$ wird, allemal vom Negativen zum Positiven übergeht) ist aber erfüllt, so oft $\varphi_1 = \varphi_0^{I}$ genommen, und unter φ_0^{I} die Derivation von φ_0 verstanden wird; denn wenn φ_α, φ_α^{I}, φ_α^{II}, 2c. 2c. das bedeuten, was aus

$$\varphi_0,\ \varphi_0^{I},\ \varphi_0^{II}\ \text{2c. 2c.}$$

bezüglich wird, sobald man α statt x setzt, und weil φ_0^{II} die Derivation von φ_0^{I}, u. s. w. ist, — so hat man (nach §. 84.)

$$\varphi_{\alpha+h}^{I} = \varphi_\alpha^{I} + \varphi_\alpha^{II} \cdot h + \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha^{III} \cdot h^2 + \cdots$$

und (wegen $\varphi_\alpha = 0$)

$$\varphi_{\alpha+h} = \varphi_\alpha^{I} \cdot h + \tfrac{1}{2}\varphi_\alpha^{II} \cdot h^2 + \cdots;$$

also ist der Quotient

$$\frac{\varphi_{\alpha+h}^{I}}{\varphi_{\alpha+h}},\ = \frac{1}{h} \cdot \frac{\varphi_\alpha^{I} + \varphi_\alpha^{II} \cdot h + \cdots}{\varphi_\alpha^{I} + \frac{1}{2}\varphi_\alpha^{II} \cdot h + \cdots}$$

und deshalb geht derselbe mit h zugleich vom Negativen zum Positiven über, so lange h unendlich klein gedacht wird.

Dadurch ist aber der Lehrsatz des Sturm außer Zweifel gestellt, für den Fall, daß die gegebene Gleichung zwischen a und b nicht gleiche reelle Wurzelwerthe hat.

11) Denkt man sich aber, daß φ_0 den Faktor $x-\alpha$, n mal, den Faktor $x-\beta$, p mal, den Faktor $x-\gamma$, q mal, 2c. 2c. enthält, daß dagegen φ_1 dieselben Faktoren $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, 2c. 2c. einmal weniger hat, während α, β, γ, 2c. 2c. reell sind und zwischen a und b liegen, — so ist (nach §. 82.) $(x-\alpha)^{n-1}\cdot(x-\beta)^{p-1}\cdot(x-\gamma)^{q-1}\cdots$ ein gemeinschaftlicher Faktor aller Funktionen

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \ \varphi_4, \cdots \varphi_\nu;$$

und wegen der Gleichungen

$\varphi_{\mu-1} = q_{\mu-1}\cdot\varphi_\mu - \varphi_{\mu+1}$ (für $\mu = 0, 1, 2, \cdots \nu-1$) können keine zwei nächst auf einander folgenden dieser Funktionen, durch einen Faktor getheilt werden, welcher eine höhere Potenz von $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, 2c. 2c. enthält, weil sonst alle, also auch φ_0 und φ_1 durch dieselben getheilt würden, was gegen unsere Voraussetzung ist. Dividirt man also die Funktionen

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3, \cdots \varphi_\nu$$

alle, durch $(x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{p-1}(x-q)^{q-1}\cdots$ und sind bezüglich

$$R_0, \ R_1, \ R_2, \ R_3, \cdots R_\nu$$

die Resultate dieser Division, so gehen die Gleichungen $\varphi_{\mu-1} = q_{\mu-1}\cdot\varphi_\mu - \varphi_{\mu+1}$ durch die Division mit demselben Faktor über in diese: $R_{\mu-1} = q_{\mu-1}\cdot R_\mu - R_{\mu+1}$, während nie zwei nächst auf einander folgende dieser neuen Funktionen R, für $x = \alpha$, β, γ, 2c. der Null gleich werden können. So oft also eine derselben z. B. R_μ für $x = \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ der Null gleich wird, so oft haben die beiden ihr in der Reihe nächst anliegenden, für denselben Werth von x, entgegengesetzte Vorzeichen.

Daher gilt nun der Satz Nr. 7. 9. unverändert, wenn dort statt der Funktionen φ_0 und φ_1 jetzt bezüglich die Funktionen

R_0 und R_1 gesetzt werden. Weil aber $\varphi_\mu = (x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{p-1}(x-\gamma)^{q-1} \dots R_\mu$ ist, so haben, sowohl für $x = a$, als auch für $x = b$, die Funktionen

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \dots\ \varphi_\nu$$

und $$R_0,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \dots\ R_\nu$$

bezüglich stets einerlei Vorzeichen, oder stets bezüglich entgegengesetzte Vorzeichen, so daß die Anzahl der Wechsel der Vorzeichen in beiden Reihen (der φ und der R), sowohl für $x = a$, als auch für $x = b$, genau eine und dieselbe ist, während R_0 jeden der Faktoren $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, 2c. nur ein mal hat.

„Es ist also der partielle Ueberschuß E_0 von $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ innerhalb der Grenzen a und b von x, so lange jeder der gleichen Wurzelwerthe α, β, γ, 2c. nur einmal gezählt „wird;

„weil er nur dann dem partiellen Ueberschusse von $\frac{R_1}{R_0}$ „innerhalb derselben Grenzen a und b von x, genau „gleich ist,

„allemal genau gleich dem Ueberschuß der Wechsel W_a der „Vorzeichen in der Reihe

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \dots\ \varphi_\nu$$

„wenn sie für $x = a$ berechnet wird, über die Wechsel W_b „in derselben Reihe, aber für $x = b$ berechnet; — obgleich jetzt $\varphi_0 = 0$ zwischen a und b mehrere und beliebig viele gleiche Wurzelwerthe haben soll, wenn nur $\varphi_1 = 0$ jeden derselben Wurzelwerthe bezüglich gerade einmal weniger hat.

Und so oft φ_1 noch so gewählt ist, daß $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ (also auch $\frac{R_1}{R_0}$) für jeden reellen Wurzelwerth von $\varphi_0 = 0$, der zwischen a und b liegt, stets vom Negativen zum Positiven übergeht, und nie vom Positiven zum Negativen, — so oft ist auch

dieser partielle Ueberschuß E_0, der Anzahl der reellen Wurzelwerthe von $R_0 = 0$ (also auch der Anzahl der reellen Wurzelwerthe von $\varphi_0 = 0$, wenn jeder vielfache Wurzelwerth nur als ein einziger gezählt wird), die zwischen a und b liegen, genau gleich, — so daß auch die Anzahl der letztern genau gleich ist dem Ueberschuß $W_a - W_b$ der Wechsel W_a und W_b in der Reihe

$$R_0, \; R_1, \; R_2, \cdots R_\nu$$

also auch in der Reihe

$$\varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \cdots \varphi_\nu,$$

wenn man sie für $x = a$ und für $x = b$ berechnet.

Nimmt man aber wiederum $\varphi_1 = \varphi_0^{\mathrm{I}}$ (unter φ_0^{I} die Derivation von φ_0 verstanden), so sind nicht bloß die früheren Bedingungen alle erfüllt, sondern auch diese letzte; denn es sind z. B., weil $x-\alpha$ in φ_0, n mal vorkommt, die Werthe von φ_0, $\varphi_0^{\mathrm{I}} \cdots$ bis $\varphi_0^{(n-1)}$ für $x = \alpha$ der Null gleich, aber nicht mehr $\varphi_0^{(n)}$; deshalb hat man (nach §. 84.)

$$\varphi^{\mathrm{I}}_{\alpha+h} = \varphi_\alpha^{(n)} \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \varphi_\alpha^{(n+1)} \cdot \frac{h^n}{n!} + \cdots$$

und

$$\varphi_{\alpha+h} = \varphi_\alpha^{(n)} \cdot \frac{h^n}{n!} + \varphi_\alpha^{(n+1)} \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots,$$

also ist

$$\frac{\varphi^{\mathrm{I}}_{\alpha+h}}{\varphi_{\alpha+h}} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\frac{1}{(n-1)!}\varphi_\alpha^{(n)} + \frac{1}{n!}\varphi_\alpha^{(n+1)} \cdot h + \cdots}{\frac{1}{n!}\varphi_\alpha^{(n)} + \frac{1}{(n+1)!}\varphi_\alpha^{(n+1)} \cdot h + \cdots}$$

und deshalb geht der Quotient zur Linken mit h zugleich vom Negativen zum Positiven über, in so ferne h unendlich klein gedacht wird.

Also gilt der Sturm'sche Lehrsatz (§. 285. III.) auch dann noch, wenn die gegebene Gleichung, zwischen a und b gleiche reelle Wurzelwerthe hat, wenn jeder dieser vielfachen Wurzelwerthe nur als ein einziger gezählt wird.

12) Aus der allgemeinen Untersuchung zu Anfange dieses Paragraphen geht aber ferner hervor der Lehrsatz des Rolle, nämlich:

Die Anzahl der, zwischen a und b liegenden reellen Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$, ist nie mehr als um 1 größer, als die Anzahl der, zwischen denselben Grenzen a und b liegenden reellen Wurzelwerthe der Gleichung $F_x^I = 0$, wenn F_x^I die Derivation von F_x ist, sobald jeder vielfache Wurzelwerth nur als ein einziger gezählt wird.

Es habe erstlich $F_x = 0$ gar keine gleichen Wurzelwerthe, welche zwischen a und b liegen. Sind dann E_0 und E_0^I die partiellen Ueberschüsse der beiden inversen Brüche $\frac{F_x^I}{F_x}$ und $\frac{F_x}{F_x^I}$, — ist ε der totale Ueberschuß des erstern, — sind ferner n und n′ die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzelwerthe bezüglich der Gleichungen $F_x = 0$ und $F_x^I = 0$, so hat man

I. $n = E_0$ (nach Nr. 10. gegen Ende)

und

II. $E_0 + E_0^I = \varepsilon$ (nach Nr. 4.),

während $\varepsilon = 0$ oder $= \pm 1$ ist (nach Nr. 2.). Folglich ist auch

III. $n = -E_0^I + \varepsilon$, dabei aber $-E_0^I \overline{\overline{<}} n'$;

und zwar ist nur dann $-E_0^I = n'$, wenn $\frac{F_x}{F_x^I}$ für jeden der n′ reellen Wurzelwerthe von $F_x^I = 0$, vom Positiven zum Negativen übergeht. Immer also ist

IV. $n \overline{\overline{<}} n' + 1$. —

Derselbe Satz gilt nun aber auch noch in dem anderen Falle, in welchem $F_x = 0$ noch die Wurzelwerthe α, β, γ, ꝛc.

bezüglich n, p, q, ꝛc. mal enthält, während α, β, γ, ꝛc. zwischen a und b liegen, — wenn jeder der vielfachen Wurzelwerthe nur als ein einziger gezählt wird. Denn es ist dann

$$F_x = (x-\alpha)^{n-1}\cdot(x-\beta)^{p-1}\cdot(x-\gamma)^{q-1} \cdots \varphi,$$

wo φ jeden der Wurzelwerthe α, β, γ, ⋯ nur einmal hat; ferner ist dann

$$F^I_x = (x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{p-1}(x-\gamma)^{q-1} \cdots \psi_x,$$

wo ψ die Wurzelwerthe α, β, γ, ꝛc. gar nicht hat; folglich genügen φ und ψ genau den Bedingungen der Nr. 1. — Und da zu gleicher Zeit

$$\frac{F^I_x}{F_x} = \frac{\psi}{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{F_x}{F^I_x} = \frac{\varphi}{\psi}$$

ist und der partielle Ueberschuß von $\frac{F^I_x}{F_x}$, also von $\frac{\psi}{\varphi}$ (nach Nr. 11. gegen Ende) noch immer der Anzahl der reellen Wurzelwerthe von $F_x = 0$, gleich ist, welche zwischen a und b liegen, — sobald jeder vielfache Wurzelwerth nur als ein einziger gezählt wird, — so bleiben die Gleichungen I., II., III. und daher auch IV. unter derselben Annahme auch jetzt noch richtig.

13) Aus diesem Satze geht auch noch hervor: Sind

$$a', \quad a'', \quad a''', \quad \text{ꝛc.} \quad a^{(n)}$$

die, der Größe nach geordneten reellen Wurzelwerthe von $F^I_x = 0$, so liegt, weil zwischen a′ und a″ gar kein reeller Wurzelwerth von $F^I_x = 0$ sich befindet, zwischen denselben Grenzen a′ und a″ höchstens ein reeller Wurzelwerth von $F_x = 0$; und überhaupt liegt zwischen je zwei der Größe nach nächst auf einander folgenden reellen Wurzelwerthen von $F^I_x = 0$, höchstens ein reeller Wurzelwerth der gegebenen Gleichung $F_x = 0$.

14) Nun kann man aber auch den Fourier'schen Lehrsatz ableiten. — Schreibt man nämlich, — wenn $F_x = 0$ die gegebene Gleichung vom m^{ten} Grade ist, — die Funktion F_x, und alle ihre Derivationen nach einander hin, so daß man erhält die Reihe

$$(x) \cdots \quad F_x, \quad F_x^I, \quad F_x^{II}, \quad F_x^{III}, \cdots F_x^{(m-1)} \text{ und } F_x^{(m)},$$

in welcher Reihe die auf einander folgenden Funktionen immer um einen Grad niedriger werden, so daß $F_x^{(m-1)}$ vom 1^{ten} Grad und $F_x^{(m)}$ konstant nach x ist; — sind dann

$$n, \quad n', \quad n'', \quad n''', \cdots n^{(m-1)} \text{ und } n^{(m)}$$

die Anzahl der reellen Werthe, welche zwischen a und b liegen und welche diese Funktionen in der Reihe (x), bezüglich der Null gleich machen, unter der Voraussetzung jedoch, daß jeder vielfache Wurzelwerth nur als ein einziger gezählt wird, — sind endlich ε, ε_1, ε_2, $\cdots$ ε_{n-1} die totalen Ueberschüsse der ächten Brüche

$$\frac{F_x^I}{F_x}, \quad \frac{F_x^{II}}{F_x^I}, \quad \frac{F_x^{III}}{F_x^{II}}, \cdots \frac{F_x^{(n)}}{F_x^{(n-1)}},$$

so ist (weil $F_x^{(m)}$ nach x konstant ist) $n^{(m)} = 0$ und (nach Nr. 12.), weil $F_x^{(\mu+1)}$ die Derivation von $F_x^{(\mu)}$ ist,

$$n^{(m-1)} \overline{\overline{<}} n^{(m)} + \varepsilon_{m-1}; \quad n^{(m-2)} \overline{\overline{<}} n^{(m-1)} + \varepsilon_{m-2};$$

$$n^{(m-3)} \overline{\overline{<}} n^{(m-2)} + \varepsilon_{m-3}; \cdots n^{III} \overline{\overline{<}} n^{IV} + \varepsilon_3; \quad n^{II} \overline{\overline{<}} n^{III} + \varepsilon_2,$$

$$n^I \overline{\overline{<}} n^{II} + \varepsilon_1 \text{ und } n \overline{\overline{<}} n^I + \varepsilon,$$

sobald jeder vielfache Wurzelwerth nur als ein einziger gezählt wird. Addirt man alle diese Gleichungen oder Ungleichungen und hebt man links und rechts so viel wie möglich auf, so giebt dies

$$n \overline{\overline{<}} \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{m-1}.$$

Bezeichnen wir nun durch (a) und (b) die Reihen der positiven oder negativen Zahlen, welche aus der Reihe (x) bezüglich

für $x = a$ und für $x = b$ sich ergeben, so ist (nach Nr. 2.) die Summe aller ε gleich der Summe aller Uebergänge der Wechsel irgend zweier auf einander folgenden Glieder von (a), zu Folgen in den entsprechenden Gliedern von (b), weniger der Summe aller Uebergänge der Folgen in (a), in Wechsel in (b); also auch gleich dem Ueberschuß aller Wechsel in (a), über alle Wechsel in (b). — Folglich ist $n \underset{<}{=}$ als dieser letzt-erwähnte Ueberschuß; und dies ist der Lehrsatz des Fourier (§. 285. II.).

Sollten für $x = a$ oder für $x = b$, eine Anzahl n dieser Derivationen der Null gleich werden, z. B. $F_x^{(\mu)}$, $F_x^{(\mu+1)}$, ... bis $F_x^{(\mu+n-1)}$, so müßte man sich die Grenze a, oder b, um ein unendlich kleines h vermehrt sich denken; dann behalten die übrigen Derivationen für $x = a$ und für $x = a+h$, (oder für $x = b$ und für $x = b+h$) einerlei Vorzeichen (so lange h unendlich klein ist), während (nach §. 84.) gefunden wird

$$(\odot)\cdots\quad F_{x+h}^{(\mu+\nu)} = F_x^{(\mu+\nu)} + F_x^{(\mu+\nu+1)}\cdot h + \cdots$$
$$F_x^{(\mu+n-1)}\cdot\frac{h^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} + F_x^{(\mu+n)}\cdot\frac{h^{n-\nu}}{(n-\nu)!} + \cdots,$$

so daß $F_{x+h}^{(\mu+\nu)}$ und $F_x^{(\mu+n)}$ einerlei Vorzeichen haben, für jeden Werth a oder b von x, welcher $F_x^{(\mu+\nu)}$ bis $F_x^{(\mu+n-1)}$ der Null gleich gemacht haben. Es bekommen also alle Derivationen $F_x^{(\mu)}$, $F_x^{(\mu+1)}$, $F_x^{(\mu+2)}$, ... $F_x^{(\mu+n-1)}$, welche für $x = a$ (oder für $x = b$) der Null gleich geworden sind, für $x = a+h$ (oder für $x = b+h$) mit $F_x^{\mu+n}$ einerlei Vorzeichen, so daß die Anzahl der Wechsel in der Reihe (a) oder in der Reihe (b) nicht verändert wird, wenn man diese Nullwerthe als nicht vorhanden ansieht.

Dieselbe Gleichung ($\odot$) läßt aber auch noch sehen, daß wenn $-h$ statt h gesetzt wird, dann

$F^{(\mu+\nu)}_{x-h}$ und $F^{(\mu+n)}_{x}$ $\begin{Bmatrix}\text{einerlei}\\ \text{verschiedene}\end{Bmatrix}$ Vorzeichen haben, je nachdem $n-\nu$ $\begin{Bmatrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{Bmatrix}$ ist. Es bekommen also alle Derivationen

$$F^{(\mu)}_{x},\quad F^{(\mu+1)}_{x},\quad F^{(\mu+2)}_{x},\quad F^{(\mu+3)}_{x},\quad \cdots\quad F^{(\mu+n-1)}_{x},\quad F^{(\mu+n)}_{x}$$

welche bis auf die letzte für $x=b$ (oder für $x=a$) der Null gleich geworden sind, für $x=b-h$ (oder für $x=a-h$) solche Vorzeichen, daß sie lauter Wechsel liefern, während dieselben für $x=b+h$ oder für $x=a+h$ lauter Folgen geliefert haben.

Da man nun $a+h$ statt a und $b-h$ statt b setzen kann, wenn nur h unendlich klein gedacht wird, so folgt:

daß die Anzahl der reellen Wurzelwerthe von $F_x=0$, wenn jeder vielfache Wurzelwerth nur als einziger gezählt wird, nie übersteigen kann den Ueberschuß der Wechsel in der Reihe (a) über die Wechsel in der Reihe (b), wenn man auch in der Reihe (a) alle Nullwerthe, welche vorkommen, gänzlich unbeachtet läßt, dagegen in der Reihe (b), statt der Nullwerthe, solche Vorzeichen setzt, daß sie mit dem Werthe der nächstfolgenden Derivation, der nicht mehr Null ist, lauter Wechsel bilden.

Somit ist der Fourier'sche Lehrsatz strenge erwiesen.

15) Ist nun

$$F_x = 1\cdot x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_{m-1}x + A_m$$

so nehmen für $x=0$ die Funktionen

$$F_x,\quad F^{I}_{x},\quad F^{II}_{x},\quad F^{III}_{x},\quad F^{IV}_{x},\quad \cdots\quad F^{(m-1)}_{x},\quad F^{(m)}_{x}\qquad \cdots(x)$$

bezüglich die Werthe

$A_m,\ A_{m-1},\ 2!A_{m-2},\ 3!A_{m-3},\ 4!A_{m-4},\cdots (m-1)!A_1,\ m!1,$

an, so daß diese Werthe eben so viele Wechsel der Vorzeichen bieten, als deren die bloßen Koeffizienten

$$A_m,\quad A_{m-1},\quad A_{m-2},\quad A_{m-3},\quad A_{m-4},\ \cdots\ A_1,\quad 1$$

selbst haben. Für $x = +\infty$ werden die Glieder derselben Reihe (x) alle positiv, gewähren also gar keinen Wechsel der Vorzeichen; also liegen nach dem Fourier'schen Lehrsatze zwischen 0 und $+\infty$ nicht mehr reelle Wurzelwerthe als die Koeffizienten der Gleichung Wechsel bieten, indem man diejenigen ganz unbeachtet läßt, welche Nullen sind. — Dies ist aber der Lehrsatz des Cartesius (§. 285. I.).

§. 287.

In der Anwendung des Fourier'schen und des Sturm'schen Lehrsatzes muß man noch Folgendes beachten:

1) Wird für $x = a$, F_x selbst der Null gleich, so kann man sich nur noch fragen, wie viele reelle Wurzelwerthe von $F_x = 0$ zwischen $a+h$ und b liegen, während h unendlich klein gedacht wird. Dann aber haben F_{a+h} und F^{I}_{a} stets eine Folge der Vorzeichen.

Wird aber $F_{x}, = 0$ für $x = b$, so kann man nur noch a und $b-h$ als die Grenzen ansehen und dann bilden F_{b-h} mit F^{I}_{b} stets einen Wechsel.

Im erstern Fall kann man jedoch auch $a-h$, und im andern Fall kann man auch $b+h$ als die Grenzen ansehen; dann liegt aber der Wurzelwerth a (im erstern Fall) oder b (im andern Fall) ebenfalls noch dazwischen.

2) Werden bei der Auffindung der Funktionen φ_2, φ_3, φ_4, $\cdots$ φ_ν alle Bruchkoeffizienten vermieden, so darf man die Dividenden, vor jeder neuen Division, nur mit positiven Zahlen multipliciren, damit die Vorzeichen der Werthe der φ nicht verändert werden.

3) Setzt man $a = -\infty$ und $b = +\infty$, so erhält man bei Fourier die Zahl, welche die Menge aller reellen Wurzelwerthe der Gleichung nicht übersteigen kann, — die vielfachen als einfache mit gerechnet; bei Sturm dagegen die genaue Anzahl aller verschiedenen reellen Wurzelwerthe, welche die ge-

gebene Gleichung $F_x = 0$ hat. Kann man dann noch bestimmen, ein wievielfacher jeder derselben ist, so kennt man auch die Anzahl aller reellen Wurzelwerthe, und zieht man diese von der Zahl m, welche den Grad der gegebenen Gleichung anzeigt, ab, so bleibt die Anzahl aller imaginären Wurzelwerthe übrig, welche die gegebene Gleichung hat.

Wie oft aber ein und derselbe Wurzelwerth α in der gegebenen Gleichung $F_x = 0$ vom m^{ten} Grade, vorkommt, läßt sich auf folgende Weise bestimmen. Kommt er nämlich n mal vor, so ist

$$F_x = (x-\alpha)^n \cdot \varphi_x \quad \text{und} \quad F^I_x = (x-\alpha)^{n-1}[n\varphi + (x-\alpha)\cdot\varphi'],$$

(nach V. §. 87.); also ist auch

$$\frac{F_x}{F^I_x} = \frac{x-\alpha}{n+(x-\alpha)\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}}.$$

Setzt man nun in Nr. 11. des §. 286., F_x statt φ, und F^I_x statt φ_1, so ist auch

$$\text{I.} \qquad \frac{R_0}{R_1} = \frac{F_x}{F^I_x} = \frac{x-\alpha}{n+(x-\alpha)\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}},$$

dabei aber $R_0 = (x-\alpha)\cdot\psi_x$ und $R^I_0 = \psi + (x-\alpha)\cdot\psi'$, wenn unter R^I_0 die Derivation von R_0 verstanden wird; folglich ist auch

$$\text{II.} \qquad \frac{R_0}{R^I_0} = \frac{x-\alpha}{1+(x-\alpha)\frac{\psi'}{\psi}}.$$

Dividirt man nun die II. durch die I., so findet sich

$$\frac{R_1}{R^I_0} = \frac{n+(x-\alpha)\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}}{1+(x-\alpha)\cdot\frac{\psi'}{\psi}}, \quad \text{also} \ = n, \quad \text{für} \quad x = \alpha.$$

Man erhält also die Zahl n, wenn man in $\frac{R_1}{R^I_0}$, α statt x

schreibt, und — in so ferne α irrational sein sollte, also R_1 und R_0^I nur näherungsweise ausgerechnet werden könnten, — eben nur die ganze Zahl in dem Quotienten $\frac{R_1}{R_0^I}$ nimmt. — Derselbe Quotient, für $x = \beta$, $x = \gamma$, 2c. berechnet, giebt dann bezüglich die ganzen Zahlen p, q, 2c., welche anzeigen, wie oft jeder der Wurzelwerthe β, γ, 2c. in $F_x = 0$ vorkommt.

Die weiteren interessanten Einzelheiten, wolle der geneigte Leser aus der Abhandlung des Sturm entnehmen, welche sich in den: Mémoires presentés par dix-savans à l'Academie des sciences de l'institut de France. T. VI. 1835. vorfindet, und in Betreff der Arbeiten des Fourier, aus dem schon oben angeführten Werke.

4) Wir wollen aus der Sturm'schen Abhandlung nur noch die eine interessante Thatsache mittheilen, nämlich: Hat die Gleichung $F_x = 0$, lauter ungleiche reelle Wurzelwerthe und trifft es sich, daß von den Funktionen

$$(x) \cdots \quad F_x^I, \; \varphi_2, \; \varphi_3, \; \varphi_4, \; \cdots \; \varphi_\nu,$$

welche nach §. 285. III. gebildet werden, jede folgende genau nur um einen Grad niedriger ist, als die nächst vorhergehende (ein Fall, der als die Regel angesehen werden kann), so daß deshalb φ_ν (nach x) konstant und $\nu = m$ ist, — so hat $F_x = 0$ genau so viele Paare imaginärer Wurzelwerthe, als die vorstehende Reihe (x) (von m Funktionen) — wenn man von jeder Funktion nur die Koeffizienten ihrer höchsten Potenzen von x nimmt, Wechsel der Vorzeichen bietet.

Der Beweis ist aus dem Vorangegangenen leicht zu führen, wenn man bedenkt, daß die Zahl aller reellen Wurzelwerthe nach §. 285. III. erhalten wird, sobald man daselbst $a = -\infty$ und $b = +\infty$ setzt und daß die Vorzeichen der Reihen (a) und (b) daselbst, dann nur von den Vorzeichen der ersten Glieder der Funktionen abhängen, d. h. derjenigen Glieder, welche die höchsten Potenzen von x enthalten.

Anmerkung 1. Cauchy hat noch ein Verfahren angegeben, durch welches die Anzahl der imaginären Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung $F_x = 0$ bestimmt wird, welche von der Form $\alpha + \beta \cdot i$ sind und wo der Repräsentant von $\alpha + \beta \cdot i$ (§. 207.) innerhalb einer beliebig angenommenen geschlossenen Kurve liegt, während letztere auch ein Rechteck sein kann, dessen beide, mit der Ordinaten-Axe parallelen Seiten durch die Abscissenwerthe a und a' und dessen beide anderen Seiten durch die Ordinaten-Werthe b und b' gegeben sind, so daß dann α zwischen den gegebenen Grenzen a und a', und β zwischen den gegebenen Grenzen b und b' liegt. Wenn auch dieses Verfahren in der Anwendung manchen Schwierigkeiten und namentlich höchst verwickelten Rechnungen begegnen muß, so ist der Satz selbst doch ein höchst interessanter Beitrag zur Lehre der höheren Gleichungen, weshalb wir den Leser noch darauf aufmerksam machen. (S. Journal de Mathem. par Liouville. T. I. 1835. und T. V. 1840.).

Anmerkg. 2. In den Comptes rendus hebd. d. séances de l'Acad. d. sciences 1853. Nr. 7. (vom 14. Februar 1853) wird von Hermite ein Satz angegeben, welcher als eine Ausdehnung des Sturm'schen Lehrsatzes auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten anzusehen ist. — Bei dem uns vorgesetzten Zwecke dieses Werkes ist es uns aber nicht erlaubt, überhaupt noch weiter hier in diese Materie einzugehen, und glauben wir dies um so eher rechtfertigen zu können, als von einer weiteren Verfolgung dieser, an sich sehr interessanten Untersuchungen, für die praktische Auflösung numerischer Gleichungen zur Zeit noch nichts abgezogen werden zu können scheint.

Wir wollen daher zu dieser Abtheilung nur noch einige Worte über die numerische Auflösung transcendenter Gleichungen hinzufügen.

§. 288.

Die Newton'sche Näherungs-Methode hat noch den Vor-

theil, daß sie sich auch ohne alle Abänderung auf die Auflösung numerischer transcendenten Gleichungen z. B. die Gleichungen

$$3\,Sin\,x - 5x + 1 = 0$$

oder

$$log\,x + 4x^2 - 2x = 0$$

u. dergl. anwenden läßt.

In so ferne solche transcendente Gleichungen auf die Form der höheren algebraischen Gleichungen gebracht werden können, was z. B. bei der erstern der vorstehenden augenblicklich der Fall ist, — weil man $Sin\,x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 -$ ꝛc. ꝛc. hat, — wird auch allemal die Verbesserung des Fourier (§. 276.) ohne alle Abänderung Platz greifen können. Bei solchen transcendenten Gleichungen dagegen, welche man nicht auf die Form der höhern algebraischen Gleichungen bringen will, muß erst der Begriff der „Derivation" verallgemeinert werden (was in der Differenzial-Rechnung geschieht, und der dortige Differenzial-Koeffizient, oder Differenzial-Quotient, ist eben dieser erweiterte Begriff der „Derivation"); dann aber findet ebenfalls die Verbesserung des Fourier in derselben Form statt und aus denselben Gründen; was jedoch zur Zeit nicht näher erörtert werden kann.

Zwölftes Kapitel.

Zerlegung einiger transcendenten Funktionen in Produkte aus unendlich vielen Faktoren. Summation harmonischer Reihen.

§. 289.

Wenn man eine höhere Gleichung $F_x = 0$ vom m^{ten} Grade nach steigenden Potenzen des Unbekannten x ordnet, so daß man hat

$$F_x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m;$$

und wenn $w_1, w_2, w_3, w_4, \cdots w_m$, die m (reellen oder imaginären) Wurzelwerthe der höheren Gleichung $F_x = 0$ sind, welche zum Theil einander gleich oder alle von einander verschieden sein können, — so ist (nach §. 229. VIII.)

$$F_x = A_0\left(1-\frac{x}{w_1}\right)\left(1-\frac{x}{w_2}\right)\left(1-\frac{x}{w_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{w_m}\right)$$

d. h. die ganze Funktion F_x ist in lauter Faktoren von der Form $1-\frac{x}{w}$ zerlegt, welche gruppenweise einander gleich, aber auch alle von einander verschieden sein können.

Dies läßt sich auf mehrere transcendente Funktionen, welche sich auf die vorstehende Form F_x bringen lassen, und dann als ganze Funktionen vom unendlichen Grade erscheinen, ausdehnen.

Weil man z. B. durch $x = \pm\frac{2n+1}{2}\pi$ alle Werthe ausgedrückt hat, welche $Cos\, x, = 0$ machen, wenn man nur statt n nach und nach 0, 1, 2, 3 und alle positiven ganzen Zahlen schreibt, so ist (nach Obigem)

$$Cos\,x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

oder, wenn man je zwei dieser Faktoren in einen Doppel-Faktor zusammenfaßt,

$$\text{I.}\quad Cos\,x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{7^2\pi^2}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

Eben so sind in der Formel $x = \pm n\pi$, wenn n (nicht Null, sondern) nur alle ganzen Zahlen vorstellt, alle Werthe ausgedrückt, welche $\frac{Sin\,x}{x}$, $=0$ machen; folglich findet sich

$$\frac{Sin\,x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

oder

$$\text{II.}\quad Sin\,x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots \text{ in inf.}$$

Dieses Verfahren ist nach unseren Ansichten vollkommen gerechtfertigt, dadurch, daß die Reihen für $Sin\,x$ und $Cos\,x$ für jeden reellen und imaginären Werth von x konvergent sind, d. h. stets einen bestimmten endlichen Werth annehmen, so daß dadurch diese beiden unendlichen Reihen, welche wir durch $Sin\,x$ und $Cos\,x$ bezeichnet haben, in jeder Kategorie, die Eigenschaften der ganzen Funktionen von x haben, während alles, was für letztere gilt, die Höhe m des Grades willkürlich und beliebig groß voraussetzt. — Es ist nur noch eines unbeachtet gelassen; es ist nämlich noch nicht untersucht, ob die Gleichungen $Cos\,x = 0$ und $Sin\,x = 0$ nicht vielleicht gleiche Wurzelwerthe haben; denn wenn sie diese hätten, so müßten in den Gleichungen I. und II. auch die einzelnen entsprechenden Faktoren mehrfach (in einer Potenz) vorkommen.

Ist aber

$$F_x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \text{ in inf.} = Sin\,x,$$

so findet sich sogleich die Derivation

$$F^{I}_{x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \text{ in inf.} = Cos\,x.$$

Und umgekehrt: ist $F_x = Cos\,x$, so findet sich augenblicklich die Derivation $F^{I}_{x} = -Sin\,x$ dazu. — Da nun, wegen $(Sin\,x)^2 + (Cos\,x)^2 = 1$, nie $Sin\,x$ und $Cos\,x$ zugleich, also nie F_x und F^{I}_{x} zugleich der Null gleich werden können, so haben die Gleichungen $Cos\,x = 0$ und $Sin\,x = 0$ nie ein Paar gleicher Wurzelwerthe (nach §§. 87. 88.).

Dadurch ist aber das obige Verfahren vollständig gerechtfertigt, durch welches (in den Gleichungen I. und II.) $Sin\,x$ und $Cos\,x$ in Produkte aus unendlich vielen Faktoren, zerlegt sich finden. — Der Sinn dieser beiden Gleichungen ist kein anderer, als daß, wenn man diese Faktoren mit einander multiplicirt und die Produkte stets nach x ordnet, je mehr man von diesen Faktoren, in der Ordnung, wie sie (in I. und II.) stehen, nimmt, desto mehr das nach steigenden Potenzen von x geordnete Produkt mit den entsprechenden Gliedern der unendlichen Reihen, die wir durch die Zeichen $Cos\,x$ und $Sin\,x$ bezeichnet haben, zusammenfallen wird. — Der Buchstabe x ist dabei ganz allgemein, ein bloßer Träger der Operationszeichen.

Man kann diese Gleichungen I. und II. auch so schreiben, nämlich

I. $$Cos\,x = P\left[1 - \frac{4x^2}{(2a+1)^2\pi^2}\right]$$

und

II. $$\frac{Sin\,x}{x} = P\left[1 - \frac{x^2}{(a+1)^2\pi^2}\right],$$

indem man unter P das Produkt aller der unendlich vielen Faktoren versteht, welche aus dem eingeklammerten Ausdruck hervorgehen, wenn man statt a nach und nach 0, 1, 2, 3 und alle positiven ganzen Zahlen bis in's Unendliche, gesetzt sich denkt.

Anmerkung. Euler hat (in seiner introductio in analysin infinitorum) einen anderen Weg betreten, um zu diesen Resultaten zu gelangen.

I. Nachdem er nämlich die beiden Binomien

1) $z^m + a^m$ und 2) $z^m - a^m$

in ihre m einfachen Faktoren, bezüglich von der Form

3) $z - a \cdot e^{\frac{2n+1}{m}\pi \cdot i}$ und 4) $z - a \cdot e^{\frac{2n}{m}\pi \cdot i}$,

zerlegt hatte (§. 244.), wo n sowohl 0 als auch jede positive und negative ganze Zahl vorstellt, — machte er sich auch an die Zerlegung der beiden Ausdrücke

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

welche wir im §. 168. bezüglich durch

$$K_x \quad \text{und} \quad S_x$$

bezeichnet und in dem darauf folgenden Paragraphen näher betrachtet haben.

II. Er ging nämlich von dem, im §. 184. niedergelegten Satze aus, nach welchem ist

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \quad \text{und} \quad e^{-x} = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \quad \text{für} \quad m = \infty,$$

so daß man hat

$$\frac{e^x \pm e^{-x}}{2} = \tfrac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \pm \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m\right] \quad \text{für} \quad m = \infty,$$

und er hatte dann die neue Untersuchung auf die im Eingange von I. erwähnte zurückgeführt. — Setzt man nämlich $\left(1 + \frac{x}{m}\right)$ statt z, und $\left(1 - \frac{x}{m}\right)$ statt a, in die Ausdrücke I. 1.—4., so ergeben sich die m (d. h. die unendlich vielen) Faktoren von

5) $e^x + e^{-x}$ und 6) $e^x - e^{-x}$

bezüglich so, wie folgt, nämlich

$$7) \quad \left(1 + \frac{x}{m}\right) - \left(1 - \frac{x}{m}\right) \cdot e^{\frac{2n+1}{m}\pi \cdot i}$$

und 8) $\left(1+\frac{x}{m}\right)-\left(1-\frac{x}{m}\right)e^{\frac{2n}{m}\pi i}$

wo $m=\infty$, n aber nach und nach 0 und jede positive und negative ganze Zahl vorstellt; und es kommt nun nur noch darauf an, diese Faktoren umzuformen, so nämlich, daß sie die Form $x+p$ annehmen, oder daß das Produkt je zweier derselben die Form x^2+px+q erhält. — Dies kann aber auf folgendem Wege geschehen.

III. Nimmt man nämlich z. B. in 7.) die beiden einfachen Faktoren zusammen, wo $n=\nu$ und $n=-(\nu+1)$ ist, so hat man (aus 7.) diese beiden, nämlich:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)-\left(1-\frac{x}{m}\right)e^{\frac{2\nu+1}{m}\pi.i} \text{ und } \left(1+\frac{x}{m}\right)-\left(1-\frac{x}{m}\right)e^{-\frac{2\nu+1}{m}\pi.i},$$

wo ν 0 oder irgend eine positive ganze Zahl vorstellen kann, während $m=\infty$ ist. — Multiplicirt man nun diese beiden Faktoren mit einander, so erhält man (aus 7.) den Doppel-Faktor

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^2+\left(1-\frac{x}{m}\right)^2-2\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)\cdot Cos\frac{2\nu+1}{m}\pi$$

oder

$$2\left[1+\frac{x^2}{m^2}-\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)\cdot Cos\frac{2\nu+1}{m}\pi\right], \text{ wo } m=\infty,$$

oder

$$2\left[\frac{x^2}{m^2}\left(1+Cos\frac{2\nu+1}{m}\pi\right)+\left(1-Cos\frac{2\nu+1}{m}\pi\right)\right] \text{ für } m=\infty;$$

d. h.

$$4\left[\left(Cos\frac{2\nu+1}{2m}\pi\right)^2\cdot\frac{x^2}{m^2}+\left(Sin\frac{2\nu+1}{2m}\pi\right)^2\right] \text{ für } m=\infty,$$

oder

$$4\left(Sin\frac{2\nu+1}{2m}\pi\right)^2\cdot\left[1+\frac{x^2}{m^2}\cdot\left(Cotg\frac{2\nu+1}{2m}\pi\right)^2\right] \text{ für } m=\infty.$$

Weil aber

$$Cotg\,w = \frac{Cos\,w}{Sin\,w} = \frac{1-\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{24}w^4-\text{ꝛc. ꝛc.}}{w-\frac{1}{6}w^3+\text{ꝛc. ꝛc.}} = \frac{1}{w}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}w^2+\cdots}{1-\frac{1}{6}w^2+\cdots},$$

also $=\frac{1}{w}$ wird, für $w=\frac{1}{\infty}$, und da man m immer so groß sich denken kann, daß $\frac{2\nu+1}{2m}\pi=\frac{1}{\infty}$ ist*), so folgt, daß (für $m=\infty$) $Cotg\frac{2\nu+1}{2m}\pi=\frac{2m}{(2\nu+1)\pi}$ wird, so daß der obige Doppel-Faktor die Form

$$9)\qquad \left(2\cdot Sin\frac{2\nu+1}{2m}\pi\right)^2\cdot\left[1+\frac{4x^2}{(2\nu+1)^2\pi^2}\right]$$

annimmt, wo $m=\infty$ ist.

Man bekommt also alle Doppel-Faktoren von e^x+e^{-x}, wenn man in dem so eben gefundenen Doppel-Faktor (9.) statt ν erst 0, dann 1, 2, 3, ꝛc. und alle positiven ganzen Zahlen setzt, bis in's Unendliche**), so findet sich

$$10)\ e^x+e^{-x}=A\cdot\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\text{ in inf.}$$

wo

$$A=\left(2Sin\frac{1}{2m}\pi\right)^2\left(2Sin\frac{3}{2m}\pi\right)^2\left(2Sin\frac{5}{2m}\pi\right)^2\left(2Sin\frac{7}{2m}\pi\right)^2\text{ in inf.},$$

dabei von x unabhängig ist, also für jeden Werth von x, denselben Werth behält, und nun noch einfacher ausgewerthet werden muß.

Setzt man aber in der Gleichung 10.) 0 statt x, so giebt sie

$$2=A$$

---

*) Man darf sich z. B. nur m in der Form $(\mu+\nu)^2$ oder $(\mu+\nu)^k$ denken und $k>1$, zugleich aber $\mu=\infty$.

**) Man hat nämlich oben $n=\nu$ und $=-(\nu+1)$ genommen und diese beiden Formen drücken genau 0 und alle positiven, wie alle negativen ganzen Zahlen aus, sobald man $\nu=0$ und = jeder positiven ganzen Zahl nimmt.

und so erhält man nun aus 10.), wenn man noch durch 2 dividirt,

$$11)\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\text{ in inf.}$$

d. h. wenn man statt e^x und e^{-x} die Reihen setzt, welche diese Zeichen vorstellen,

$$12)\quad 1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\text{ in inf.}$$

$$=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\text{ in inf.};$$

d. h. wenn man die Faktoren zur Rechten nach und nach mit einander multiplicirt und jedes neue Produkt auf's Neue in die Form

$$1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\cdots$$

umformt, so nähern sich die Werthe α, β, γ, ꝛc. ꝛc. ohne Ende den obigen Koeffizienten $\frac{1}{2!}$, $\frac{1}{4!}$, $\frac{1}{6!}$, ꝛc. ꝛc. und weichen zuletzt von den letztern bezüglich um unendlich wenig ab.

IV. Ganz auf demselben Wege liefert die Nr. 8., wenn man zuerst $n=0$ setzt, dann $n=+\nu$ und $n=-\nu$, diese letztern beiden Faktoren mit einander multiplicirt, zuletzt aber statt ν alle ganzen positiven Zahlen geschrieben sich denkt (damit n alle seine Werthe erhält und keinen doppelt), — das nachstehende Resultat, nämlich:

$$13)\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\text{ in inf.}$$

d. h.

$$14)\quad x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\text{ in inf.}$$

$$=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\text{ in inf. *)}$$

---

*) Es ist nur dabei noch zu bemerken, daß man zuerst erhält

V. Setzt man aber in 11.–14. $x \cdot i$ statt x, so geben diese sogleich noch die folgenden Resultate, nämlich

15) $$Cos\,x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

oder

16) $$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+ \text{ in inf.}$$
$$= \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

17) $$Sin\,x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

d. h.

18) $$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+ \text{ in inf.}$$
$$= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

VI. Es versteht sich nun von selbst, daß, wenn man (nach §. 246.) die Ausdrücke

$$z^{2n} \pm 2a^n z^n \cdot Cos\,\varphi + a^{2n}$$

in ihre Doppel-Faktoren von der Form

$$z^2 \pm 2rz \cdot Cos\,\psi + r^2$$

zerlegt hat, dann auch, wenn man $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ statt z, und

---

$$e^x - e^{-x} = Bx\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

wo B das Produkt

$$\frac{2}{m}\cdot\left(2\,Sin\,\frac{1}{m}\pi\right)^2\left(2\,Sin\,\frac{2}{m}\pi\right)^2\left(2\,Sin\,\frac{3}{m}\pi\right)^2 \text{ in inf. für } m=\infty,$$

vorstellt. Um nun B zu finden, muß man die erstere Gleichung vorher noch durch x dividiren, so daß man, wenn statt e^x und e^{-x} die Reihen substituirt werden, zur Linken die Reihe $2\left(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+ \text{ in inf.}\right)$ zu stehen hat. Setzt man nun 0 statt x, so erhält man sogleich

$$2 = B.$$

$\left(1-\frac{x}{m}\right)^m$ statt a setzt, und $m=\infty$ sich denkt, — daß man dann die Zerlegung von

$$e^{2x} \pm 2 Cos\,\varphi + e^{-2x}$$

in unendlich viele Faktoren von der Form

$$x^2+px+q$$

erhalten werde, — auch daß auf analogem Wege sich noch mehr analoge Zerlegungen auffinden lassen.

Und wenn alle diese Gleichungen für jeden Werth von x gelten, so erhält man aus ihnen, dadurch daß man statt x nach und nach immer andere bestimmte Werthe setzt, wieder eine unendliche Menge von Zahlengleichungen, in denen irgend eine bestimmte numerische Zahl in ein Produkt von unendlich vielen (Ziffern-) Faktoren ausgedrückt sich sieht, so oft nur letzteres auch einen bestimmten endlichen Werth hat, d. h. so oft das Produkt von n ersten Faktoren eine solche Funktion von n ist, daß sie für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth annimmt *).

VII. So sinnreich aber das in II. ausgesprochene Verfahren Euler's ist, und so einfach zugleich, so lassen sich doch gegen dasselbe wesentliche Bedenken erheben.

1) Die Gleichung $e^x=\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ für $m=\infty$, ist keine Formgleichung, d. h. sie gilt nicht unabhängig von x, sondern sie setzt x reell voraus und sagt weiter nichts, als daß unter dieser Voraussetzung der Werth der Potenz $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ dem Werthe der Exponential-Funktion e^x desto näher rückt, je größer man m nimmt und daß beide Werthe einander unendlich nahe rücken können. Man müßte also zunächst erst beweisen,

---

*) Dies ist unter Anderen auch der Fall, wenn die Summe der Logarithmen aller unendlich vielen Faktoren eine convergente unendliche Reihe bilden, — weil dann der Logarithme des Produkts und deshalb das Produkt selbst, einen endlichen bestimmten Werth hat.

daß dieselbe Gleichung auch für jeden imaginären Werth von x zugelassen werden kann.

2) Wenn aber auch dieser Beweis geführt wäre, so müßte man doch mit Recht sich noch fragen, ob nun das gewonnene Endresultat in dem Sinne gilt, wie solcher am Ende von III. ausgesprochen worden ist, während eine Menge von späteren Konsequenzen wegfallen würden, wenn sie nicht in dem eben erwähnten Sinne wahr sein sollten.

3) Diese Bedenken wachsen an Bedeutung, wenn man auf die Art und Weise Rücksicht nimmt, wie in III. der Koeffizient A, und in der Note zu IV. der Koeffizient B bestimmt worden ist. Gilt nämlich die Gleichung IV. Nr. 10. nur für einen gewissen Umfang der Werthe von x, innerhalb dessen aber $x = 0$ sich befindet, so bestimmt sich der Koeffizient A auf dem betretenen Wege, obgleich das Endresultat ebenfalls nur in demselben Umfange der Werthe von x gilt, z. B. nur so lange x reell ist.

Dieselben Bedenken bleiben aber auch, wenn man bei dem Uebergange zu $m = \infty$ genau das von Euler (in seiner introductio in Analysin infinitorum) durchgeführte Verfahren Platz greifen läßt, welches von dem hier in III. und IV. betretenen Wege etwas abweicht.

VIII. Euler schon und seine Nachfolger haben die Zerlegung von $Sin\,x$ und $Cos\,x$ in Produkte von unendlich vielen Faktoren auch mit Zuziehung der Integralrechnung durchgesetzt, auf verschiedenen Wegen. Verfolgt man aber diese, der sogenannten höhern Analysis angehörigen Verfahrungsarten mit einiger Aufmerksamkeit, so muß man bald finden, daß keine derselben die Ueberzeugung von der Allgemeingültigkeit der Formeln gewähren kann, in dem zu Ende von III. ausgesprochenen Sinne.

Deshalb wird man, wenn die gedachten Resultate als allgemeine (Form-) Gleichungen erkannt werden sollen, den im Paragraphen betretenen elementaren und zugleich naturgemäßen

Weg zu ihrer Herleitung wählen müssen, oder einen ihm analogen.

§. 290.

Euler geht nun weiter und nimmt die Logarithmen der Ausdrücke I. und II. des §. 289. links und rechts. Weil aber der Logarithme eines Produkts gefunden wird, wenn man die Summe der Logarithmen aller Faktoren nimmt, so erhält man (aus I. und II.)

$$\text{III.} \quad log\, Cos\, x = S\left[log\left(1-\frac{4x^2}{(2a+1)^2\pi^2}\right)\right]$$

$$\text{IV.} \quad log\, Sin\, x = log\, x + S\left[log\left(1-\frac{x^2}{(a+1)^2\pi^2}\right)\right].$$

Nun ist aber (nach den §§. 181.–183.), für jeden einzelnen Werth von a,

$$log\left(1-\frac{(2x)^2}{(2a+1)^2\pi^2}\right) = -S\left[\frac{1}{b+1}\cdot\frac{(2x)^{2b+2}}{(2a+1)^{2b+2}\pi^{2b+2}}\right]$$

und

$$log\left(1-\frac{x^2}{(a+1)^2\pi^2}\right) = -S\left[\frac{1}{b+1}\cdot\frac{x^{2b+2}}{(a+1)^{2b+2}\pi^{2b+2}}\right];$$

folglich erhält man (aus III. und IV.)

$$\text{V.} \quad log\, Cos\, x = -S\left[\frac{1}{b+1}\cdot\frac{(2x)^{2b+2}}{(2a+1)^{2b+2}.\pi^{2b+2}}\right]$$

$$\text{VI.} \quad log\, Sin\, x = log\, x - S\left[\frac{1}{b+1}\cdot\frac{x^{2b+2}}{(a+1)^{2b+2}.\pi^{2b+2}}\right],$$

so daß hierdurch $log\, Cos\, x$ und $log\, Sin\, x - log\, x$ in Reihen ausgedrückt sind, welche nach (geraden) Potenzen von x fortlaufen und in denen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x, numerische und konvergente unendliche Reihen sind; — denn es ist der Koeffizient von x^{2n} (indem man $b = n-1$ nimmt)

$$\text{in V.} \cdots = -\frac{2^{2n}}{n\cdot\pi^{2n}} S\left[\frac{1}{(2a+1)^{2n}}\right]$$

$$\text{d. h.} = -\frac{2^{2n}}{n\cdot\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots \text{ in inf.}\right)$$

und in VI. ... $= -\frac{1}{n\pi^{2n}} \cdot S\left[\frac{1}{(\alpha+1)^{2n}}\right]$

$$\text{d. h.} \quad = -\frac{1}{n\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots \text{ in inf.}\right).$$

Euler verfolgt dann die Berechnung der reellen Werthe dieser Logarithmen (der Neper'schen Logarithmen, von *Cos* x und *Sin* x mittelst dieser Reihen, noch etwas weiter. — Sollen aber die Gleichungen III. und V. allgemeine (vollkommene, richtige) Gleichungen sein, so muß man (§§. 181.–183.) auf der rechten Seite noch *log* 1 addiren.

Anmerkung. Euler zerlegt, wie wir oben bereits gezeigt haben, noch mehr ähnliche Funktionen in Produkte aus unendlich vielen Faktoren, namentlich auch die Funktionen $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, welche wir im §. 168. bezüglich durch K_x und S_x bezeichnet haben und von denen wir wissen, daß sie bezüglich $= Cos(x \cdot i)$ und $= \frac{1}{i} \cdot Sin(x \cdot i)$ sind. — Weil aber die Gleichungen §. 289. I. und II. gelten, obgleich x keinen bestimmten Zifferwerth hat, sondern nur ein Träger der Operationszeichen ist, so darf man nur in den Gleichungen I. und II. $x \cdot i$ statt x setzen und man erhält sogleich:

$$\text{VII.} \quad K_x \quad \text{d. h.} \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2} = P\left[1+\frac{4x^2}{(2\alpha+1)^2\pi^2}\right]$$

und

$$\text{VIII.} \quad \frac{S_x}{x} \quad \text{d. h.} \quad \frac{e^x-e^{-x}}{2x} = P\left[1+\frac{x^2}{(\alpha+1)^2\pi^2}\right],$$

woraus dann wieder $log\, K_x$ und $log\, S_x$ in Reihen, ganz analog wie *log Cos* x und *log Sin* x, entwickelt werden können.

§. 291.

Haben F_x und $w_1, w_2, w_3, \cdots w_m$ genau wieder die Bedeutung wie im Anfange des §. 289.; — ist aber $A_0 = 1$ angenommen; — hat man also die identische Gleichung

$$1)\quad 1+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m = \left(1-\frac{x}{w_1}\right)\left(1-\frac{x}{w_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{w_m}\right)$$

und sind $w_1, w_2, \cdots w_m$ die m Wurzelwerthe der höheren Gleichung

$$2)\quad 1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_mx^m=0;$$

setzt man dann hier herein $\frac{1}{z}$ statt x und multiplicirt man zu gleicher Zeit mit z^m, so erhält man

$$3)\quad z^m+A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+\cdots+A_m = \left(z-\frac{1}{w_1}\right)\left(z-\frac{1}{w_2}\right)\cdots\left(z-\frac{1}{w_m}\right),$$

während $\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \cdots \frac{1}{w_m}$ die m Wurzelwerthe der aus 2.) hervorgehenden höheren Gleichung

$$4)\quad z^m+A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+A_3z^{m-3}+\cdots+A_m=0$$

sind.

Bezeichnet man nun durch $S_1, S_2, S_3, \cdots S_n$ die Summe der 1ten, 2ten, 3ten, ⋯ nten Potenzen dieser letztern Wurzelwerthe $\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \frac{1}{w_3}, \cdots \frac{1}{w_m}$, so daß

$$5)\quad S_n=\frac{1}{w_1^n}+\frac{1}{w_2^n}+\frac{1}{w_3^n}+\cdots+\frac{1}{w_m^n}$$

ist (für $n=1, 2, 3, \cdots n$), so hat man nach dem Newton'schen Lehrsatz für Potenzsummen (§. 239.)

$$6)\quad \begin{cases} S_1+A_1=0; \\ S_2+A_1S_1+2A_2=0; \\ S_3+A_1S_2+A_2S_1+3A_3=0; \\ S_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1+4A_4=0; \end{cases}$$

und allgemein (für $\mu=1, 2, 3, \cdots n<m$)

$$6)\quad S_\mu+A_1\cdot S_{\mu-1}+A_2\cdot S_{\mu-2}+\cdots+A_{\mu-1}\cdot S_1+\mu\cdot A_\mu=0.$$

Setzt man nun in die Gleichung 2.), indem man $m = \infty$ sich denkt, statt der Reihe zur Linken die Reihe für

$\frac{Sin\,x}{x}$, nämlich $1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \frac{1}{9!}x^8 - \cdots$ in inf.

so sind w_1, w_2, w_3, w_4, ... alle Werthe von x, welche $\frac{Sin\,x}{x}$, $= 0$ machen, — also alle Werthe von x, welche $Sin\,x = 0$ machen, mit Ausnahme von $x = 0$, — also alle die Werthe

$-\pi$, $+\pi$, -2π, $+2\pi$, -3π, $+3\pi$, -4π, $+4\pi$, -5π, rc. rc.;

dagegen sind A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, rc. rc. alle $= 0$ und $A_2 = -\frac{1}{3!}$, $A_4 = +\frac{1}{5!}$, $A_6 = -\frac{1}{7!}$, $A_8 = +\frac{1}{9!}$, ...

$A_{4\mu} = +\frac{1}{(4\mu+1)!}$ und $A_{4\mu+2} = -\frac{1}{(4\mu+3)!}$. — Ferner sind die ungeraden Potenzsummen S_1, S_3, S_5, S_7, rc. rc. offenbar alle $= 0$, weil je zwei Glieder derselben einander gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Gleichungen 6.) dagegen liefern sogleich die Werthe für die geraden Potenzsummen S_2, S_4, S_6, rc. während (nach 5.), weil immer zwei gleiche Glieder sich ergeben

7) unter $S_{2\mu}$ die Reihe

$$\frac{2}{\pi^{2\mu}}\left(1 + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \frac{1}{4^{2\mu}} + \frac{1}{5^{2\mu}} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

verstanden wird. Die Gleichungen 6.) geben daher nun sogleich

$$8)\quad \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^2}{6}, \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^4}{90}, \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^6}{945}, \end{cases}$$

u. s. w. f.

wodurch die Werthe dieser konvergenten Reihen, welche harmo-

nische Reihen der 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten} ꝛc. ꝛc. Ordnung genannt werden, in die Zahl π ausgedrückt sind, bis zu jeder beliebigen geraden Ordnung.

Wendet man denselben Satz auf den Fall an, wo (für $m = \infty$) statt der Reihe in 2.) die Reihe

$Cos\,x$ d. h. $1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$ gesetzt wird, so erhält man, da die Wurzelwerthe w von $Cos\,x = 0$, bezüglich $-\frac{1}{2}\pi$, $+\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, $+\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{5}{2}\pi$, ꝛc. ꝛc. sind, ganz auf analoge Weise die Summen der nachstehenden harmonischen Reihen, in π ausgedrückt, nämlich:

$$9)\quad \begin{cases} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^2}{8}; \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^4}{96}; \\ 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^6}{960}; \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

Aus diesen Resultaten 8.) und 9.) kann man nun eine beliebige Anzahl neuer zusammensetzen. Nimmt man z. B. die Gleichungen 9.) doppelt und zieht man dann die Gleichungen 8.) davon ab, so erhält man

$$10)\quad \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\pi^2}{12}; \\ 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{7\pi^4}{720}; \\ 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{31\pi^6}{30240}; \\ \text{u. s. w. f.} \end{cases}$$

Anmerkung 1. Man kann die Resultate 8.) und 9.) auch dadurch etwas eleganter und bequemer herleiten, daß man in den Gleichungen

$\frac{Sin\,x}{x}$ oder $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-$ in inf.

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \text{ in inf.}$$

$Cos\,x$ oder $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-$ in inf.

$$=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

$\frac{x^2}{\pi^2}=z$ oder $x^2=\pi^2 z$ setzt; — sie gehen dann über in

$$1-\frac{\pi^2}{3!}z+\frac{\pi^4}{5!}z^2-\frac{\pi^6}{7!}z^3+ \text{ in inf.}$$

$$=\left(1-z\right)\left(1-\frac{1}{2^2}z\right)\left(1-\frac{1}{3^2}z\right)\left(1-\frac{1}{4^2}z\right) \text{ in inf.}$$

und

$$1-\frac{\pi^2}{2!}z+\frac{\pi^4}{4!}z^2-\frac{\pi^6}{6!}z^3+ \text{ in inf.}$$

$$=\left(1-4z\right)\left(1-\frac{4}{3^2}z\right)\left(1-\frac{4}{5^2}z\right)\left(1-\frac{4}{7^2}z\right) \text{ in inf.}$$

und geben so bequemer die obigen Resultate.

Endlich könnte man in diesen letztern Gleichungen auch noch $-z$ statt z schreiben und man hätte dann dieselben Gleichungen, welche man auch erhalten haben würde, wenn man, statt von den Gleichungen $\frac{Sin\,x}{x}=0$ und $Cos\,x=0$ auszugehen, von den Gleichungen

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2x} \text{ oder } \frac{S^x}{x}=0, \text{ und } \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ oder } K_x=0$$

ausgegangen wäre und die Gleichungen VII. und VIII. in der Anmerkg. zu §. 290. zu Hilfe genommen hätte, wie Euler gethan.

Anmerkung 2. Die harmonischen Reihen von ungerader Ordnung, nämlich

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

u. s. w., lassen sich auf diesem Wege nicht auswerthen; — sie sind im VIII. Th. dieses Werkes durch bestimmte Integrale ausgedrückt. — Die harmonische Reihe von der 1ten Ordnung, nämlich $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ ꝛc. ꝛc., mit lauter positiven Gliedern ist divergent und hat gar keinen Werth; während dieselbe mit abwechselnden Vorzeichen, nämlich

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-$ ꝛc. ꝛc. (nach §. 182. VII.) $= L2$ ist.

Dreizehntes Kapitel.

Von dem imaginären Größern und Kleinern. Vom imaginären Unendlich-Großen und Unendlich-Kleinen.

Vorerinnerung.

Der gegenwärtige Zustand der mathematischen Analysis macht es bereits höchst wünschenswerth, ja nothwendig, daß der Begriff des „Größern" und „Kleinern", wie er sich in der Geschichte der Mathematik für reelle Ausdrücke faktisch hergestellt hat, auch auf allgemein-numerische Ausdrücke, d. h. auf Ausdrücke von der Form $p+q\cdot i$ d. h. $p+q\cdot\sqrt{-1}$ ausgedehnt werde, mag q nicht Null, der Ausdruck also imaginär, — oder mag q Null, der Ausdruck selbst also reell sein. — So wie man aber bei der reellen Zahl auch noch den Begriff des Größern und Kleinern unterscheidet, für den Fall, daß die reelle Zahl abgesehen vom Vorzeichen betrachtet werden soll, d. h. daß nicht die positive oder negative Zahl $\pm a$, sondern nur deren absolutes Glied a (welches allemal eine wirkliche ganze Zahl, oder eine selbstständige Division zweier ganzen Zahlen, d. h. eine sogenannte gebrochene Zahl sein wird) in Betrachtung kommen soll, — eben so muß man auch bei Aufstellung des Begriffes des „Größern" und „Kleinern" für solche allgemein-numerische Zahlen $p+q\cdot i$, für die spätere praktische Anwendung von den Vorzeichen von p und q absehen.

§. 292. Erklärung.

Indem wir in diesem Kapitel ein für allemal

$$a = p + q\cdot i = r\cdot e^{\phi\cdot i}, \text{ wo } r = +\sqrt{p^2+q^2} \text{ ist,}$$

$$b = p_1 + q_1\cdot i = r_1\cdot e^{\phi_1\cdot i}, \text{ wo } r_1 = +\sqrt{p_1^2+q_1^2} \text{ ist,}$$

$$c = p_2 + q_2\cdot i = r_2\cdot e^{\phi_2\cdot i}, \text{ wo } r_2 = +\sqrt{p_2^2+q_2^2} \text{ ist, und}$$

$$d = p_3 + q_3\cdot i = r_3\cdot e^{\phi_3\cdot i}, \text{ wo } r_3 = +\sqrt{p_3^2+q_3^2} \text{ ist, —}$$

voraussetzen, während p, p_1, p_2, p_3 und q, q_1, q_2, q_3 beliebig reell d. h. positiv, negativ ganz oder gebrochen, oder Null gedacht sind, — sagen wir: „a sei größer als b, oder b sei kleiner als a“ und schreiben dies so:

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a,$$

so oft der Model r von a, größer ist als der Model r_1 von b, während bekanntlich jeder Model stets eine absolute (positive) Zahl ist.

Sind aber die Model r und r_1 einander gleich, so nennen wir a und b gleichmodelig und schreiben dies so:

$$a \equiv b.$$

Anmerkung. Ist $q = q_1 = 0$, so sind a und b reell, und r und r_1 sind dann die absoluten Glieder der positiven oder negativen Zahlen a und b, also diese Zahlen a und b selbst, abgesehen vom Vorzeichen. — Die Ungleichung $a > b$ oder $b < a$ stimmt also in diesem Ausnahmsfalle mit dem früheren Begriff des Größern und Kleinern überein, wenn man die Glieder links und rechts, abgesehen vom Vorzeichen nimmt, welches letztere somit in der Folge, so oft dieser Ausnahmsfall eintritt, jedesmal vorausgesetzt werden muß.

§. 293.

Daß also $p + q \cdot i > p_1 + q_1 \cdot i$ ist, erkennt man daran, daß

$$p^2 + q^2 > p_1^2 + q_1^2 \quad \text{oder} \quad p^2 - p_1^2 + (q^2 - q_1^2)$$

d. h. $(p - p_1)(p + p_1) + (q - q_1)(q + q_1)$ positiv wird.

Daß aber $p + q \cdot i \equiv p_1 + q_1 \cdot i$ ist, erkennt man daran, daß derselbe Ausdruck $(p - p_1)(p + p_1)(q - q_1)(q + q_1)$, $= 0$ wird.

Es ist also z. B.

$$\pm 4 \pm 3 \cdot i \equiv \pm 3 \pm 4 \cdot i \quad \text{und} \quad -7 \equiv +7;$$

$$4 + 3 \cdot i \equiv -5 \quad \text{und} \quad -6 + 8 \cdot i \equiv +10;$$

$$\text{und} \quad -2 \pm 10 \cdot i \equiv 8 \pm i \cdot \sqrt{40} \quad \text{und} \quad 5 - i \equiv \sqrt{17} + 3 \cdot i.$$

Ferner ist

$$-2\pm10\cdot i>8\pm6\cdot i, \quad \text{dagegen} \quad 2\pm10\cdot i<8\pm7\cdot i;$$
$$\pm9\cdot i>-6\pm5\cdot i, \quad \text{dagegen} \quad \pm9\cdot i<-6\pm8\cdot i;$$
$$-1\pm5\cdot i>\pm4\cdot i, \quad \text{dagegen} \quad 1\pm5\cdot i<\pm6\cdot i;$$

und alle diese Relationen bleiben wahr, welche der Vorzeichen links und rechts und unabhängig von einander man auch immer wählen mag, und auch dann noch, wenn man den reellen Theilen links und rechts (des > oder < Zeichens) das entgegengesetzte Vorzeichen giebt. — Eben so ist noch

$$1+i>1, \quad \text{so wie auch} \quad 1-i>1, \quad \text{u. s. w.};$$

endlich auch

$$-7>3, \quad 7>3, \quad 7>-3 \quad \text{und} \quad -7>-3,$$

welches letztere mit dem früheren Begriff des Größern und Kleinern übereinstimmt, weil man die Glieder *abgesehen vom Vorzeichen* sich denken muß, so daß alle vier Ungleichungen ein und dasselbe ausdrücken, nämlich daß $7>3$ oder daß $7-3$ einer *positiven* Zahl gleich ist.

§. 294.

Aus diesen Begriffen folgt sogleich

1) Ist $a\equiv b$, so ist auch $a\equiv -b$, $-a\equiv b$ und $-a\equiv -b$; und sind noch überdieß a und b reell, so sind auch a und b, *abgesehen vom Vorzeichen* einander *gleich*.

2) Ist $a>b$, so ist auch $a>-b$, $-a>b$ und $-a>-b$.

3) Ist $a>b$ und $b>c$, so ist auch $a>c$;
und ist $a\equiv b$ und $b\equiv c$, so ist auch $a\equiv c$.

4) Ist $a\equiv b$ und noch $c\equiv d$,
so ist nothwendig auch

$$ac\equiv bc \quad \text{und} \quad \frac{a}{c}\equiv\frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a}\equiv\frac{c}{b}$$

und $$ac\equiv bd \quad \text{und} \quad \frac{a}{c}\equiv\frac{b}{d}.$$

Denn es sind

die Model von ac, bc, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, bd und $\frac{b}{d}$

bezüglich rr_2, r_1r_2, $\frac{r}{r_2}$, $\frac{r_1}{r_2}$, $\frac{r_2}{r}$, $\frac{r_2}{r_1}$, r_1r_3 und $\frac{r_1}{r_3}$

und dabei ist noch $r = r_1$ und $r_2 = r_3$ vorausgesetzt, woraus alle Folgerungen ohne Weiteres hervorgehen.

Auch geht aus der Betrachtung dieser Model, noch der nachstehende Satz hervor, nämlich:

5) Ist $a > b$ und noch $c > d$,

so ist allemal auch

$$ac > bc \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} < \frac{c}{b},$$

und noch $ac > bd$ und $\frac{a}{c} > \frac{d}{b}$.

6) Ist $a \equiv b$ und $\frac{m}{n}$ irgend eine reelle Zahl, so ist allemal auch

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv b^{\frac{m}{n}},$$

welchen der n Werthe links und rechts, man nur immer nehmen mag.

Denn es sind

die Model von $a^{\frac{m}{n}}$ und $b^{\frac{m}{n}}$

bezüglich $r^{\frac{m}{n}}$ und $r_1^{\frac{m}{n}}$,

wenn von $r^{\frac{m}{n}}$ und $r_1^{\frac{m}{n}}$ nur die absoluten Werthe genommen werden; folglich sind letztere einander gleich, weil $r = r_1$ vorausgesetzt ist. — Analog ergiebt sich der nun folgende Satz, nämlich:

7) Ist $a > b$, und ist $\frac{m}{n}$

irgend eine absolute (positive) Zahl, so ist allemal auch

$$a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} \quad \text{und} \quad a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}},$$

welche der n Werthe links und rechts der > und < Zeichen man nur immer nehmen mag.

8) Ist $a \equiv b$,

so ist nur dann $a + c \equiv b + c$ und $a - c \equiv b - c$,

wenn ($\odot$)$\cdots$ $(p-p_1)p_2+(q-q_1)q_2=0$ vorausgesetzt wird.

Denn es sind die Quadrate der Model von

$$a+c, \qquad b+c,$$

bezüglich $(p+p_2)^2+(q+q_2)^2$, $(p_1+p_2)^2+(q_1+q_2)^2$,

$$a-c \quad \text{und} \quad b-c$$

bezüglich $(p-p_2)^2+(q-q_2)^2$ und $(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2$.

Da nun $p^2+q^2=p_1^2+q_1^2$ ist, so können von den letzteren vier Modeln, die erstern beiden und die letztern beiden nur dann einander gleich sein, wenn $2p\cdot p_2+2q\cdot q_2=2p_1p_2+2q_1q_2$ ist.

Ist c reell, also $q_2=0$, so reducirt sich die Bedingungsgleichung ($\odot$) bloß auf $p=p_1$, welche jedoch $q=\pm q_1$ involvirt, weil $a\equiv b$.

9) Eben so wenig folgt aus

$$a>b,$$

daß auch $a+c>b+c$ oder $a-c>b-c$

sein müsse, sondern es ist nur dann (wenn $a>b$ ist) nothwendig auch $a+c>b+c$,

wenn (☾)$\cdots$ $(p-p_1)p_2+(q-q_1)q_2$ Null oder positiv ist; und nur dann (wenn $a>b$ ist) nothwendig auch

$$a-c>b-c,$$

wenn (♀)$\cdots$ $(p-p_1)p_2+(q-q_1)q_2$ Null oder negativ ist.

So ist z. B. wenn $a=3-5\cdot i$ und $b=4+2\cdot i$ genommen wird, dann $a>b$. — Nimmt man nun $c=2-3\cdot i$, so hat man $p=3$, $p_1=4$, $p_2=2$, $q=-5$, $q_1=2$ und $q_2=-3$; folglich ist $(p-p_1)p_2=-2$, $(q-q_1)q_2=21$; also ist die Bedingung (☾) erfüllt, und das Größere zu Gleichen addirt, giebt das Größere, nämlich

$$(3+2)-(5+3)\cdot i>(4+2)+(2-3)\cdot i.$$

Weil aber die Bedingung (♀) nun nicht erfüllt ist, so würde dasmal das Gleiche vom Größeren subtrahirt nicht nothwendig das Größere geben, obgleich dies zufällig möglich sein könnte; — und in der That erhält man durch Subtraktion des Ausdrucks c,

$$(3-2)+(3-5)\cdot i \quad \text{und} \quad (4-2)+(2+3)\cdot i,$$

und doch ist der erstere Ausdruck nicht größer, sondern kleiner als der andere.

— Nimmt man aber $c=2+3\cdot i$, so ist die Bedingung (♀) erfüllt, und deshalb giebt jetzt das Gleiche vom Größeren subtrahirt, wiederum das Größere, nämlich

$$(3-2)-(5+3)\cdot i>(4-2)+(2-3)\cdot i.$$

Ist c reell, also $q_2=0$, oder ist $q=q_1$, so reduciren sich die Bedingungen (☾) und (♀) bloß auf

(☾₁)··· $(p-p_1)p_2$ Null oder positiv (für $a+c>b+c$, wenn $a>b$)

(♀₁)··· $(p-p_1)p_2$ Null oder negativ (für $a-c>b-c$, wenn $a>b$).

Und da diese Bedingungen immer erfüllt sind, so oft $p=p_1$ ist, so folgt aus $p+q\cdot i>p+q_1\cdot i$ (wenn $c=p_2$ reell ist) allemal und unbedingt

$$(p+c)+q\cdot i>(p+c)+q_1\cdot i \text{ und } (p-c)+q\cdot i>(p-c)+q_1\cdot i;$$

und auch noch, weil die Vorzeichen der einzelnen Glieder beliebig verändert werden können

$$(c-p)\pm q\cdot i>(c-p)\pm q\cdot i.$$

Es ist aber die Bedingung (☾₁) auch immer erfüllt, so oft $p-p_1$ und p_2 einerlei Vorzeichen haben, — während, wenn $p-p_1$ und p_2 verschiedene Vorzeichen haben, die andere Bedingung (♀₁) allemal erfüllt sich sieht. — Es folgt also aus

$$p+q\cdot i>p_1+q\cdot i \quad (\text{wo } q_1=q \text{ vorausgesetzt ist})$$

allemal $(p+p_2)+(q+q_2)i>(p_1+p_2)+(q+q_2)\cdot i$,

so oft $p-p_1$ und p_2 einerlei Vorzeichen haben; dagegen ist, wenn man $p+q\cdot i>p_1+q\cdot i$ voraussetzt, allemal

$$\pm(p-p_2)\pm(q-q_2)\cdot i>\pm(p_1-p_2)\pm(q-q_2)\cdot i,$$

so oft $p-p_1$ und p_2 verschiedene Vorzeichen haben.

Sind endlich a, b und c alle drei reell, so folgt aus

$$a>b$$

allemal $a+c>b+c$, abgesehen vom Vorzeichen,

so oft $a-b$ und c einerlei Vorzeichen haben;

dagegen $a-c>b-c$, abgesehen vom Vorzeichen,

so oft $a-b$ und c verschiedene Vorzeichen haben. (S. Anmerkg. zu §. 292.).

So folgt aus $-5>3$, für $c=-4$ sofort

$$(-5)+(-4)>3+(-4) \text{ d. h. } -9>-1;$$

abgesehen vom Vorzeichen, — weil $a-b=-8$ und $c=-4$ einerlei Vorzeichen haben. Dagegen folgt für $c=6$, aus $-5>3$ sofort $-5-6>3-6$ d. h. $-11>-3$, abgesehen vom Vorzeichen, weil jetzt $a-b=-8$ und $c=6$ verschiedene Vorzeichen haben.

Aus $5>-3$ folgt dagegen für $c=-4$, $5-(-4)>-3-(-4)$ d. h. $9>1$, abgesehen vom Vorzeichen, — weil jetzt $a-b=8$ und $c=-4$ verschiedene Vorzeichen haben; dagegen folgt für $c=6$, aus $5>-3$, sofort $5+6>-3+6$ d. h. $11>3$ (abgesehen vom Vorzeichen), weil jetzt $a-b=8$ und $c=6$ einerlei Vorzeichen haben.

§. 295.

Sind diese Begriffe und Sätze festgestellt, so kann man mit größerer Leichtigkeit und Bequemlichkeit Untersuchungen anstellen und Resultate aussprechen, welche sich eines hohen Grades von Allgemeinheit erfreuen. Wir begnügen uns, hier, wo uns nicht mehr Raum vergönnt ist, nur einen einzigen solchen Satz noch auszusprechen, nämlich:

Ist die unendliche Reihe

$$R = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ in inf.}$$

für jeden reellen Werth von x konvergent, der, abgesehen vom Vorzeichen, gleich oder kleiner als eine bestimmte absolute Zahl α ist, und unter der Voraussetzung, daß alle Koeffizienten der Reihe reell sind und daß alle Glieder derselben absolut (abgesehen vom Vorzeichen) genommen werden, — so ist dieselbe unendliche Reihe auch konvergent für jeden imaginären Werth $p+q\cdot i$ von x, sobald

entweder $p+q\cdot i \equiv \alpha$ oder $p+q\cdot i<\alpha$

ist.

Denn, verwandelt man $p+q\cdot i$ in $r\cdot e^{\varphi\cdot i}$, oder in $r\cdot(Cos\,\varphi+i\cdot Sin\,\varphi)$, so ist (nach der Voraussetzung) $r \overline{\overline{<}} \alpha$. —

Setzt man aber diesen Werth statt x in die Reihe R, so erhält man

$$R = A_0 + A_1 r \cdot Cos\,\varphi + A_2 r^2 \cdot Cos\,2\varphi + A_3 r^3 \cdot Cos\,3\varphi + \text{ in inf.}$$
$$+ i \cdot (A_1 r \cdot Sin\,\varphi + A_2 r^2 \cdot Sin\,2\varphi + A_3 r^3 \cdot Sin\,3\varphi + \text{ in inf.});$$

und von diesen beiden unendlichen Reihen ist jede offenbar für sich convergent, da jedes Glied derselben (wegen $r \overline{\overline{<}} \alpha$, also wegen, abgesehen vom Vorzeichen, $r^n \cdot Cos\,n\varphi \overline{\overline{<}} \alpha^n$ und $r^n \cdot Sin\,n\varphi \overline{\overline{<}} \alpha^n$), entweder eben so groß oder kleiner ist als das entsprechende Glied von R wird, im Falle man α statt x setzt, während der Werth einer jeden dieser letztern beiden Reihen offenbar noch kleiner wird, wenn nicht alle ihre Glieder positiv (absolute Zahlen) werden sollten.

§. 296. Erklärung.

Ist der Model r einer allgemein-numerischen (reellen oder imaginären) Zahl $p + q \cdot i$, unendlich-groß (d. h. immer größer noch als jede bereits noch so groß gedachte bestimmte absolute Zahl), oder unendlich-klein (d. h. immer kleiner noch als jede bereits noch so klein gedachte bestimmte absolute Zahl), so nennen wir den Ausdruck $p + q \cdot i$ selbst (er mag reell oder imaginär sein) unendlich-groß, oder unendlich-klein.

Anmerkung. Ist $q = 0$, also der Ausdruck $p + q \cdot i$ selbst $= p$ und reell, so ist p abgesehen vom Vorzeichen, $= r$. — Daher sind die früheren Begriffe des Unendlich-Großen und des Unendlich-Kleinen für reelle Zahlen, wenn vom Vorzeichen derselben abgesehen wird, als besondere, in den hier gegebenen allgemeineren, enthalten*).

---

*) Ohne Zuziehung dieses Begriffes der unendlich-kleinen reellen oder imaginären d. h. der unendlich-kleinen allgemein-numerischen Zahl, bleibt es stets ein von vorne herein mißlungenes Unternehmen sowohl die Differenzial-Rechnung des Leibnitz, als auch die „Methode der Grenzen" (die, nebenbei gesagt, im Wesentlichen gar nicht und nur in der Form der Darstellung von einander sich unterscheiden) irgend wie befriedigend zu ent-

Schluß=Anmerkung.

Es giebt gewiß keinen Analysten von nur einiger Bedeutung, welcher an das Vorhandensein imaginärer „Größen" im Ernste glaubte. Die sich darüber auszusprechen die Veranlassung gefunden haben, sagen: die imaginären Ausdrücke seien nichts als Symbole, mit denen man jedoch, wie mit Größen rechnen könne. Wir geben dies sofort zu, haben aber dann als Wissenschaftsforscher, d. h. als Männer, welche sich des ganzen inneren Zusammenhanges dieser Erscheinungen bewußt werden wollen, sogleich einige Fragen zu stellen, namentlich:

1) Was ist hier unter „Symbol" zu verstehen?

2) Woher kommt es, daß, wenn man diese Symbole wie Größen behandelt, d. h. nach Gesetzen und Regeln, welche vorausgesetztermaßen nur für Größen abgeleitet und erwiesen sind,

---

wickeln. Was kann es nützen, mit einem so großen und für das Gedeihen des Unterrichts bedenklichen Aufwand von Mitteln und Kräften strenge bewiesen zu haben, daß die und die Funktion φ_x, die Grenze des Verhältnisses der zusammengehörigen unendlich-kleinen Zuwachse von x und der Funktion f_x, ist? — so lange man diese Zuwachse reell voraussetzt, — da man unmittelbar darauf das gewonnene Resultat auf Fälle anwendet, wo die zu den nächst auf einander folgenden Werthen von x gehörigen Werthe von f_x, also auch die zu reellen unendlich-kleinen Zuwachsen von x gehörigen Aenderungen von f_x, entweder ausgesprochener Maaßen imaginär, oder so allgemein gehalten sich denkt, daß sie wenigstens eben so oft imaginär als reell sein werden. Dehnt man aber die Beweise auf allgemein-numerische unendlich-kleine Zuwachse aus, so wird man mit nicht größerer Mühe wenigstens wirklich eine Ueberzeugung von der allgemeinen Anwendbarkeit der Differenzial-Rechnung gewonnen haben, wenn wir das Verfahren selbst dann noch immer als ein unpädagogisches und dem wahren Wesen des Kalkuls nicht entsprechendes ansehen müßten. — Nichts desto weniger sind wir gewillt, wenn einmal eine neue Auflage auch des dritten Theils dieses Werkes nöthig werden sollte, wenigstens in einem Anhange nachzuweisen, wie die Bestrebungen eines Cauchy, seiner Vorgänger und seiner Nachfolger ausgeführt werden müßten, wenn sie nicht geradezu ganz vergebens sein sollen.

die richtigen, zweckentsprechenden Resultate hervorgehen? — endlich

3) Sind nicht vielleicht die negativen Ausdrücke auch bereits keine Größen mehr, sondern nur solche Symbole, deren Natur noch zu erforschen ist? — und dürfte es selbst als überflüssig erscheinen, auch die gebrochene absolute Zahl noch in dieser Beziehung einer Untersuchung zu unterwerfen? — und die Null? — —

Diese Fragen möglichst gründlich, vollständig und abgerundet zu beantworten, ist der Zweck der beiden, nun in der dritten Auflage vorliegenden Theile dieses Werkes. Das Endresultat ist im Wesentlichen das nachstehende:

Das gesammte Gebiet der Mathematik, — mit Einschluß der niedrigsten Theile derselben, z. B. der gemeinen (Ziffern-) Rechenkunst, wie der höchsten, — besteht aus drei Theilen, nämlich

1) aus dem Kalkul d. h. aus der sogenannten mathematischen Analysis,

2) aus der **allgemeinen** Größenlehre und

3) aus der **besonderen** Größenlehre (d. h. der Lehre der Zeit-, Raum- und Kraft-Größen)

Zur Nr. 3., die für sich spricht, ist hier nichts hinzuzufügen. — Zur Nr. 2. fügen wir hinzu, daß diese allgemeine Größenlehre nur aus wenigen und höchst einfachen Sätzen besteht, und nur zu zeigen hat, wie die Nr. 1. d. h. die mathematische Analysis auf die Größen im Allgemeinen angewandt werden kann und muß. Diese allgemeine Größenlehre ist in dieser dritten Auflage des ersten Theiles dieses Werkes und zwar am Schlusse desselben, ganz und vollständig vorgetragen und kann nichts weiter mehr hinzugefügt werden. — Es bleibt daher nur noch die Nr. 1. zu besprechen.

Der sogenannten mathematischen Analysis (dem Kalkul) ist der Begriff der „Größe" d. h. dessen, was benannte

Zahl ist oder als benannte Zahl ausgedrückt werden kann, ganz und vollständig fremd. — Alle ihre Theile, — die niedrigsten z. B. die gemeine (Ziffern=) Rechenkunst (mit Ausnahme des „Rechnens mit benannten Zahlen", welches eben die allgemeine Größenlehre bildet) wie die höchsten, unter anderen die Lehre und die Auflösungs=Methoden der algebraischen und der transcendenten Gleichungen, die Differenzial= und Integral=Rechnung, u. s. w. (der sogenannte Ansatz der sogenannten „algebraischen Aufgaben" gehört in das Gebiet der allgemeinen, oft auch noch zugleich in das Gebiet der besonderen Größenlehre) — beschäftigen sich nur mit der (sogenannten unbenannten ganzen) Zahl, deren Einheit so abstrakt genommen ist, daß sie keinerlei Eigenschaften hat, namentlich nicht die der Theilbarkeit und auch nicht die des Gegensatzes. — Von dieser Zahl abstrahirt man zunächst die drei direkten und aus diesen wieder die vier (eigentlich sechs) indirekten Zahlen=Verbindungen, welche mit einander Gegensätze und Beziehungen bilden, die, unabhängig von jeder bestimmten Zahl hingestellt, den ersten und allgemeinsten Theil der Analysis bilden. — Hier entstehen die „Symbole" (wenn wir uns auf einen Augenblick dieses Ausdruckes der oben angeführten Analysten bedienen dürfen). Die „Symbole"

$$a+b,\quad ab,\quad a^b,\quad a-b,\quad \frac{a}{b},\quad \sqrt[b]{a} \text{ und } log^b a,$$

in denen a und b so allgemein (so abstrakt) gedacht sind, daß sie gar nichts mehr vorstellen, sondern bloß die Träger der Zeichen sind, durch welche wir jene sieben (Verstandes=) Operationen bezeichnen, nachdem letztere nur in ihren Gegensätzen und in ihren Beziehungen zu einander, also am allerallgemeinsten aufgefaßt worden sind, — erscheinen aber nicht als Bilder für „Größen", sondern (in so ferne a und b selbst wiederum solche Symbole vorstellen können, deren einzelnen Theile abermals solche Zusammensetzungen sein dürfen, u. s. w. f.) als Bilder für eine bestimmte Aufeinanderfolge der sieben (zunächst aus der Zahl abstrahirten) Verstandes=Thätigkeiten; —

sie drücken letztere aus, und werden deshalb mit allem Rechte „Ausdrücke" genannt, nur daß sie nicht „Größen" ausdrücken, sondern ein Denkgeschäft. — Die „Gleichung" lehrt keineswegs Uebereinstimmung in der Quantität, sondern sie lehrt, daß zwei verschiedene Reihen dieser Verstandes-Thätigkeiten zu einem und demselben Ziele führen, daß daher beide Reihen unbedingt für einander gesetzt werden können. Das gedachte Ziel selbst ist nie eine Größe, — zuweilen aber nur ausnahmsweise eine Zahl, — im Allgemeinen jedoch der Ausdruck für diese Aufeinanderfolge der Verstandes-Thätigkeiten selbst — gleichsam ein Halteplatz im Denken — ein Podeum, zu welchem man auf verschieden (aus denselben Elementen) zusammengesetzten Treppen gelangen kann. — Ist einer dieser Wege gegeben und ein anderer (vielleicht einfacherer) zu demselben Halteplatz (Podeum) gesucht, so „rechnet" man, um diesen Zweck zu erreichen; das „Rechnen" (das gemeinste, wie das feinste) ist also nichts anderes, als das Umformen eines gedachten Ausdrucks in einen anderen, einem bestimmten Zwecke entsprechenden. Nach der Verschiedenheit dieses Zweckes ist daher das Rechnen verschieden.

Das Bilden (also auch das Hinschreiben) der obigen „Symbole" ($a+b$, ab, a^b, $a-b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[b]{a}$ und $log^b\, a$) nennt man bezüglich das Addiren, Multipliciren, Potenziren, Subtrahiren, Dividiren, Radiciren und Logarithmiren. — Durch diese Definitionen sind die letzteren sieben Begriffe am allgemeinsten aufgefaßt, sobald die Bedeutung der gedachten „Symbole" die allgemeinste geworden ist. — Nach den für diese „Symbole" in den vorliegenden beiden Theilen dieses Werkes nach und nach gegebenen, zuletzt immer allgemeiner werdenden Definitionen, ist ihre Form zugleich ihr Wesen, sobald man diese Form als einen Inbegriff bestimmter Merkmale (bestimmter Eigenschaften) sich denkt. — Giebt es verschiedene, nicht einander ersetzende Ausdrücke, welchen gleichzeitig diese Eigen-

schaften zukommen, so wird der Ausdruck ($\sqrt[b]{a}$, $log^b a$) vieldeutig, ja auch unendlich-vieldeutig; der ihm gleiche Ausdruck, der ihn ersetzen soll, muß dann ebensovieldeutig sein und so, daß er den ersteren vollständig ersetzt; daher der Unterschied zwischen vollkommenen Gleichungen und unvollkommenen welche letztere nur mit großer Vorsicht und als allgemeine Formeln (Rechnungs-Gesetze) gar nicht benutzt werden dürfen.

In der allgemeinen Differenz (Form) $a-b$ steckt die besondere $a-a$ oder $b-b$ oder $q-q$; sie hat merkwürdige Eigenschaften, sie ist die Null (0) der mathematischen Analysis (also auch des gemeinen Rechnens); diese Definition der 0 (Null) ist wohl festzuhalten.

So lange die Buchstaben in den Ausdrücken (zum Theil oder alle) so allgemein gehalten sind, daß sie durchaus nichts anders als Träger der Operationszeichen bleiben (und dies muß fast allemal der Fall sein, so oft einer oder mehrere dieser Buchstaben, noch ganz unbekannte, wenn auch bestimmte Ausdrücke vorstellen), so lange sind die Ausdrücke selbst allgemein und es kann bei ihnen nie die Rede davon sein, daß sie ganz oder gebrochen, positiv oder negativ, reell oder imaginär sein, und, im Falle des Vorhandenseins unendlicher, noch solchen Buchstaben fortlaufender Reihen, kann auch nie von der Konvergenz oder Divergenz dieser Reihen die Rede sein, eben weil sie allgemein sind; und der Analyst hat nur nachzuweisen, wie und wie weit mit solchen allgemeinen Ausdrücken, also auch mit solchen allgemeinen unendlichen Reihen mit Sicherheit „gerechnet" werden kann. — So wie man aber voraussetzt, daß die einzelnen Buchstaben wirkliche Zahlen (unbenannte, ganze) oder solche (symbolische) Zusammensetzungen aus wirklichen Zahlen vorstellen, so erhält man specielle (Zahl-) Formen, und zwar liefert der allgemeine Quotient $\frac{a}{b}$ die specielle Zahlform z. B. $\frac{3}{4}$ oder $\frac{4}{3}$ (die gebrochene Zahl), und die allgemeinen Begriffe der Summe

und der Differenz, die speciellen Zahlformen z. B. $0+5$, $0+\frac{3}{4}$, $0-5$, $0-\frac{3}{4}$, die man gewöhnlich etwas kürzer schreibt und dann positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen nennt.

Die gebrochene Zahl ist also kein Theil vom Ganzen, sondern eine gedachte und eben deshalb eine wirkliche Division, ein „Symbol", mit welchem nach bestimmten, in's volle Bewußtsein getretenen Gesetzen „gerechnet" werden kann; die positiven und negativen ganzen oder gebrochenen Zahlen sind ebenfalls solche „Symbole", mit derselben Berechtigung; desgleichen die 0. — Diese fünf speciellen Zahlformen werden unter dem Namen der reellen Zahlen zusammengefaßt. — Die allgemeine Wurzel ($\sqrt[b]{a}$) führt noch neue specielle Zahlformen ein, die aber sich alle (durch das Rechnen) in die Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ umformen lassen, wo p und q reelle Zahlen sind. Und da diese letztere Form, so oft $q=0$ ist, in die Form einer reellen Zahl übergeht, so umfaßt die letztere Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ alle denkbaren speciellen Zahlformen, die reellen, wenn $q=0$ ist, und die neuen, imaginär genannten, wenn q nicht der Null gleich ist. Daher haben wir diese Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, die allgemein-numerische Zahl genannt. — Die wirkliche ganze Zahl z. B. 6 und die einfache gebrochene Zahl z. B. $\frac{3}{4}$ oder $\frac{4}{3}$ nannten wir noch absolute Zahlen, und obgleich die positive Zahl $+p$, nämlich $0+p$, nämlich $(a-a)+p$, nach den Rechnungs- (d. h. Denk-) Gesetzen, $=(a+p)-a=p$ d. h. der absoluten Zahl p „gleich" ist, obgleich also beide stets für einander unbedenklich gesetzt werden können, — so sind sie doch zwei verschiedene Formen, die nöthigenfalls auch verschieden gehalten werden.

In der gesammten mathematischen Analysis kann der Begriff des „Größern" und „Kleinern" im etymologischen Sinne d. h. im Sinne einer „Größe", nicht vorkommen. Wenn wir daher diese gebräuchlichen Redensarten des „Größern" und „Kleinern" beibehalten haben, so bezeichnen sie doch nur analytische Zustände,

— wir meinen, Zustände, welche sich bloß auf die Form der Ausdrücke, also bloß auf die „Symbole" für die abstrakten Denkgeschäfte, beziehen. Sind nämlich a und b beliebige reelle Zahlen, so ist die Differenz a—b entweder einer positiven oder einer negativen Zahl gleich (im Sinne unseres Begriffes der „Gleichung"); daß das erstere der Fall ist, drücken wir dadurch aus, daß wir sagen: a sei „größer" als b; — daß der andere Fall vorhanden sei, wird dadurch ausgedrückt, daß wir sagen: a sei „kleiner" als b. — Danach ist jede folgende Zahl in der unendlich fortschreitenden Reihe der ganzen Zahlen „größer" als jede vorhergehende, — jede positive Zahl größer als die Null, jede negative Zahl kleiner als die Null, und jede negative Zahl desto kleiner, je größer ihr absolutes Glied ist; und die Form (das „Symbol") $\frac{4}{3}$ ist kleiner als 2 (weil $\frac{4}{3}-2=\frac{4-6}{3}=-\frac{2}{3}$ ist) so wie die Form $\frac{3}{4}$ größer als die Form $\frac{2}{3}$ (obgleich jede von beiden Formen nichts anders als einen Gedanken, eine Verstandes-Thätigkeit bestimmter Art, ausdrückt) weil wir eben damit nichts weiter sagen wollen, als daß die Differenz $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ (welche nach den Rechnungs-Gesetzen $=+\frac{1}{12}$ gefunden wird) einer positiven und nicht einer negativen Zahl, gleich ist. — Abstrahiren wir endlich bei den reellen Zahlen vom Vorzeichen, so daß wir nur die absoluten Glieder derselben im Auge behalten, und nur von diesen sprechen, — so ist die 0 (Null) die allerkleinste Zahl. — Und ganz analog mit diesem Verfahren konnte natürlich auch ein Begriff des Größern und Kleinern für imaginäre, oder besser, für allgemein-numerische Zahlen eingeführt werden, wie solches kurz vorher in dem letzten Kapitel dieses 2ten Theiles geschehen ist.

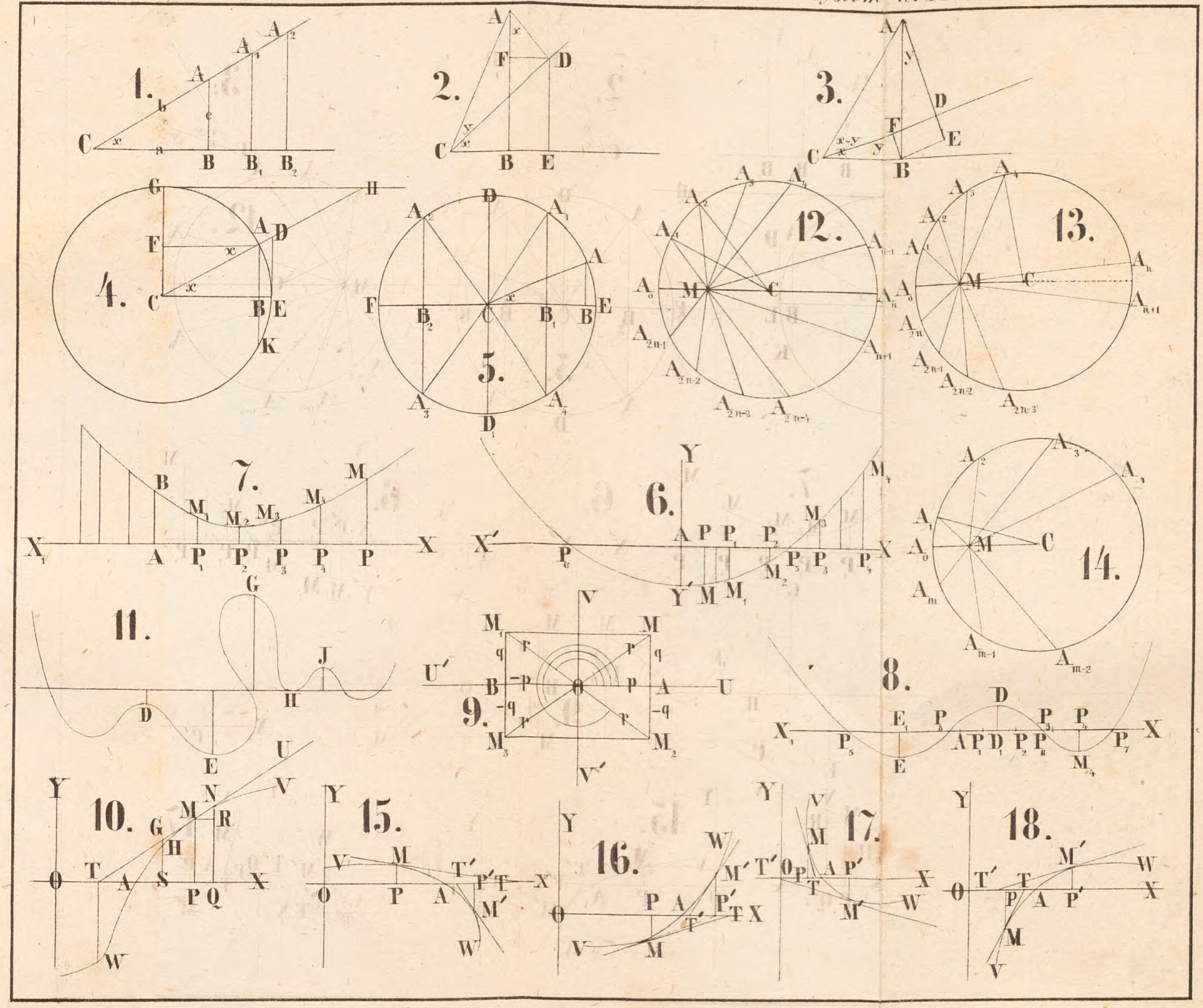
In der allgemeinen Größenlehre (am Ende des ersten Theiles dieses Werkes) ist gezeigt worden, daß, weil die (sogenannte unbenannte) gebrochene Zahl $\frac{2}{3}$ nichts anders ausdrückt als einen Gedanken bestimmter Art, nämlich eine gedachte und eben deshalb wirkliche Division, — die gebrochene

benannte Zahl z. B. $\frac{2}{3}$ Thlr. eben deshalb und nur deshalb als ein Theil des ganzen Thalers erscheint (so oft ein solcher Theil überhaupt zu den Möglichkeiten gehört, was nicht immer der Fall ist z. B. nicht bei $\frac{2}{3}$ Augen, $\frac{3}{4}$ Gedanken, $\frac{5}{8}$ Menschen, $\frac{5}{6}$ Punkte, — höchstens noch bei $\frac{3}{8}$ Mann Einquartirung, wenn man sich unter „Mann Einquartirung" nicht den lebendigen Soldaten, sondern die Kosten-Summe denkt, welche diese Einquartirung verursacht). Daraus folgt dann, daß eine absolute Zahl z. B. $\frac{3}{1000000}$, welche im vorher berührten Sinne (obgleich sie ein bloßes „Symbol" für einen Gedanken ist) sehr klein erscheint, — als benannte Zahl z. B. $\frac{3}{1000000}$ Zoll, auch eine sehr kleine Größe vorstellt, im Sinne der „Größe". — Und wenn wir $\frac{1}{p}$, im Sinne der mathematischen Analysis (also im Sinne der Symbolen-Lehre) für unendlich klein erklären müssen, sobald p als eine unendlich große ganze Zahl gedacht wird, d. h. als eine Zahl die nie ist, sondern die stets noch größer gedacht werden soll, als jede noch so große aber bestimmte Zahl, — so drückt die benannte Zahl $\frac{1}{p}$ Sekunde, eine Zeit aus, die in Momente ihres Beginnens auch schon wieder vergangen (verschwunden) ist. — So kann man also selbst die Stetigkeit der Zeit-, Raum- und Kraft-Größen durch solche „Symbole" ausdrücken, welche nur Verstandes-Thätigkeiten anzeigen und vorstellen, — sobald man sie als benannte Zahlen nimmt. Dagegen ist es nie und zu keiner Zeit möglich mit benannten Zahlen, also mit Größen zu „rechnen"; und wenn die Geschichte der Mathematik uns zeigt, daß man nichts desto weniger dies zu thun stets geglaubt hat und zum Theil noch glaubt, so zeigt uns auch dieselbe Lehrerin, zu welch großen Widersprüchen, zu welcher Unklarheit und Verworrenheit aller Begriffe diese Ansichten geführt haben und führen.

Dagegen fordern wir nun, — nachdem es uns vergönnt gewesen ist, in dieser neuen Auflage der beiden ersten Theile

dieses Werkes unsere Ansichten, wie wir glauben, in einer vollendeteren Gestalt vorzutragen, — jeden denkenden Mathematiker, der sich nicht bloß für die Analysis als Rechenkunst, sondern auch für sie als Rechen-Wissenschaft interessirt, — freundlichst auf, uns die Stelle zu zeigen, wo irgend eine Inconsequenz in den Ansichten, oder irgend ein unbestimmter Begriff bemerkbar, oder wo irgend eine im Laufe der Geschichte der Analysis hervorgetretene Erscheinung unerklärt geblieben ist. — Wir unsererseits werden jede andere Darstellung der mathematischen Analysis, so verschieden auch die Grundansicht von der unsrigen sein mag, mit herzlicher Freude begrüßen, sobald solche nur auch in sich vollkommen geschlossen, in ihren Begriffen vollkommen bestimmt ist und keine der faktischen Erscheinungen unerklärt läßt. — Nur überall Durchsichtigkeit, Bestimmtheit und Wahrheit.

Druck von Gebr. Unger in Berlin.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.